

УДК 517.983

UDC 535.343

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР С ОБОБЩЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА В ЯДРЕ

INTEGRAL OPERATOR WITH GENERALIZED FUNCTION OF MITTAG-LEFFLER IN NUCLEUS

Н. В. Князюк,
кандидат физико-математических
наук, доцент кафедры высшей
математики БГУИР

N. Kniaziuk,
PhD in Physics and Mathematics,
Associate Professor of the Department
of Higher Mathematics, BSUIR

Поступила в редакцию 27.04.2022.

Received on 27.04.2022.

В статье рассматривается специальная функция, обобщающая классические функции Миттаг-Леффлера и интегральный оператор, содержащий такую функцию в ядре. Доказываются формулы композиций модифицированных дробных интегралов и производных на полуоси с обобщенной функцией Миттаг-Леффлера. Исследуются свойства интегрального оператора с обобщенной функцией Миттаг-Леффлера в ядре. В частности, доказывается ограниченность оператора в пространстве интегрируемых функций, формулы композиций с модифицированными дробными интегралами и производными.

Ключевые слова: обобщенная функция Миттаг-Леффлера, дробные интегралы и производные, интегральный оператор с обобщенной функцией Миттаг-Леффлера в ядре.

The article considers a special function that generalizes classical functions of Mittag-Leffler and integral operator having such function in its nucleus. It proves the formulas of compositions of modified fraction integrals and derivatives on half-axes with generalized function of Mittag-Leffler. It studies the properties of integral operator with generalized function of Mittag-Leffler in nucleus. In particular, limitation of the operator in the space of integrated functions, formulas of compositions with modified fraction integrals and derivatives are proved.

Keywords: generalized function of Mittag-Leffler, fraction integrals and derivatives, integral operator with generalized function of Mittag-Leffler in nucleus.

Специальные функции

$$E_{\rho}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\rho k + 1)} \quad (\rho \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\rho) > 0) \quad (1)$$

и

$$E_{\rho, \mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\rho k + \mu)} \quad (\rho, \mu, z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\rho) > 0, \operatorname{Re}(\mu) > 0) \quad (2)$$

были введены Г. М. Миттаг-Леффлером (G. M. Mittag-Leffler) в [1] и [2] соответственно и известны как классические функции Миттаг-Леффлера. Основные факты из теории этих функций приведены в справочнике [3, §18.1] и монографиях М. М. Джрбашяна (M. M. Dzherbashyan) [4, гл. 3], [5, гл. 1].

Т. Прабхакар (T. Prabhakar) [6] ввел функцию $E_{\rho, \mu}^{\gamma}(z)$ в виде

$$E_{\rho, \mu}^{\gamma}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k z^k}{\Gamma(\rho k + \mu) k!} \quad (\rho, \mu, \gamma \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\rho) > 0, \operatorname{Re}(\mu) > 0), \quad (3)$$

где $(\gamma)_k$ – символ Похгаммера

$$(\gamma)_0 = 1, (\gamma)_k = \gamma(\gamma + 1)(\gamma + 2) \dots (\gamma + k - 1) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

В частности, при $\gamma = 1$ функция $E_{\rho, \mu}^{\gamma}(z)$ совпадает с функцией (2):

$$E_{\rho, \mu}^1(z) \equiv E_{\rho, \mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\rho k + \mu)} \quad (\rho, \mu \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\rho) > 0, \operatorname{Re}(\mu) > 0),$$

а при $\gamma = \mu = 1$ с функцией (1):

$$E_{\rho,1}^1(z) \equiv E_{\rho}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\rho k + 1)} \quad (\rho \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\rho) > 0).$$

Так как функция $E_{\rho,\mu}^{\gamma}(z)$ обобщает классические функции Миттаг-Леффлера, то она называется обобщенной функцией Миттаг-Леффлера. В [6–10] были исследованы некоторые свойства интегрального оператора

$$(E_{\rho,\mu,\omega;a+}^{\gamma}\varphi)(x) = \int_a^x (x-t)^{\mu-1} E_{\rho,\mu}^{\gamma}(\omega(x-t)^{\rho}) \varphi(t) dt \quad (x > a),$$

где $\rho, \mu, \gamma \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \rho > 0, \operatorname{Re} \mu > 0$, содержащего функцию (3) в ядре.

