МАТЭМАТЫКА

Весці БДПУ. Серыя 3. 2021. № 4. С. 17–20

УДК 517.5

UDC 517.5

АБ КВАТЭРНІЁННЫХ F-МАНАГЕННЫХ ФУНКЦЫЯХ

ABOUT QUATERNIONIC F-MONOGENIC FUNCTIONS

У. А. Шылінец,
кандыдат фізіка-матэматычных навук,
прафесар кафедры бізнес-аналізу
і матэматычнага мадэлявання
УА ФПБ «Міжнародны ўніверсітэт “МІТСО”»;

І. М. Гуло,
кандыдат фізіка-матэматычных навук,
загадчык кафедры матэматыкі і методыкі
выкладання матэматыкі Беларускага
дзяржаўнага педагагічнага
ўніверсітэта імя Максіма Танка

V. Shilinets,
PhD in Physics and Mathematics, Professor
of the Department of Business-Analysis
and Mathematic Modeling, EI FTUB
“International University “MITSO”;

I. Gulo,
PhD in Physics and Mathematics,
Head of the Department of Mathematics
and Methods of Teaching Mathematics,
Belarusian State Pedagogical University
named after Maxim Tank

Паступіла ў рэдакцыю 27.10.21.

Received on 27.10.21.

Высветлена структура F-манагенных кватэрніённых функцый чатырох рэчаісных зменных, атрымана інтэгральнае выяўленне для гэтых кватэрніённых функцый і рэшана краявая задача.

Ключавыя словы: манагеннасць у сэнсе У. С. Фёдарава, кватэрніённыя функцыі, краявая задача, інтэгральнае выяўленне.

The article reveals the structure of F-monogenic quaternionic functions of four real variables, obtains the integral revelation for these quaternionic functions and solves the area problem.

Keywords: monogeneity in the sense of U. Fyodorov, quaternionic functions, area problem, integral revelation.

Уводзіны. У. А. Гусеў у працы [1] вывучаў кватэрніённыя манагенныя ў сэнсе У. С. Фёдарава (F-манагенныя) функцыі [2] на плоскасці. У працах [3–5] даследаваліся F-манагенныя кватэрніённыя функцыі трох і чатырох рэчаісных зменных адпаведна. У дадзеным артыкуле даследуюцца F-манагенныя кватэрніённыя функцыі чатырох рэчаісных зменных, адрозныя ад раней разгледжаных.

Асноўная частка. Нам спатрэбяцца наступныя азначэнні.

Азначэнне 1. Кватэрніённай функцыяй, зададзенай у абсягу $D \subset R^4$, называецца функцыя выгляду

$$f(x,y,z,t) = f^0 + if^1 + jf^2 + kf^3, \tag{1}$$

дзе рэчаісныя функцыі $f^n = f^n(x,y,z,t)$ (n – індэкс, $n = 0,1,2,3$), зададзеныя ў абсягу D. Тут $1, i, j, k$ – базіс алгебры кватэрніёнаў.

Далей мяркуем, што $f \in C^2(D)$, гэта значыць $f^n \in C^2(D)$.

Азначэнне 2. Кватэрніённая функцыя f называецца F-манагеннай па функцыі $p = x + \varepsilon(y+z+t)$ ($\varepsilon = i\lambda_1 + j\lambda_2 + k\lambda_3$, $\lambda_n (n = 1,2,3)$ – рэчаісныя лікі, $\sum_{n=1}^{3} \lambda_n^2 = \frac{1}{3}$) у абсягу $D \subset R^4$ [1–2], калі існуе такая функцыя $\phi = \phi(x,y,z,t)$, што ў кожным пункце абсягу D для частковых вытворных выконваюцца ўмовы

$$f_x = p_x \phi,\ f_y = p_y \phi,\ f_z = p_z \phi,\ f_t = p_t \phi, \tag{2}$$

$$f_x = \frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial x} = \frac{\partial f^0(x,y,z,t)}{\partial x} + i\frac{\partial f^1(x,y,z,t)}{\partial x} + j\frac{\partial f^2(x,y,z,t)}{\partial x} + k\frac{\partial f^3(x,y,z,t)}{\partial x} \quad \text{і г. д.}$$

Функцыя $p = x + \varepsilon(y+z+t)$ пры ўмове $\sum_{n=1}^{3}\lambda_n^2 = \frac{1}{3}$ задавальняе ўмовам Фёдарава [6]:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \ \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2 = 0. \quad (3)$$

Для кватэрніённых функцый, F-манагенных па функцыі $p = x + \varepsilon(y+z+t)$ можна пабудаваць інтэгральнае выяўленне [6].

