Весці БДПУ. Серыя 3. 2022. № 2. С. 18–23

УДК 517.589

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ РОСТА *h*-ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

В. А. Павловский,
аспирант кафедры теории функций БГУ;
И. Л. Васильев,
кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры теории функций БГУ

Поступила в редакцию 20.05.2022.

UDC 535.589

SOME ESTIMATES OF GROWTH OF *h*-ENTIRE FUNCTIONS

V. Pavlovsky,
Postgraduate Student of the Department of Functions Theory, BSU;
I. Vasiliev,
PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Functions Theory, BSU

Received on 20.05.2022.

В представленной работе рассматриваются целые функции *h*-комплексного переменного и их свойства. Дается определение *h*-целой функции, доказывается аналог теоремы Вейерштрасса о существовании *h*-целой функции с заданными нулями. Выводятся оценки порядка канонического произведения на множестве *h*-комплексных чисел.

Ключевые слова: кольцо *h*-комплексных чисел, *h*-целая функция, делители нуля, порядок *h*-целой функции, рост *h*-целой функции, каноническое произведение на множестве *h*-комплексных чисел.

The present work considers entire functions of *h*-complex variable and their properties. It gives a definition of Weierstrass theorem about existence of *h*-entire function with specified zeros. It presents the estimates of order of canonic products on the set of *h*-complex numbers.

Keywords: ring of *h*-complex numbers, *h*-entire function, zero-divisors, order of *h*-entire function, growth of *h*-entire function, canonic product on the set of *h*-complex numbers.

Введение. Интерес к исследованию свойств функций *h*-комплексного переменного связан с возможным применением к задачам физики и геометрии. В настоящее время теория таких функций имеет ряд нерешенных вопросов. В научной литературе имеются лишь краткие сведения о функциях *h*-комплексного переменного с учетом их прикладного значения. Тем самым изучение свойств *h*-целых функций и построение элементов соответствующей теории является актуальным.

1. Определение и простейшие свойства h-целых функций. Обозначим через $\mathbb{C}_h$ кольцо *h*-комплексных (двойных) чисел [1–3] вида $z = x + jy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, $j^2 = 1$, $j \neq \pm 1$, с нормой $\|z\| = |x| + |y|$. Кольцо $\mathbb{C}_h$ обладает делителями нуля, каковыми являются числа вида $z = t \pm jt$, $t \in \mathbb{R}$.

Определение 1. Функция $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ называется *h*-целой, если $u(x,y)$ и $v(x,y)$ бесконечно дифференцируемы в $\mathbb{R}^2$ и верны равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

Очевидно, что сумма и произведение конечного числа *h*-целых функций снова будет *h*-целой функцией.

Из равенств (1) вытекает, что для *h*-целой функции $f(z)$ во всех точках $z \in \mathbb{C}_h$ верно представление [2]

$$f(z) = \frac{1+j}{2} f(x+y) + \frac{1-j}{2} f(x-y). \tag{2}$$

Из (2) следует, что все производные h-целой функции также являются h-целыми функциями и

$$f^{(k)}(z) = \frac{1+j}{2} f^{(k)}(x+y) + \frac{1-j}{2} f^{(k)}(x-y), \quad k = 0,1,2,\dots$$

Точка $z = \infty$ является единственной изолированной особой точкой h-целой функции. Из (2) легко выводится следующая теорема.

Теорема 1. Пусть функция $f(z)$ h-целая. Если существует $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = d \in \mathbb{C}_h$, то $f(z) \equiv d$ в $\mathbb{C}_h$.

Из формулы (2) также следует, что если бесконечно дифференцируемая функция $f(x)$ ограничена на вещественной оси, то h-целая функция $f(z)$, определяемая равенством (2), ограничена всюду в $\mathbb{C}_h$. Например, $\forall z \in \mathbb{C}_h$ $\|\sin z\| \le 1$, $\left\|e^{-z^2}\right\| \le 1$. Таким образом, теорема Лиувилля [4] для h-целых функций неверна.

2. Построение h-целой функции с заданными нулями.

Определение 2. Бесконечное произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty} h_k(z)$ сходится на множестве $E \subset \mathbb{C}_h$, если лишь конечное число множителей $h_k(z)$ обращается в делитель нуля на E и после вычеркивания этих множителей произведение оказывается сходящимся в каждой точке E. Произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty} h_k(z)$ сходится равномерно внутри E, если оно сходится равномерно на любом компакте $K \subset E$.

