Весці БДПУ. Серыя 3. 2022. № 2. С. 24–30

УДК 517.537.38

UDC 517.537.38

ОЦЕНКА ПОРЯДКА КАНОНИЧЕСКОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ НАД КОЛЬЦОМ *p*-КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

ESTIMATE OF ORDER OF CANONIC PRODUCT ON THE RING OF *p*-COMPLEX NUMBERS

И. Л. Васильев,
кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры теории функций, БГУ;

В. В. Довгодилин,
аспирант кафедры теории функций БГУ

I. Vasilyev,
PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Functions Theory, BSU;

V. Dovgodilin,
Postgraduate Student of the Department of Functions Theory, BSU

Поступила в редакцию 25.05.2022.

Received on 25.05.2022.

В статье изучены некоторые свойства *p*-целых функций. Получена оценка роста канонического произведения в *p*-круге. При дополнительных условиях на последовательность корней дана оценка порядка канонического произведения.

Ключевые слова: кольцо *p*-комплексных чисел, дуальные числа, *p*-голоморфность, *p*-целая функция, теорема Лиувилля, порядок *p*-целой функции, каноническое произведение, рост *p*-целой функции, теорема Бореля.

The article studies some properties of *p*-entire functions. It presents the obtained estimate of growth of canonic product in *p*-ring. On additional conditions for roots sequence the estimate of order of canonic product is given.

Keywords: ring of *p*-complex numbers, dual numbers, *p*-holomorphism, *p*-entire function, Liouville theorem, order of *p*-entire function, canonic product, growth of *p*-entire function, Borel theorem.

Введение. *p*-комплексные (дуальные) числа и соответствующие функции находят применение в различных областях математики и физики, поэтому их дальнейшее изучение является актуальным. В статье изучены некоторые свойства *p*-целых функций. Получена оценка роста канонического произведения в *p*-круге. Найдены условия, при которых можно получить оценку порядка канонического произведения.

Некоторые свойства *p*-целых функций

Пусть $\mathbb{C}_p$ – кольцо *p*-комплексных чисел вида $z = x + jy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, $j^2 = 0$, $j \neq 0$. В кольце $\mathbb{C}_p$ имеются делители нуля вида jc. Топология на $\mathbb{C}_p$ порождается следующей нормой $\|z\| = \|x + jy\| = \max\{|x|, |y|\}$. Более подробно с *p*-комплексными числами можно ознакомиться в работах [1] и [2]. Отметим следующие свойства указанной нормы, доказательства которых приведены в [2].

Свойства 1–5. 1. Для любых $z, w \in \mathbb{C}_p$ верно $\| zw \| \leq 2 \| z \| \| w \|$.

2. При $n \in \mathbb{N}$, $\| z^n \| \leq n \| z \|^n$.

3. Если $Re\, z \neq 0$, $\dfrac{1}{\| z \|} \leq \left\| \dfrac{1}{z} \right\|$.

4. Если $Re\, z \neq 0$, $\left\| \dfrac{w}{z} \right\| \leq 2 \|w\| \left\| \dfrac{1}{z} \right\|$.

5. $\|z\| \le 2|z| \le 4\|z\|$, где $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Пусть $f : \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}_p$. Представим эту функцию в виде $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$, где $u = \mathrm{Re} f$ − действительная часть функции, а $v = \mathrm{Par} f$ − параболическая часть.

Определение 1. Функция $f(z)$ называется *p-целой*, если функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ бесконечно дифференцируемы в $\mathbb{R}^2$ и выполнены условия

$$u'_x(x,y) = v'_y(x,y), \qquad u'_y(x,y) = 0. \tag{1}$$

Из (1) вытекает, что функция $u(x,y)$ зависит лишь от x. В дальнейшем будем обозначать ее через $u(x)$.