В [11] рассмотрена специальная функция

$$E_{\rho,\mu}^{\gamma,\delta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k z^k}{\Gamma(\rho k + \mu)(\delta)_k}, \tag{4}$$

где $\rho, \mu, \gamma, \delta \in \mathbb{C}, \min\{\operatorname{Re}(\rho), \operatorname{Re}(\mu), \operatorname{Re}(\delta)\} > 0$, которая является обобщением функций (1)–(3).

В частности, при $\delta = 1$ функция (4) совпадает с функцией (3):

$$E_{\rho,\mu}^{\gamma,1}(z) = E_{\rho,\mu}^{\gamma}(z),$$

а при $\delta = \gamma = 1$ и при $\delta = \gamma = \mu = 1$ с функциями (2) и (1) соответственно:

$$E_{\rho,\mu}^{1,1}(z) = E_{\rho,\mu}(z) \text{ и } E_{\rho,1}^{1,1}(z) = E_{\rho}(z).$$

В [11] установлены некоторые свойства функции (4). В частности, дано представление для $E_{\rho,\mu}^{\gamma,\delta}(z)$ в терминах интеграла Меллина – Барнса, доказаны формулы обычного дифференцирования, получены формулы преобразований Меллина и Лапласа функции (4).

Данная работа посвящена дальнейшему изучению свойств функции $E_{\rho,\mu}^{\gamma,\delta}(z)$ и изучению свойств интегрального оператора

$$(E_{\rho,\mu,\lambda;-}^{\gamma,\delta}\varphi)(x) = \int_x^{\infty} \left(\frac{\tau-x}{\tau x}\right)^{\mu-1} E_{\rho,\mu}^{\gamma,\delta} \left[\lambda \left(\frac{\tau-x}{\tau x}\right)^{\rho} \right] \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau^2} \tag{5}$$

$$(\rho > 0, \mu > 0, \gamma, \delta, \lambda \in \mathbb{R}; x \in (a; +\infty), a > 0),$$

содержащего функцию (4) в ядре. Сначала мы устанавливаем формулы композиций модифицированных дробных интегралов и производных [12]

$$(J_{-}^{\alpha}\psi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} \left(\frac{\tau-x}{\tau x}\right)^{\alpha-1} \frac{\psi(\tau)}{\tau^2} d\tau, \quad x \in (a; +\infty), a > 0; \alpha > 0 \tag{6}$$

и

$$(D_{-}^{\alpha}y)(x) = \left(-x^2 \frac{d}{dx}\right)^n (J_{-}^{n-\alpha}y)(x), \quad x \in (a; +\infty), a > 0; \alpha > 0, n = [\alpha] + 1 \tag{7}$$

с функцией $E_{\rho,\mu}^{\gamma,\delta}(z)$.

В [12], [13] установлены свойства операторов дробного интегрирования J_{-}^{α} и дифференцирования D_{-}^{α} в пространстве интегрируемых функций. В частности, доказано, что модифицированное дробное интегрирование и дифференцирование от степенной функции дают степенную функцию, модифицированное дробное интегрирование обладает полугрупповым свойством.