Классическая теорема Вейерштрасса [4] непосредственно на h-целые функции не переносится. Налагая на последовательность нулей дополнительные условия, получим следующий аналог этой теоремы.

Теорема 2. Пусть $c_k \in \mathbb{C}_h$ – последовательность такая, что:

1) $0 < \|c_1\| \le \dots \le \|c_k\| \le \|c_{k+1}\| \le \dots$,

2) c_k не является делителем нуля $\forall k$,

3) $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = \infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{c_k} = 0$.

Тогда существует h-целая функция $f(z)$, имеющая нули в точках c_k.

Доказательство. Применим с необходимыми изменениями тот же прием, что используется при доказательстве теоремы Вейерштрасса. Покажем, что бесконечное произведение

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{c_k}\right) e^{\frac{z}{c_k} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{c_k}\right)^2 + \dots + \frac{1}{k}\left(\frac{z}{c_k}\right)^k} \tag{3}$$

сходится равномерно в любом h-круге $\{\|z\| \le r\}$ [5] к h-голоморфной функции [2]. Пусть r зафиксировано, существует k_0 такой, что $\forall k \ge k_0$ выполняется

$$\left\|\frac{z}{c_k}\right\| \le \|z\| \left\|\frac{1}{c_k}\right\| \le r \left\|\frac{1}{c_k}\right\| \le q < \frac{1}{2}.$$

Обозначим $t = \dfrac{z}{c_k}$, $G(t;k) = (1-t)e^{t+\frac{t^2}{2}+\dots+\frac{t^k}{k}}$. Используя свойства показательной и логарифмической функции в $\mathbb{C}_h$, находим

$$\ln G(t;k) = \ln\left((1-t)e^{t+\frac{t^2}{2}+\dots+\frac{t^k}{k}}\right) =$$

$$= -t - \frac{t^2}{2} - \dots - \frac{t^k}{k} - \frac{t^{k+1}}{k+1} - \frac{t^{k+2}}{k+2} - \dots + t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^k}{k} = -\frac{t^{k+1}}{k+1} - \frac{t^{k+2}}{k+2} - \dots \quad \forall k \ge k_0.$$

Отсюда

$$\left\|\ln G(t;k)\right\| \le \frac{\left\|t^{k+1}\right\|}{k+1} + \frac{\left\|t^{k+2}\right\|}{k+2} + \ldots \le \frac{q^{k+1}}{k+1} + \frac{q^{k+2}}{k+2} + \ldots \le q^{k+1} + q^{k+2} + \ldots \le \frac{q^{k+1}}{1-q} .$$

Таким образом, функциональный ряд $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} \ln G\left(\frac{z}{c_k};k\right)$ мажорируется сходящимся рядом $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} \frac{q^{k+1}}{1-q}$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} \ln G\left(\frac{z}{c_k};k\right)$ сходится равномерно в *h*-круге $\left\{\|z\| \le r\right\}$ к некоторой функции $g_{k_0}(z)$. Отсюда делаем вывод, что функция $g_{k_0}(z)$ *h*-голоморфна внутри указанного *h*-круга. Поэтому бесконечное произведение

$$\prod_{k=k_0}^{\infty} G\left(\frac{z}{c_k};k\right) = f_{k_0}(z) = e^{g_{k_0}(z)}$$

сходится в этом *h*-круге к *h*-голоморфной функции, отличной от делителей нуля. Произведение (3) отличается от $f_{k_0}(z)$ множителем $\prod\limits_{k=1}^{k_0-1} G\left(\frac{z}{c_k};k\right)$, который обращается в нуль в точках $c_1, c_2, \ldots, c_{k_0-1}$. В силу произвольности r функция $f(z)$ является *h*-целой и имеет заданные нули. Теорема доказана.

Замечание 1. Пусть кроме c_k функция имеет еще конечное число нулей в точках $z_1, z_2, \ldots, z_N \in \mathbb{C}_h$, где для $i = 1, 2, \ldots, N$ z_i могут быть делителями нуля. Тогда эту функцию можно представить в виде

$$f(z) = F(z) \prod_{i=1}^{N} (z - z_i) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{c_k}\right) e^{\frac{z}{c_k} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{c_k}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{k}\left(\frac{z}{c_k}\right)^k}, \qquad (4)$$

где $F(z)$ – некоторая *h*-целая функция.