Высветлім папярэдне структуру кватэрніённых функцый, F-манагенных па функцыі p у абсягу $D \subset R^4$.

Відавочна, што ўмовы F-манагеннасці (2) функцыі $f(x,y,z,t) = f^0 + if^1 + jf^2 + kf^3$ па функцыі $p = x + \varepsilon(y+z+t)$ раўназначныя наступным умовам:

$$p_y f_x = p_x f_y, \ p_z f_x = p_x f_z, \ p_t f_x = p_x f_t, \ p_z f_y = p_y f_z, \ p_y f_t = p_t f_y, \ p_z f_t = p_t f_z.$$

Для даследавання кватэрніённай функцыі $f(x,y,z,t) = f^0 + if^1 + jf^2 + kf^3$, F-манагеннай па функцыі p, мяркуем [1]:

$$f^0 = F^0, \ f^1 = \lambda_1 F^1 + \mu_1 F^2 + \nu_1 F^3,$$

$$f^2 = \lambda_2 F^1 + \mu_2 F^2 + \nu_2 F^3, \ f^3 = \lambda_3 F^1 + \mu_3 F^2 + \nu_3 F^3,$$

дзе λ_k, μ_k, ν_k – такія рэчаісныя лікі, што

$$\sum_{k=1}^{3}\lambda_k^2 = \sum_{k=1}^{3}\mu_k^2 = \sum_{k=1}^{3}\nu_k^2 = \frac{1}{3}, \ \sum_{k=1}^{3}\lambda_k\mu_k = \sum_{k=1}^{3}\lambda_k\nu_k = \sum_{k=1}^{3}\mu_k\nu_k = 0.$$

Тады

$$f = F^0 + \varepsilon_1 F^1 + \varepsilon_2 F^2 + \varepsilon_3 F^3, \quad (4)$$

дзе $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = i\mu_1 + j\mu_2 + k\mu_3$, $\varepsilon_3 = i\nu_1 + j\nu_2 + k\nu_3$, $n = 0,1,2,3$ – індэксы, прычым, відавочна, маем

$$\varepsilon_n^2 = -\frac{1}{3}, \ n = 1,2,3, \ \varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_3, \ \varepsilon_2\varepsilon_3 = \varepsilon_1,$$

$$\varepsilon_3\varepsilon_1 = \varepsilon_2, \ \varepsilon_2\varepsilon_1 = -\varepsilon_3, \ \varepsilon_1\varepsilon_3 = -\varepsilon_2, \ \varepsilon_3\varepsilon_2 = -\varepsilon_1.$$

Калі падставіць функцыю f з роўнасці (4) ва ўмову манагеннасці $p_y f_x = p_x f_y$ і ўлічыць, што $p_y = \varepsilon = \varepsilon_1$, $p_x = 1$, то атрымаем, што функцыі F^m ($m = 0,1,2,3$) задавальняюць наступнай сістэме раўнанняў:

$$-\frac{1}{3}F_x^1 = F_y^0, \ F_x^0 = F_y^1, \ F_x^2 = F_y^3, \ F_y^2 = -F_x^3.$$

Адсюль вынікае, што функцыі F^2, F^3 – гарманічныя функцыі па зменных x, y, а функцыі F^0 і F^1 задавальняюць сістэме дыферэнцыяльных раўнанняў

$$-\frac{1}{3}\frac{\partial^2 F^1}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F^0}{\partial y \partial x},\ \frac{\partial^2 F^0}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 F^1}{\partial y^2},$$