Лемма 1. [12, лемма 6] Если $\alpha > 0$ и $\beta < 2$, то при $x \in (a; +\infty), a > 0$

$$(J_{-}^{\alpha} \tau^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(2-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta+2)} x^{\beta-\alpha-1} \tag{8}$$

и

$$\left(D_-^\alpha \tau^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(2-\beta)}{\Gamma(2-\alpha-\beta)} x^{\beta+\alpha-1} \quad (9)$$

В частности,

$$\left(D_-^\alpha t^{-\alpha+j}\right)(x) = 0 \quad (j = 1, \dots, n = -[-\alpha]).$$

Лемма 2. [13, лемма 2] Модифицированное дробное интегрирование (6) обладает полугрупповым свойством:

$$J_-^\alpha J_-^\beta f = J_-^{\alpha+\beta} f \quad (\alpha > 0, \beta > 0), \quad (10)$$

имеющим место почти всюду для $f \in \mathfrak{Z}(a; \infty)$.

Далее в работе доказывается ограниченность интегрального оператора $E_{\rho, \mu, \lambda; -}^{\gamma, \delta}$ в пространстве $\mathfrak{Z}(a; \infty)$ измеримых по Лебегу функций на полуоси $(a; \infty)$, $a > 0$ с весом x^{-2} :

$$\mathfrak{Z}(a; \infty) = \left\{ y : \|y\|_{\mathfrak{Z}(a; \infty)} = \int_a^\infty x^{-2} |y(x)| dx < \infty \right\} \quad (a > 0).$$

Также устанавливаются формулы композиций интегрального оператора (5) с операторами модифицированного дробного интегрирования и дифференцирования на полуоси $(a; +\infty)$, определяемыми формулами (6), (7) соответственно.

Сначала исследуем дробное интегрирование (6) и дробное дифференцирование (7) функции $E_{\rho, \mu}^{\gamma, \delta}(z)$.

Теорема 1. Пусть $\rho > 0, \mu > 0, \alpha > 0, \gamma, \delta, \lambda \in \mathbb{R}; x \in (a; +\infty), a > 0$.

Тогда верны следующие равенства

$$\left(J_-^\alpha \left[\tau^{1-\mu} E_{\rho, \mu}^{\gamma, \delta}(\lambda \tau^{-\rho}) \right]\right)(x) = x^{1-\mu-\alpha} E_{\rho, \mu+\alpha}^{\gamma, \delta}(\lambda x^{-\rho}) \quad (11)$$

и

$$\left(D_-^\alpha \left[\tau^{1-\mu} E_{\rho, \mu}^{\gamma, \delta}(\lambda \tau^{-\rho}) \right]\right)(x) = x^{1-\mu+\alpha} E_{\rho, \mu-\alpha}^{\gamma, \delta}(\lambda x^{-\rho}). \quad (12)$$

Доказательство. Используя (4) и (6) и осуществляя почленное интегрирование, что возможно в силу равномерной сходимости ряда (4), получим

$$\left(J_-^\alpha \left[\tau^{1-\mu} E_{\rho, \mu}^{\gamma, \delta}(\lambda \tau^{-\rho}) \right]\right)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k \lambda^k}{\Gamma(\rho k + \mu)(\delta)_k} \left(J_-^\alpha \tau^{-\rho k - \mu + 1}\right)(x).$$

К полученному выражению применим формулу (8), где $\beta = -\rho k - \mu + 2$.

Имеем

$$\begin{aligned} & \left(J_-^\alpha \left[\tau^{1-\mu} E_{\rho, \mu}^{\gamma, \delta}(\lambda \tau^{-\rho}) \right]\right)(x) = \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k \lambda^k}{\Gamma(\rho k + \mu)(\delta)_k} \frac{\Gamma(2 + \rho k + \mu - 2)}{\Gamma(\alpha + \rho k + \mu - 2 + 2)} x^{-\rho k - \mu + 2 - \alpha + 1} = \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k \lambda^k}{\Gamma(\rho k + \mu + \alpha)(\delta)_k} x^{1 - \rho k - \mu - \alpha} = x^{1 - \mu - \alpha} E_{\rho, \mu + \alpha}^{\gamma, \delta}(\lambda x^{-\rho}). \end{aligned}$$

Формула (11) доказана.