Решая систему (1), можно показать (см. [3, лемма 1]), что *p*-целую функцию $f(z)$ всюду в $\mathbb{C}_p$ можно представить в виде

$$f(z) = u(x) + j\left(yu'(x) + \varphi(x)\right), \tag{2}$$

где $\varphi(x)$ – некоторая бесконечно дифференцируемая на $\mathbb{R}$ функция.
Имеет место [3, теорема 2] представление

$$f(z) = f(x) + jyf'(x). \tag{3}$$

Для производных справедливы выражения

$$f^{[k]}(z) = u^{[k]}(x) + j\left(yu^{[k+1]}(x) + \varphi^{[k]}(x)\right),$$
$$f^{[k]}(z) = f^{[k]}(x) + jyf^{[k+1]}(x).$$

Формулы (2), (3) позволят продолжить в $\mathbb{C}_p$ некоторые вещественные функции. Например, для любого $z \in \mathbb{C}_p$ положим

$$\sin z = \sin x + jy\cos x,$$
$$e^{-z^2} = e^{-x^2} - 2jyxe^{-x^2}.$$

Непосредственно из определения 1 вытекает, что сумма и произведение конечного числа *p*-целых функций снова будут *p*-целыми функциями. Однако на *p*-целые функции не удается перенести многие свойства классических целых функций [4]. В частности, не имеет места теорема Лиувилля. Например, функция

$$f(z) = 1 + j\sin z = 1 + j(\sin x + jy\cos x) = 1 + j\sin x$$

является *p*-целой, отличной от константы, при этом всюду $\|f(z)\| = 1$.

При дополнительных условиях верен следующий аналог теоремы Лиувилля.

Теорема 1. Пусть $f(z)$ – *p*-целая функция и $f(x) \in \mathbb{R}$. Если при этом $f(z)$ ограничена в $\mathbb{C}_p$, то она является вещественной постоянной.

Доказательство. В условиях теоремы в равенстве (2): $\varphi(x) \equiv 0$. Найдется $M > 0$ такое, что

$$\|f(z)\| = \max\left\{|u(x)|, |yu'(x)|\right\} \le M.$$

Отсюда следует, что $u'(x) \equiv 0$, а значит, $u(x) \equiv const \in \mathbb{R}$. Тогда $f(z) \equiv const \in \mathbb{R}$, что и требовалось доказать.

Замечание. Аналогичная теорема для функций, *p*-голоморфных в полосе, доказана в [5].

Для характеристики роста неограниченных *p*-целых функций перенесем на $\mathbb{C}_p$ некоторые понятия классической теории целых функций [4]. Пусть $M_f(r) = \max\limits_{\|z\|=r} \|f(z)\|$.

Определение 2. *Порядком p*-целой функции $f(z)$ назовем число

$$\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}. \quad (4)$$

Равенство (4) равносильно асимптотическому неравенству

$$e^{r^{\rho-\varepsilon}} < M_f(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon}},$$

где $\varepsilon > 0$ − произвольно малое, при этом правое неравенство выполняется для всех достаточно больших r, а левое − для некоторой последовательности r_n такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \infty$.

Определение 3. *Типом p*-целой функции $f(z)$ порядка ρ назовем число

$$\sigma = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M_f(r)}{r^{\rho}}. \quad (5)$$

Из равенства (5) вытекает, что $\sigma = \inf A$, где $A > 0$ такое, что асимптотически

$$M_f(r) < e^{Ar^{\rho}}.$$

Например, *p*-целая функция $f(z) = \operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} = \operatorname{ch} x + jy \operatorname{sh} x$ имеет порядок $\rho = 1$ и тип $\sigma = 1$.

Оценка роста канонического произведения в *p*-круге

Пусть a_k − последовательность действительных чисел такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \infty$ и $0 < |a_1| \le \ldots \le |a_n| \le |a_{n+1}| \le \ldots$.

Определение 4. *Каноническим произведением* в $\mathbb{C}_p$ назовем

$$F(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{\frac{z}{a_k} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_k}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_k}\right)^p}, \quad (6)$$

где p − наименьшее натуральное число такое, что сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{|a_k|^{p+1}}$.

Если $p = 0$, положим $F(z) = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{z}{a_k}\right)$. Число p будем называть *родом* канонического произведения.