з якой атрымліваем

$$-\frac{1}{3}\frac{\partial^2 F^1}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F^1}{\partial y^2}.$$

З умовы манагеннасці $p_z f_x = p_x f_z$, калі разважаць аналагічным чынам, атрымліваем, што F^2, F^3 – гарманічныя функцыі па зменных x, z, а функцыі F^0 і F^1 задавальняюць сістэме дыферэнцыяльных раўнанняў

$$-\frac{1}{3}\frac{\partial^2 F^1}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F^0}{\partial z \partial x},\ \frac{\partial^2 F^0}{\partial x \partial z}=\frac{\partial^2 F^1}{\partial z^2},$$

з якой вынікае

$$-\frac{1}{3}\frac{\partial^2 F^1}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F^1}{\partial z^2}.$$

Аналагічным чынам з умовы манагеннасці $p_t f_x = p_x f_t$ атрымліваем, што F^2, F^3 – гарманічныя функцыі па зменных x, t, а функцыі F^0 і F^1 задавальняюць дыферэнцыяльнаму раўнанню

$$-\frac{1}{3}\frac{\partial^2 F^1}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F^1}{\partial t^2}.$$

З умовы манагеннасці $p_z f_y = p_y f_z$ атрымліваем, што $f_z = f_y$, адкуль

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z},\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

гэта значыць

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \tag{5}$$

Паколькі $f = F^0 + \varepsilon_1 F^1 + \varepsilon_2 F^2 + \varepsilon_3 F^3$, то ўсе функцыі F^m $(m = 0,1,2,3)$ па зменных y, z задавальняюць хвалеваму раўнанню (5).

Аналагічным чынам можна даказаць, што функцыі F^m $(m = 0,1,2,3)$ па зменных y, t і z, t задавальняюць хвалевым раўнанням

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \text{ і } \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Як вядома з працы [6], пры выкананні ўмоў Фёдарава (3) для любой функцыі f, F-манагеннай па функцыі $p = x + \varepsilon(y + z + t)$ у абсягу D, і для любой замкнутай паверхні ∂G – граніцы абсягу $G \subset D$ мае месца наступнае інтэгральнае выяўленне:

$$f(M)=\frac{1}{w_n p_1(M)}\int_{\partial G}\sum_{j=1}^{n}\{\alpha_j(p_j\phi^1 + p_1\phi^j) - \alpha_1 p_j \phi^j\} f dS, \tag{6}$$

дзе $w_n = \dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$; $n = 4$; $M(x, y, z, t) \in G$, $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$, $t = x_4$; пад знакам паверхневага інтэграла $f=f(\tau)$, $\tau=(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4)\in\partial G$; $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ – кіроўныя косінусы вонкавай нармалі да ∂G; $p_j=\dfrac{\partial p(\tau)}{\partial\tau_j}$; $\phi^j=\dfrac{\tau_j-x_j}{r^4}$ $(j=1,2,3,4)$;

$$r=\sqrt{(\tau_1-x_1)^2+(\tau_2-x_2)^2+(\tau_3-x_3)^2+(\tau_4-x_4)^2}.$$

Пры гэтым мяркуецца, што паверхня ∂G задавальняе ўмовам, пры якіх мае месца формула Астраградскага.

Атрымалі наступную тэарэму.

Тэарэма. Для любой кватэрніённай функцыі выгляду (1), F-манагеннай па функцыі $p=x+\varepsilon(y+z+t)$ у абсягу $D\subset R^4$ $(\varepsilon=i\lambda_1+j\lambda_2+k\lambda_3$, $\lambda_n(n=1,2,3)$ – рэчаісныя лікі, $\sum\limits_{n=1}^{3}\lambda_n^2=\dfrac{1}{3}$), мае месца інтэгральнае выяўленне (6).

Заўвага. Тэарэма (формула (6)) дае магчымасць рашыць наступную краявую задачу.