Докажем (12). Применяя (4), (7), (8) и осуществляя почленное дифференцирование, что возможно в силу равномерной сходимости ряда (4), а также учитывая формулу $(D_-^n y)(x) = \left(-x^2 \frac{d}{dx}\right)^n y(x)$ ($n \in \mathbb{N}$) и используя (9) с $\alpha = n$ и $\beta = -\rho k - \mu + \alpha - n + 2$, получим

$$\begin{aligned} (D_-^\alpha [\tau^{1-\mu} E_{\rho,\mu}^{\gamma,\delta}(\lambda \tau^{-\rho})])(x) &= \left(-x^2 \frac{d}{dx}\right)^n (J_-^{n-\alpha} [\tau^{1-\mu} E_{\rho,\mu}^{\gamma,\delta}(\lambda \tau^{-\rho})])(x) = \\ &= \left(-x^2 \frac{d}{dx}\right)^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k \lambda^k}{\Gamma(\rho k + \mu)(\delta)_k} (J_-^{n-\alpha} \tau^{-\rho k - \mu + 1})(x)\right) = \\ &= \left(-x^2 \frac{d}{dx}\right)^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k \lambda^k}{\Gamma(\rho k + \mu + \alpha)(\delta)_k} \frac{\Gamma(2 + \rho k + \mu - 2)}{\Gamma(n - \alpha + \rho k + \mu - 2 + 2)} x^{-\rho k - \mu + 2 - n + \alpha - 1}\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k \lambda^k}{\Gamma(\rho k + \mu - \alpha + n)(\delta)_k} \left(-x^2 \frac{d}{dx}\right)^n x^{-\rho k - \mu + \alpha - n + 1} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k \lambda^k}{\Gamma(\rho k + \mu - \alpha)(\delta)_k} x^{-\rho k - \mu + \alpha + 1} = x^{1-\mu+\alpha} E_{\rho,\mu-\alpha}^{\gamma,\delta}(\lambda x^{-\rho}), \end{aligned}$$

что и доказывает формулу (12). Теорема доказана.

Непосредственно доказывается следующее утверждение.

Теорема 2. Если $\rho > 0, \mu > 0, \gamma, \delta, \lambda \in \mathbb{R}$, то оператор $E_{\rho,\mu,\lambda;-}^{\gamma,\delta}$ ограничен в пространстве $\mathfrak{Z}(a; \infty)$ и

$$\|E_{\rho,\mu,\lambda;-}^{\gamma,\delta} \psi\|_{\mathfrak{Z}(a; \infty)} \leq A \cdot \|\psi\|_{\mathfrak{Z}(a; \infty)},$$

где

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\gamma|_k \cdot |\lambda|^k}{\Gamma(\rho k + \mu + 1) \cdot a^{\rho k + \mu} \cdot |(\delta)_k|}.$$

Следующая теорема обобщает формулу (8).

Теорема 3. Пусть $\rho > 0, \mu > 0, \beta < 2, \gamma, \delta, \lambda \in \mathbb{R}; x \in (a; +\infty), a > 0$.

Тогда имеет место равенство

$$(E_{\rho,\mu,\lambda;-}^{\gamma,\delta} \tau^{\beta-1})(x) = \Gamma(2 - \beta) x^{\beta-\mu-1} E_{\rho,\mu-\beta+2}^{\gamma,\delta}(\lambda x^{-\rho}) \quad (13)$$

Доказательство. Используя (5) и (4), запишем левую часть (13) следующим образом

$$\begin{aligned} (E_{\rho,\mu,\lambda;-}^{\gamma,\delta} \tau^{\beta-1})(x) &= \int_x^\infty \left(\frac{\tau-x}{\tau x}\right)^{\mu-1} E_{\rho,\mu}^{\gamma,\delta} \left[\lambda \left(\frac{\tau-x}{\tau x}\right)^\rho \right] \frac{\tau^{\beta-1} d\tau}{\tau^2} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k \lambda^k}{\Gamma(\rho k + \mu)(\delta)_k} \int_x^\infty \left(\frac{\tau-x}{\tau x}\right)^{\mu+\rho k-1} \frac{\tau^{\beta-1} d\tau}{\tau^2}. \end{aligned}$$