Фиксируем $r > 0$ и пусть k_0 такое, что при $\|z\| < r$

$$\forall k \ge k_0 : \left\|\frac{z}{a_k}\right\| = \frac{\|z\|}{|a_k|} \le \frac{r}{|a_k|} \le q < \frac{1}{2}.$$

Теорема 2. Каноническое произведение (6) является *p*-целой функцией, при этом в круге $\|z\| < r$ справедлива оценка

$$\|F(z)\| \le 2^{k_0} \left(1 + 2B_p 2^{p+1}\right)\left(1 + A_0 r + \ldots + A_{p-1} r^p\right) e^{2A_0 r + \frac{1}{2}A_1 r^2 + \ldots + \frac{1}{p}A_{p-1} r^p + \frac{2}{p+1} B_p r^{p+1}}, \quad (7)$$

где $B_p = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{|a_k|^{p+1}}$, $p = 0,1,2,\ldots$, $A_i = \sum\limits_{k=1}^{k_0-1} \dfrac{1}{|a_k|^{i+1}}$, $i = 0,1,\ldots,p-1$.

При $p = 0$

$$\|F(z)\| \le 2^{k_0-1}\left(1 + 2B_0 r\right) e^{3B_0 r}. \quad (8)$$

Доказательство. 1) Пусть $p \in \mathbb{N}$. Представим $F(z)$ в виде $F(z) = \Pi_{k_0}(z)F_{k_0}(z)$, где

$$\Pi_{k_0}(z) = \prod_{k=1}^{k_0-1}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)e^{\frac{z}{a_k}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_k}\right)^2+\ldots+\frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_k}\right)^p},$$

$$F_{k_0}(z) = \prod_{k=k_0}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)e^{\frac{z}{a_k}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_k}\right)^2+\ldots+\frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_k}\right)^p}.$$

Положим $g_{k_0}(z) = \sum\limits_{k=k_0}^{\infty}\ln\left(\left(1-\frac{z}{a_k}\right)e^{\frac{z}{a_k}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_k}\right)^2+\ldots+\frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_k}\right)^p}\right)$. Используя (3), представим $g_{k_0}(z)$ в виде $g_{k_0}(z) = g_{k_0}(x) + jyg'_{k_0}(x)$. Заметим, что

$$\ln\left(\left(1-\frac{x}{a_k}\right)e^{\frac{x}{a_k}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_k}\right)^2+\ldots+\frac{1}{p}\left(\frac{x}{a_k}\right)^p}\right) = \left(-\frac{x}{a_k}-\ldots-\frac{1}{p}\left(\frac{x}{a_k}\right)^p-\frac{1}{p+1}\left(\frac{x}{a_k}\right)^{p+1}-\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{x}{a_k}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_k}\right)^2+\ldots+\frac{1}{p}\left(\frac{x}{a_k}\right)^p\right) = \left(-\frac{1}{p+1}\left(\frac{x}{a_k}\right)^{p+1}-\frac{1}{p+2}\left(\frac{x}{a_k}\right)^{p+2}-\ldots\right).$$

$$\frac{d}{dx}\ln\left(\left(1-\frac{x}{a_k}\right)e^{\frac{x}{a_k}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_k}\right)^2+\ldots+\frac{1}{p}\left(\frac{x}{a_k}\right)^p}\right) = -\frac{1}{a_k}\left(\left(\frac{x}{a_k}\right)^p+\left(\frac{x}{a_k}\right)^{p+1}+\ldots\right).$$

Тогда

$$g_{k_0}(z) = \sum_{k=k_0}^{\infty}\ln\left(\left(1-\frac{x}{a_k}\right)e^{\frac{x}{a_k}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_k}\right)^2+\ldots+\frac{1}{p}\left(\frac{x}{a_k}\right)^p}\right) - j\frac{y}{x}\sum_{k=k_0}^{\infty}\left(\left(\frac{x}{a_k}\right)^{p+1}+\left(\frac{x}{a_k}\right)^{p+2}+\ldots\right).$$

Справедливо неравенство $\|F(z)\| \le 2\|\Pi_{k_0}(z)\|\|F_{k_0}(z)\|$. Используя $e^{-jz} = 1-jz$, имеем

$$F_{k_0}(z) = e^{g_{k_0}(z)} = e^{\sum\limits_{k=k_0}^{\infty}\left(-\frac{1}{p+1}\left(\frac{x}{a_k}\right)^{p+1}-\frac{1}{p+2}\left(\frac{x}{a_k}\right)^{p+2}-\ldots\right)} \times \left(1-j\frac{y}{x}\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{a_k}\right)^{p+1}}{1-\frac{x}{a_k}}\right).$$