Замечание 2. Пусть квадратное уравнение $z^2 + pz + q = 0$ имеет корни $z_1, z_2 = \frac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{D}\right)$, где $D = p^2 - 4q$ – дискриминант. Тогда это уравнение имеет в $\mathbb{C}_h$ еще два корня $z_3, z_4 = \frac{1}{2}\left(-p \pm j\sqrt{D}\right)$, таких, что $(z - z_1)(z - z_2) = (z - z_3)(z - z_4)$. Таким образом, функция $f(z)$ в (3), (4), кроме указанных корней, имеет еще бесконечное число нулей, которые в силу равномерной сходимости бесконечного произведения (3), (4) в любом *h*-круге $\left\{\|z\| \le r\right\}$ порождаются любой парой линейных множителей из (3), (4). При этом представление $f(z)$ в виде бесконечного произведения не единственное.

3. Оценка порядка канонического произведения. Пусть $f(z)$ неограниченная *h*-целая функция. Перенесём на $\mathbb{C}_h$ с соответствующими изменениями некоторые понятия классической теории целых функций [6]. Обозначим через $M_f(r) = \max\limits_{\|z\|=r} f(z)$.

Определение 3. Порядком *h*-целой функции $f(z)$ назовем число

$$\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r} .$$

Типом *h*-целой функции $f(z)$ порядка ρ назовем число

$$\sigma = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M_f(r)}{r^{\rho}} .$$

Например, функция $f(z) = e^{\alpha z^n}$ имеет порядок $\rho = n$ и тип $\sigma = \alpha$.

Определение 4. Первичным множителем назовем функцию

$$G(u;p) = (1-u) e^{u + \frac{1}{2}u^2 + \ldots + \frac{1}{p}u^p}, \quad \text{где } p \in \mathbb{N} .$$

При $p = 0$

$$G(u;0) = 1 - u.$$

Теорема 3. При $p \in \mathbb{N}$ и всех $u \in \mathbb{C}_h$, $u \neq 1$

$$\ln\|G(u;p)\| < A_p \frac{\|u\|^{p+1}}{1+\|u\|}, \quad \text{где } A_p = 3e(2+\ln p). \qquad (5)$$

При $p = 0$

$$\ln\|G(u;0)\| = \ln\|1-u\| \le \ln(1+\|u\|).$$

Доказательство. При $p = 0$ утверждение теоремы очевидно. Пусть $p \in \mathbb{N}$. Если $\|u\| \le \frac{p}{p+1}$, то

$$\|\ln G(u;p)\| = \left\|\ln\left((1-u)e^{u+\frac{1}{2}u^2+\ldots+\frac{1}{p}u^p}\right)\right\| = \left\|\ln(1-u) + u + \frac{1}{2}u^2 + \ldots + \frac{1}{p}u^p\right\| =$$

$$= \left\|-u - \frac{1}{2}u^2 - \ldots - \frac{1}{p}u^p - \frac{1}{p+1}u^{p+1} - \ldots + u + \frac{1}{2}u^2 + \ldots + \frac{1}{p}u^p\right\| \le$$

$$\le \left\|-\frac{1}{p+1}u^{p+1} - \frac{1}{p+2}u^{p+2} - \ldots\right\| \le \frac{1}{p+1}\|u\|^{p+1} + \frac{1}{p+2}\|u\|^{p+2} + \ldots <$$

$$< \frac{1}{p+1}\|u\|^{p+1}\left(1 + \|u\| + \|u\|^2 + \ldots\right) \le \frac{\|u\|^{p+1}}{(p+1)(1-\|u\|)} \le A_p \frac{\|u\|^{p+1}}{1+\|u\|}.$$

Отсюда

$$\|G(u;p)\| = \left\|e^{\ln G(u;p)}\right\| \le e^{\|\ln G(u;p)\|},$$

$$\ln\|G(u;p)\| \le \|\ln G(u;p)\| < A_p \frac{\|u\|^{p+1}}{1+\|u\|}.$$

При $\|u\| > \frac{p}{p+1}$, используя $\ln(1+\|u\|) \le \|u\|$, получим

$$\ln\|G(u;p)\| \le \ln\left\|(1-u)e^{u+\frac{1}{2}u^2+\ldots+\frac{1}{p}u^p}\right\| \le \ln\left(\|1-u\| e^{\left\|u+\frac{1}{2}u^2+\ldots+\frac{1}{p}u^p\right\|}\right) \le$$