Перестановка интегрирования и суммирования возможна в силу равномерной сходимости ряда. Согласно (6) и (8), получим

$$\begin{aligned} (E_{\rho,\mu,\lambda;-}^{\gamma,\delta} \tau^{\beta-1})(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k \lambda^k}{(\delta)_k} (J_-^{\rho k + \mu} \tau^{\beta-1})(x) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k \lambda^k}{(\delta)_k} \frac{\Gamma(2 - \beta)}{\Gamma(\rho k + \mu - \beta + 2)} x^{\beta - \rho k - \mu - 1} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Gamma(2-\beta) x^{\beta-\mu-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k \lambda^k}{(\delta)_k} \frac{x^{-\rho k}}{\Gamma(\rho k + \mu - \beta + 2)} = \\
&= \Gamma(2-\beta) x^{\beta-\mu-1} E_{\rho, \mu-\beta+2}^{\gamma, \delta}(\lambda x^{-\rho}),
\end{aligned}$$

что и доказывает равенство (13). Теорема доказана.

Теперь рассмотрим композицию модифицированного дробного интегрального оператора J_-^α с интегральным оператором $E_{\rho, \mu, \lambda; -}^{\gamma, \delta}$, содержащим обобщенную функцию Миттаг-Лэффлера (4) в ядре. Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Пусть $\alpha > 0, \rho > 0, \mu > 0, \gamma, \delta, \lambda \in \mathbb{R}$. Тогда имеют место равенства

$$J_-^\alpha E_{\rho, \mu, \lambda; -}^{\gamma, \delta} \psi = E_{\rho, \mu+\alpha, \lambda; -}^{\gamma, \delta} \psi = E_{\rho, \mu, \lambda; -}^{\gamma, \delta} J_-^\alpha \psi \quad (14)$$

для функций $\psi \in \mathfrak{Z}(\mathbf{a}; +\infty)$.

Доказательство. Согласно определениям оператора $E_{\rho, \mu, \lambda; -}^{\gamma, \delta}$ (5) и модифицированного дробного интеграла J_-^α (6), учитывая теорему 2 и равенство (10), получим для $\psi \in \mathfrak{Z}(\mathbf{a}; +\infty)$

$$\begin{aligned}
(J_-^\alpha E_{\rho, \mu, \lambda; -}^{\gamma, \delta} \psi)(x) &= \left(J_-^\alpha \left(\int_x^\infty \left(\frac{\tau-x}{\tau x} \right)^{\mu-1} E_{\rho, \mu}^{\gamma, \delta} \left[\lambda \left(\frac{\tau-x}{\tau x} \right)^\rho \right] \frac{\psi(\tau) d\tau}{\tau^2} \right) \right)(x) = \\
&= \left(J_-^\alpha \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k \lambda^k}{\Gamma(\rho k + \mu) (\delta)_k} \int_x^\infty \left(\frac{\tau-x}{\tau x} \right)^{\mu+\rho k-1} \frac{\psi(\tau) d\tau}{\tau^2} \right) \right)(x) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k \lambda^k}{(\delta)_k} (J_-^\alpha J_-^{\mu+\rho k} \psi)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k \lambda^k}{(\delta)_k} (J_-^{\alpha+\mu+\rho k} \psi)(x) = \\
&= \int_x^\infty \left(\frac{\tau-x}{\tau x} \right)^{\alpha+\mu-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k \lambda^k}{\Gamma(\rho k + \mu + \alpha) (\delta)_k} \left(\frac{\tau-x}{\tau x} \right)^{\rho k} \frac{\psi(\tau) d\tau}{\tau^2} = \\
&= (E_{\rho, \mu+\alpha, \lambda; -}^{\gamma, \delta} \psi)(x).
\end{aligned}$$

Перестановка интегрирования и суммирования возможна в силу равномерной сходимости ряда. Аналогично доказывается второе равенство в (14). Теорема доказана.