Теперь оценим

$$\left|\sum_{k=k_0}^{\infty}\left(-\frac{1}{p+1}\left(\frac{x}{a_k}\right)^{p+1}-\frac{1}{p+2}\left(\frac{x}{a_k}\right)^{p+2}-\ldots\right)\right| \le \sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{1}{p+1}\left(\left|\frac{x}{a_k}\right|^{p+1}+\left|\frac{x}{a_k}\right|^{p+2}+\ldots\right) \le$$

$$\le \frac{1}{p+1}\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{\left|\frac{x}{a_k}\right|^{p+1}}{1-\left|\frac{x}{a_k}\right|} \le \frac{2}{p+1}|x|^{p+1}\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{1}{|a_k|^{p+1}} \le \frac{2}{p+1}r^{p+1}B_p.$$

$$\left\|1-j\frac{y}{x}\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{a_k}\right)^{p+1}}{1-\frac{x}{a_k}}\right\| \le 1+\frac{|y|}{|x|}\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{\left|\frac{x}{a_k}\right|^{p+1}}{\left|1-\frac{x}{a_k}\right|} \le 1+2|y||x|^p\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{1}{|a_k|^{p+1}} \le 1+2r^{p+1}B_p.$$

Отсюда заключаем, что $\left\|F_{k_0}(z)\right\| \le e^{\frac{2}{p+1}B_p r^{p+1}}\left(1+2B_p r^{p+1}\right)$. Имеем также

$$\left\|\Pi_{k_0}(z)\right\| = \left\|\prod_{k=1}^{k_0-1}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)e^{\frac{z}{a_k}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_k}\right)^2+\ldots+\frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_k}\right)^p}\right\| \le$$

$$\le 2\left\|\prod_{k=1}^{k_0-1}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)\right\|\left\|e^{\sum\limits_{k=1}^{k_0-1}\left\{\frac{z}{a_k}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_k}\right)^2+\ldots+\frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_k}\right)^p\right\}}\right\|.$$

Используя неравенство Коши (о среднем), получаем оценку

$$\left\|\prod_{k=1}^{k_0-1}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)\right\| \le 2^{k_0-2}\prod_{k=1}^{k_0-1}\left\|1-\frac{z}{a_k}\right\| \le 2^{k_0-2}\prod_{k=1}^{k_0-1}\left(1+\left\|\frac{z}{a_k}\right\|\right) \le$$

$$\le 2^{k_0-2}\left(1+\frac{\|z\|\sum\limits_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{|a_k|}}{k_0-1}\right)^{k_0-1} \le 2^{k_0-2}e^{A_0\|z\|} \le 2^{k_0-2}e^{A_0 r}.$$

Из (3) вытекает

$$e^{\sum\limits_{k=1}^{k_0-1}\left(\frac{z}{a_k}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_k}\right)^2+\ldots+\frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_k}\right)^p\right)} = e^{\sum\limits_{k=1}^{k_0-1}\left(\frac{x}{a_k}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_k}\right)^2+\ldots+\frac{1}{p}\left(\frac{x}{a_k}\right)^p\right)} \times$$

$$\times\left(1+jy\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{a_k}\left(1+\frac{x}{a_k}+\ldots+\left(\frac{x}{a_k}\right)^{p-1}\right)\right).$$

$$\left\|e^{\sum\limits_{k=1}^{k_0-1}\left(\frac{z}{a_k}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_k}\right)^2+\ldots+\frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_k}\right)^p\right)}\right\| \le e^{\|z\|A_0+\frac{1}{2}\|z\|^2A_1+\ldots+\frac{1}{p}\|z\|^pA_{p-1}} \times$$

$$\times\left(1+|y|\left(\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{|a_k|}+|x|\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{|a_k|^2}+\ldots+|x|^{p-1}\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{|a_k|^p}\right)\right) \le$$

$$\le e^{rA_0+\frac{1}{2}r^2A_1+\ldots+\frac{1}{p}r^pA_{p-1}}\left(1+rA_0+r^2A_1+\ldots+r^pA_{p-1}\right).$$

Отсюда находим

$$\left\|\Pi_{k_0}(z)\right\| \le 2^{k_0-1}e^{2rA_0+\frac{1}{2}r^2A_1+\ldots+\frac{1}{p}r^pA_{p-1}}\left(1+rA_0+r^2A_1+\ldots+r^pA_{p-1}\right).$$

Объединяя полученные оценки, получим неравенство (7).