$$\le \ln\|1-u\| + \left\|u + \frac{1}{2}u^2 + \ldots + \frac{1}{p}u^p\right\| \le 2\|u\| + \frac{1}{2}\|u\|^2 + \ldots + \frac{1}{p}\|u\|^p =$$

$$= \|u\|^p\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p-1}\frac{1}{\|u\|} + \ldots + \frac{1}{2}\frac{1}{\|u\|^{p-2}} + \frac{2}{\|u\|^{p-1}}\right) \le$$

$$\le \|u\|^p\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p-1}\left(1+\frac{1}{p}\right) + \ldots + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{p-2} + 2\left(1+\frac{1}{p}\right)^{p-1}\right) \le$$

$$\le \|u\|^p\left(1+\frac{1}{p}\right)^p\left(2\frac{p}{p+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{p}{p+1}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p}\left(\frac{p}{p+1}\right)^p\right) <$$

$$< \|u\|^p e\left(2 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p}\right) < \|u\|^p e\left(2 + \int_1^p \frac{dx}{x}\right) = \|u\|^p e(2+\ln p) \le \frac{\|u\|^{p+1}}{1+\|u\|}3e(2+\ln p) = A_p \frac{\|u\|^{p+1}}{1+\|u\|},$$

где $A_p = 3e(2+\ln p)$. Теорема доказана.

Пусть a_n − последовательность вещественных чисел такая, что

$$0 < |a_1| \le \ldots \le |a_n| \le |a_{n+1}| \le \ldots, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Определение 5. Каноническим произведением назовем равномерно сходящееся бесконечное произведение

$$F(z)=\prod_{k=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_k};p\right), \tag{6}$$

где p – наименьшее целое число, при котором сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|a_k|^{p+1}}. \tag{7}$$

Определение 6. Показателем сходимости последовательности a_k назовем число $\rho_1=\inf\lambda$, $\lambda\in\mathbb{N}$, таких, что сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|a_k|^{\lambda}}.$$

Обозначим через $n(r)$ число точек последовательности a_k, лежащих в *h*-круге $\{\|z\|\le r\}$.

Теорема 4. Каноническое произведение (6) всюду в $\mathbb{C}_h$, кроме точек $z=a_k$, удовлетворяет неравенству

$$\ln\|F(z)\|<K_p r^p\left(\int_0^r\frac{n(t)\,dt}{t^{p+1}}+r\int_r^{\infty}\frac{n(t)\,dt}{t^{p+2}}\right), \tag{8}$$

где $r=\|z\|$, $K_p=3e(p+1)(2+\ln p)$ при $p\in\mathbb{N}$, $K_0=1$.

Доказательство. Используя (5), получаем при $p>0$ с помощью интеграла Стилтьеса

$$\ln\|F(z)\|\le\ln\prod_{k=1}^{\infty}\left\|G\left(\frac{z}{a_k};p\right)\right\|=\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left\|G\left(\frac{z}{a_k};p\right)\right\|<$$

$$<A_p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left\|\frac{z}{a_k}\right\|^{p+1}}{1+\left\|\frac{z}{a_k}\right\|}=A_p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^{p+1}}{|a_k|^p\left(|a_k|+r\right)}=A_p r^{p+1}\int_0^{\infty}\frac{d(n(t))}{t^p(t+r)}.$$

Из сходимости ряда (7) вытекает, что $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{n(r)}{r^{p+1}}=0$. Интегрируя по частям, получим

$$\ln\|F(z)\|<A_p r^{p+1}\int_0^{\infty}\frac{d(n(t))}{t^p(t+r)}=A_p r^{p+1}\int_0^{\infty}\frac{pr+(p+1)t}{t^{p+1}(t+r)^2}n(t)\,dt<A_p(p+1)r^{p+1}\int_0^{\infty}\frac{n(t)\,dt}{t^{p+1}(t+r)}\le$$

$$\le A_p(p+1)r^{p+1}\left(\int_0^r\frac{n(t)\,dt}{t^{p+1}r}+\int_r^{\infty}\frac{n(t)\,dt}{t^{p+1}t}\right)=A_p(p+1)r^p\left(\int_0^r\frac{n(t)\,dt}{t^{p+1}}+r\int_r^{\infty}\frac{n(t)\,dt}{t^{p+2}}\right)=$$

$$=K_p r^p\left(\int_0^r\frac{n(t)\,dt}{t^{p+1}}+r\int_r^{\infty}\frac{n(t)\,dt}{t^{p+2}}\right).$$