Равенства (14) отражают свойство коммутативности модифицированного дробного интеграла J_-^α и интегрального оператора $E_{\rho, \mu, \lambda; -}^{\gamma, \delta}$.

Следующая теорема содержит формулу композиции модифицированного дробного дифференциального оператора (7) и интегрального оператора (5).

Теорема 5. Пусть $\alpha > 0, \rho > 0, \mu > 0, \gamma, \delta, \lambda \in \mathbb{R}$. Тогда равенство

$$D_-^\alpha E_{\rho, \mu, \lambda; -}^{\gamma, \delta} \psi = E_{\rho, \mu-\alpha, \lambda; -}^{\gamma, \delta} \psi$$

верно для функций $\psi \in \mathfrak{Z}(\mathbf{a}; +\infty)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mittag-Leffler, G. M. Sur la nouvelle function $E_\alpha(x)$ / G. M. Mittag-Leffler // C. R. Acad. Sci. – 1903. – Vol. 137. – P. 554–558.
2. Mittag-Leffler, G. M. Sur la representation analytique d'une fonction monogene / G. M. Mittag-Leffler // Acta Math. – 1905. – Vol. 29. – P. 101–181.

REFERENCES

1. Mittag-Leffler, G. M. Sur la nouvelle function $E_\alpha(x)$ / G. M. Mittag-Leffler // C. R. Acad. Sci. – 1903. – Vol. 137. – P. 554–558.
2. Mittag-Leffler, G. M. Sur la representation analytique d'une fonction monogene / G. M. Mittag-Leffler // Acta Math. – 1905. – Vol. 29. – P. 101–181.

3. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции : в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1967. – Т. 3: Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Мат'е. – 300 с.
4. Джрбашян, М. М. Интегральные преобразования и представление функций в комплексной области / М. М. Джрбашян. – М. : Наука, 1966. – 671 с.
5. *Djrbashian, M. M.* Harmonic Analysis and Boundary Value Problems in the Complex Domain / M. M. Djrbashian. – Berlin: Birkhauser-Verlag, Basel, 1993. – 480 p.
6. *Prabhakar, T. R.* A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel / T. R. Prabhakar // Yokohama Math. J. – 1971. – Vol. 19. – P. 7–15.
7. *Gorenflo, R.* On generalized Mittag-Leffler type function / R. Gorenflo, A. A. Kilbas, S. V. Rogosin // Integral Transforms and Spec. Funct. – 1998. – Vol. 7, № 3–4. – P. 215–224.
8. *Gorenflo, R.* On Mittag-Leffler in fractional evolution processes / R. Gorenflo, F. Mainardi // J. Comput. Appl. Math. – 2000. – Vol. 118. – P. 283–299.
9. *Kilbas, A. A.* On Mittag-Leffler type function, fractional calculus operators and solutions of integral equations / A. A. Kilbas, M. Saigo // Integral Transforms and Spec. Funct. – 1996. – Vol. 4, № 4. – P. 355–370.
10. *Kilbas, A. A.* Generalized Mittag-Leffler function and generalized fractional calculus operators / A. A. Kilbas, M. Saigo, R. K. Saxena // Integral Transforms and Spec. Funct. – 2004. – Vol. 15, № 1. – P. 31–49.
11. *Salim, T. O.* Some properties relating to the generalized Mittag-Leffler function, / T. O. Salim // Adv. Appl. Math. Anal. – 2009. – Vol. 4. – P. 21–30.
12. Килбас, А. А. Модифицированные дробные интегралы и производные на полуоси и дифференциальные уравнения дробного порядка в пространстве интегрируемых функций / А. А. Килбас, Н. В. Князюк // Труды Ин-та математики / НАН Беларуси, Ин-т математики. – 2007. – Т. 15, № 1. – С. 68–77.
13. Килбас, А. А. О модифицированных дробных интегралах и производных на полуоси / А. А. Килбас, Н. В. Князюк // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики: материалы III междунар. науч. конф., посвящ. 70-летию А. М. Нахусева и 15-летию со дня основания НИИ прикладной математики и автоматизации, Нальчик, 5–9 дек. 2006 г. / НИИ ПМА; редкол.: А. В. Псху [и др.]. – Нальчик, 2006. – С. 155–159.
3. *Bejtmn, G.* Vysshie transcendentnye funkicii : v 3 t. / G. Bejtmn, A. Erdeji. – M.: Nauka, 1967. – T. 3: Ellipticheskie i avtomorfnye funkicii. Funkcii Lame i Mat'e. – 300 s.
4. *Dzhrbashyan, M. M.* Integral'nye preobrazovaniya i predstavlenie funkcij v kompleksnoj oblasti / M. M. Dzhrbashyan. – M. : Nauka, 1966. – 671 s.
5. *Djrbashian, M. M.* Harmonic Analysis and Boundary Value Problems in the Complex Domain / M. M. Djrbashian. – Berlin: Birkhauser-Verlag, Basel, 1993. – 480 p.
6. *Prabhakar, T. R.* A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel / T. R. Prabhakar // Yokohama Math. J. – 1971. – Vol. 19. – P. 7–15.
7. *Gorenflo, R.* On generalized Mittag-Leffler type function / R. Gorenflo, A. A. Kilbas, S. V. Rogosin // Integral Transforms and Spec. Funct. – 1998. – Vol. 7, № 3–4. – P. 215–224.
8. *Gorenflo, R.* On Mittag-Leffler in fractional evolution processes / R. Gorenflo, F. Mainardi // J. Comput. Appl. Math. – 2000. – Vol. 118. – P. 283–299.
9. *Kilbas, A. A.* On Mittag-Leffler type function, fractional calculus operators and solutions of integral equations / A. A. Kilbas, M. Saigo // Integral Transforms and Spec. Funct. – 1996. – Vol. 4, № 4. – P. 355–370.
10. *Kilbas, A. A.* Generalized Mittag-Leffler function and generalized fractional calculus operators / A. A. Kilbas, M. Saigo, R. K. Saxena // Integral Transforms and Spec. Funct. – 2004. – Vol. 15, № 1. – P. 31–49.
11. *Salim, T. O.* Some properties relating to the generalized Mittag-Leffler function, / T. O. Salim // Adv. Appl. Math. Anal. – 2009. – Vol. 4. – P. 21–30.
12. *Kilbas, A. A.* Modificirovannye drobnye integraly i proizvodnye na poluosi i differencial'nye uravneniya drobnogo porjadka v prostranstve integriruemyh funkcij / A. A. Kilbas, N. V. Knyazyuk // Trudy In-ta matematiki / NAN Belarusi, In-t matematiki. – 2007. – T. 15, № 1. – S. 68–77.
13. *Kilbas, A. A.* O modificirovannyh drobnyh integralah i proizvodnyh na poluosi / A. A. Kilbas, N. V. Knyazyuk // Nelokal'nye kraevye zadachi i rodstvennye problemy matematicheskoy biologii, informatiki i fiziki: materialy III mezhdunar. nauch. konf., posvyashch. 70-letiyu A. M. Nahusheva i 15-letiyu so dnya osnovaniya NII prikladnoj matematiki i avtomatizacii, Nal'chik, 5–9 dek. 2006 g. / NII PMA; redkol.: A. V. Pskhu [i dr.]. – Nal'chik, 2006. – S. 155–159.