2) Пусть $p=0$, $F(z)=\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)$, $B_0=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|a_k|}<+\infty$. Представим $F(z)$ в виде $F(z)=\Pi_{k_0}(z)F_{k_0}(z)$, где

$$\Pi_{k_0}(z)=\prod_{k=1}^{k_0-1}\left(1-\frac{z}{a_k}\right), \quad F_{k_0}(z)=\prod_{k=k_0}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_k}\right).$$

Имеем

$$\ln\left(1-\frac{z}{a_k}\right)=\ln\left(1-\frac{x}{a_k}\right)-j\frac{y}{a_k\left(1-\dfrac{x}{a_k}\right)},$$

$$F_{k_0}(z)=e^{\sum\limits_{k=k_0}^{\infty}\ln\left(1-\frac{z}{a_k}\right)}=e^{\sum\limits_{k=k_0}^{\infty}\ln\left(1-\frac{x}{a_k}\right)}\left(1-jy\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{1}{a_k\left(1-\dfrac{x}{a_k}\right)}\right).$$

$$\sum_{k=k_0}^{\infty}\left|\ln\left(1-\frac{x}{a_k}\right)\right|\le 2|x|\sum_{k=k_0}^{\infty}\left|\frac{1}{a_k}\right|\le 2B_0r.$$

$$\left\|1-jy\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{1}{a_k\left(1-\dfrac{x}{a_k}\right)}\right\|\le 1+|y|\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{1}{|a_k|\left|1-\dfrac{x}{a_k}\right|}\le 1+2B_0r.$$

Отсюда $\|F_{k_0}(z)\|\le e^{2B_0r}(1+2B_0r)$. Для $\|\Pi_{k_0}(z)\|$ имеем

$$\|\Pi_{k_0}(z)\|=2^{k_0-2}\prod_{k=1}^{k_0-1}\left\|1-\frac{z}{a_k}\right\|\le 2^{k_0-2}\prod_{k=1}^{k_0-1}\left(1+\left\|\frac{z}{a_k}\right\|\right)\le$$

$$\le 2^{k_0-2}\left(1+\frac{\|z\|\sum\limits_{k=1}^{k_0-1}\dfrac{1}{|a_k|}}{k_0-1}\right)^{k_0-1}\le 2^{k_0-2}\left(1+\frac{B_0r}{k_0-1}\right)^{k_0-1}\le 2^{k_0-2}e^{B_0r}.$$

Объединяя полученные оценки, получим неравенство (8).

3) Каноническое произведение (6) сходится равномерно в p-круге $\|z\|<r$. В силу произвольности r это означает, что $F(z)$ является p-целой функцией. Теорема доказана.

Оценка порядка канонического произведения

Формулы (7), (8) не дают оценки порядка канонического произведения, так как включают в себя числа $k_0,A_0,\dots,A_{p-1}$, которые сами зависят от r. Налагая дополнительные ограничения на расположение корней, можно получить такую оценку.

Теорема 3. Пусть существуют числа $m,M>0$ такие, что для любых k справедлива оценка $mk^{\alpha}\le|a_k|\le Mk^{\alpha}$.

Тогда каноническое произведение (6) − p-целая функция порядка $\rho\le p+1$.