Задача. Знайсці значэнне кватэрніённай функцыі $f(x,y,z,t)=f^0+if^1+jf^2+kf^3$ унутры замкнутай паверхні ∂G (∂G – граніца абсягу $G\subset D$) па яе значэннях на паверхні ∂G, калі функцыя f з'яўляецца F-манагеннай па функцыі $p=x+\varepsilon(y+z+t)$, $\varepsilon=i\lambda_1+j\lambda_2+k\lambda_3$, $\sum\limits_{n=1}^{3}\lambda_n^2=\dfrac{1}{3}$, а паверхня ∂G задавальняе ўмовам, пры якіх магчыма скарыстаць формулу Астраградскага.

Заключэнне. Паколькі $\sum\limits_{n=1}^{3}\lambda_n^2=\dfrac{1}{3}$, то функцыя $p=x+\varepsilon(y+z+t)$ задавальняе ўмовам Фёдарава (3), а тады на падставе тэарэмы мае месца інтэгральнае выяўленне (6), якое і рашае сфармуляваную задачу.

Літаратура

1. *Гусев, В. А.* О кватернионных функциях, моногенных в смысле В. С. Фёдорова / В. А. Гусев // Успехи математических наук. – 1965. – Т. 20. – Вып. 1(121). – С. 203–208.
2. *Фёдоров, В. С.* Основные свойства обощенных моногенных функций / В. С. Фёдоров // Известия вузов. Математика. – 1958.– № 6.– С. 257–265.
3. *Стэльмашук, М. Т.* Аб інтэгральным выяўленні кватэрніённых F-манагенных функцый аднаго класа / М. Т. Стэльмашук, У. А. Шылінец // Весці БДПУ. Сер. 3.– 2005.– № 2.– С. 8–10.
4. *Стэльмашук, М. Т.* Рашэнне краявой задачы для кватэрніённых функцый чатырох рэчаісных зменных / М. Т. Стэльмашук, У. А. Шылінец, Г. Ф. Падабед // Весці БДПУ. Сер. 3.– 2006.– № 1.– С. 12–14.
5. *Стэльмашук, М. Т.* Аб кватэрніённых манагенных у сэнсе У. С. Фёдарава функцыях / М. Т. Стэльмашук, У. А. Шылінец, Г. А. Андрэева // Весці БДПУ. Сер. 3.– 2010. – № 1.– С. 11–13.
6. *Фёдоров, В. С.* Об одном обобщении интеграла типа Коши в многомерном пространстве / В. С. Фёдоров // Известия вузов. Математика. – 1957. – № 1. – С. 227–233.

References

1. *Gusev, V. A.* O kvaternionnyh funkciyah, monogennyh v smysle V. S. Fyodorova / V. A. Gusev // Uspekhi matematicheskih nauk. – 1965. – T. 20. – Vyp. 1(121). – S. 203–208.
2. *Fyodorov, V. S.* Osnovnye svojstva oboshchennyh monogennyh funkcij / V. S. Fyodorov // Izvestiya vuzov. Matematika. – 1958.– № 6.– S. 257–265.
3. *Stel'mashuk, M. T.* Ab integral'nym vyyaulenni kvaterniyonnyh F-managennyh funkcyj adnago klasa / M. T. Stel'mashuk, U. A. Shylinec // Vesci BDPU. Ser. 3.– 2005.– № 2.– S. 8–10.
4. *Stel'mashuk, M. T.* Rashenne krayavoj zadachy dlya kvaterniyonnyh funkcyj chatyroh rechaisnyh zmennyh / M. T. Stel'mashuk, U. A. Shylinec, G. F. Padabed // Vesci BDPU. Ser. 3.– 2006.– № 1.– S. 12–14.
5. *Stel'mashuk, M. T.* Ab kvaterniyonnyh managennyh u sense U. S. Fyodarava funkcyyah / M. T. Stel'mashuk, U. A. Shylinec, G. A. Andreeva // Vesci BDPU. Ser. 3.– 2010. – № 1.– S. 11–13.
6. *Fyodorov, V. S.* Ob odnom obobshchenii integrala tipa Koshi v mnogomernom prostranstve / V. S. Fyodorov // Izvestiya vuzov. Matematika. – 1957. – № 1. – S. 227–233.