Пусть $p=0$, используя интеграл Стилтьеса, выводим

$$\ln\|F(z)\|\le\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left\|G\left(\frac{z}{a_k};0\right)\right\|=\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left\|1-\frac{z}{a_k}\right\|\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{\|z\|}{\|a_k\|}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{r}{|a_k|}\right)=\int_0^{\infty}\ln\left(1+\frac{r}{t}\right)d(n(t)).$$

В силу оценки

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{r}{|a_k|}\right)\le r\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|a_k|}<\infty$$

сходится интеграл $\int\limits_0^{\infty}\ln\left(1+\frac{r}{t}\right)\,d\left(n(t)\right)$. Интегрируя по частям, с учетом равенства $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{n(t)}{t}=0$, выводим

$$\ln\|F(z)\|\le\int\limits_0^{\infty}\ln\left(1+\frac{r}{t}\right)\,d\left(n(t)\right)=r\int\limits_0^{\infty}\frac{n(t)\,dt}{t(t+r)}=r\left(\int\limits_0^{r}\frac{n(t)\,dt}{t(t+r)}+\int\limits_r^{\infty}\frac{n(t)\,dt}{t(t+r)}\right)<$$

$$<r\left(\int\limits_0^{r}\frac{n(t)\,dt}{t\cdot r}+\int\limits_r^{\infty}\frac{n(t)\,dt}{t^2}\right)=\int\limits_0^{r}\frac{n(t)\,dt}{t}+r\int\limits_r^{\infty}\frac{n(t)\,dt}{t^2}\;,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 5 (аналог теоремы Бореля). Порядок ρ канонического произведения (6) не превышает показателя сходимости ρ_1 последовательности a_k.

Теорема доказывается с помощью неравенства (8) тем же способом, что и классическая теорема Бореля в теории целых функций [6].

Замечание 3. В отличие от классической теории целых функций, противоположное неравенство $\rho_1\le\rho$ для h-целых функций неверно. Например, для функции $z\sin z=z^2\prod\limits_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$ порядок $\rho=0$, а показатель сходимости $\rho_1=1$.

Литература

1. *Яглом, И. М.* Комплексные числа и их применение в геометрии / И. М. Яглом. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 192 с.
2. *Павловский, В. А.* О свойствах *h*-дифференцируемых функций / В. А. Павловский, И. Л. Васильев // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2021. – № 2. – С. 29–37.
3. *Павловский, В. А.* Алгебраические уравнения с вещественными коэффициентами в кольце *h*-комплексных чисел // Весці БДПУ. Серыя 3. – 2020. – № 4. – С. 25–31.
4. *Шабат, Б. В.* Введение в комплексный анализ: учебное пособие: в 2 ч. Ч. 1: Функции одного переменного / Б. В. Шабат. – М. : Ленанд, 2015. – 572 с.
5. *Васильев, И. Л.* Отображения с помощью *h*-голоморфных функций / И. Л. Васильев, В. А. Павловский // Весці БДПУ. Серыя 3. – 2021. – № 2. – С. 37–43.
6. *Левин, Б. Я.* Распределение корней целых функций / Б. Я. Левин. – М. : Ленанд, 2022. – 632 с.

References

1. *Yaglom, I. M.* Kompleksnye chisla i ih primenenie v geometrii / I. M. Yaglom. – M. : Editorial URSS, 2004. – 192 s.
2. *Pavlovskij, V. A.* O svojstvah h-differenciruemyh funkcij / V. A. Pavlovskij, I. L. Vasil'ev // Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika. – 2021. – № 2. – S. 29–37.
3. *Pavlovskij, V. A.* Algebraicheskie uravneniya s veshchestvennymi koefficientami v kol'ce *h*-kompleksnyh chisel // Vesci BDPU. Seryya 3. – 2020. – № 4. – S. 25–31.
4. *Shabat, B. V.* Vvedenie v kompleksnyj analiz: uchebnoe posobie: v 2 ch. Ch. 1: Funkcii odnogo peremennogo / B. V. Shabat. – M. : Lenand, 2015. – 572 s.
5. *Vasil'ev, I. L.* Otobrazheniya s pomoshch'yu *h*-golomorfnyh funkcij / I. L. Vasil'ev, V. A. Pavlovskij // Vesci BDPU. Seryya 3. – 2021. – № 2. – S. 37–43.
6. *Levin, B. Ya.* Raspredelenie kornej celyh funkcij / B. Ya. Levin. – M. : Lenand, 2022. – 632 c.