Доказательство. В условиях теоремы $p=\left[\dfrac{1}{\alpha}\right]$ (целая часть числа $\dfrac{1}{\alpha}$). Оценим k_0.

$$\left\|\frac{z}{a_k}\right\|\le\frac{r}{mk^{\alpha}}<\frac{1}{2},$$

отсюда находим, что $k>\left(\dfrac{2r}{m}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. Пусть $k_0=\left[\left(\dfrac{2r}{m}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]+1$, тогда

$$2^{k_0}=2^{\left[\left(\frac{2r}{m}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]+1}\le e^{1+\left(\frac{2}{m}\right)^{p+1}r^{p+1}}.$$

$$A_{p-i-1}=\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{\left|a_k\right|^{p-i}}\le\frac{1}{m^{p-i}}\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{k^{\alpha(p-i)}}\le$$

$$\le\frac{1}{m^{p-i}}\left(1+\int_1^{k_0-1}\frac{dx}{x^{\alpha(p-i)}}\right)\le\frac{1}{m^{p-i}(1-\alpha(p-i))}\left(\left(\frac{2}{m}r\right)^{1+i}-\alpha(p-i)\right),$$

где $i=0,...,p-1$. Если $\frac{1}{\alpha}$ – целое, то $p=\frac{1}{\alpha}$

$$\text{и } A_{p-1}\le\frac{1}{m^{\frac{1}{\alpha}-1}}\left(1+\int_1^{k_0-1}\frac{dx}{x}\right)\le\frac{1}{m^{\frac{1}{\alpha}-1}}\left(1+\ln(k_0-1)\right)<\frac{1}{m^{\frac{1}{\alpha}-1}}(1+r).$$

Подставляя эти оценки в (7), получаем, что $F(z)$ является p-целой функцией порядка $\rho\le p+1$. При $p=0$

$$2^{k_0-1}=2^{\left[\left(\frac{2r}{m}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]}\le e^{\left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{1}{\alpha}}r}.$$

Из (8) получаем

$$\left\|F(z)\right\|\le\left(1+2B_0r\right)e^{\left(\left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{1}{\alpha}}+3B_0\right)r},$$

откуда и вытекает, что $F(z)$ является p-целой функцией порядка $\rho\le1$. Теорема доказана.

Заключение. В статье получена оценка роста канонического произведения в p-круге. При дополнительных условиях на последовательность корней дана оценка порядка канонического произведения.

Литература

1. *Яглом, И. М.* Комплексные числа и их применение в геометрии / И. М. Яглом. – Изд. 2-е, стереотипное. – М. : Едиториал УРСС. − 2004. − 192 с.
2. *Довгодилин, В. В.* Сходимость на множестве *p*-комплексных чисел и свойства *p*-комплексных степенных рядов / В. В. Довгодилин. − Весці БДПУ. Серыя 3. – 2020. – № 4. − С. 32–39.
3. *Васильев, И. Л.* О некоторых свойствах *p*-голоморфных и *p*-аналитических функций / И. Л. Васильев, В. В. Довгодилин // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 2.– С. 176−184.
4. *Левин, Б. Я.* Распределение корней целых функций / Б. Я. Левин. − М.: ГИТТЛ − 1956. − 632 с.
5. *Messelmi, F.* Analysis of Dual Functions / F. Messelmi // Annual Review of Chaos Theory, Bifurcations and Dynamical Systems, Vol. 4. − 2013. − P. 37−54.

References

1. *Yaglom, I. M.* Kompleksnye chisla i ih primenenie v geometrii / I. M. Yaglom. – Izd. 2-e, stereotipnoe. – M. : Editorial URSS. − 2004. − 192 c.
2. *Dovgodilin, V. V.* Skhodimost' na mnozhestve *p*-kompleksnyh chisel i svojstva *p*-kompleksnyh stepennyh ryadov / V. V. Dovgodilin. − Vesci BDPU. Seryya 3. – 2020. – № 4. − C. 32–39.
3. *Vasil'ev, I. L.* O nekotoryh svojstvah p-golomorfnyh i *p*-analiticheskih funkcij / I. L. Vasil'ev, V. V. Dovgodilin // Ves. Nac. akad. navuk Belarusi. Ser. fiz.-mat. navuk. – 2021. – T. 57, № 2.– S. 176–184.
4. *Levin, B. Ya.* Raspredelenie kornej celyh funkcij / B. Ya. Levin. − M.: GITTL − 1956. − 632 c.
5. *Messelmi, F.* Analysis of Dual Functions / F. Messelmi // Annual Review of Chaos Theory, Bifurcations and Dynamical Systems, Vol. 4. − 2013. − P. 37−54.