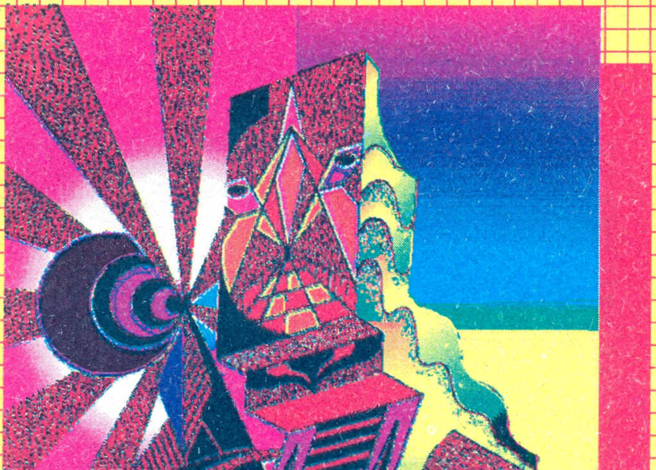
ФОКУС

2'95

ФІЗІКА, МАТЭМАТЫКА, ІНФАРМАТЫКА І НЕ ТОЛЬКІ
ДЛЯ ВУНДЭРКІНДАЎ І НЕ ТОЛЬКІ



ДВОЙСТВЕННОСТЬ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Наверное, в жизни читателя были минуты восхищения красивыми математическими утверждениями, минуты очарования гармонией, которую несут в себе творчески составленные задачи. Естественно, возникают вопросы: "Каким образом они составляются?", "С чего начинается творчество?". Не ставя цель дать исчерпывающие ответы на эти вопросы (возможно, творчество начинается с первого рисунка, придуманного и выполненного ребенком), попытаемся порассуждать о способах составления задач и, быть может, вместе с читателем сделать несколько шагов на пути к творчеству. При этом будем опираться на некоторый "принцип двойственности", присущий многим процессам, явлениям и понятиям. Но говорят, "лучше один раз увидеть, чем сто раз услышать", поэтому обратимся к конкретным примерам.

Задача 1. Известна высота H равнобедренного треугольника и угол α при основании (рис. 1). Найдите, какую максимальную площадь может иметь прямоугольник, вписанный в треугольник (основание прямоугольника лежит на основании треугольника).

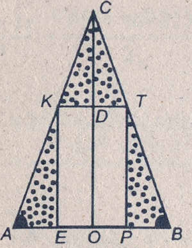


Рис. 1

Решение. Пусть $CO \perp AB$, $CO = H$, $\angle CAB = \angle CBA = \alpha$. Обозначим $EO = x$. В треугольнике CDK $CD = x\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Тогда $DO = KE = H - x\,\mathrm{tg}\,\alpha$,

$S_{KTEP} = KE \cdot KT = 2x(H - x\,\mathrm{tg}\,\alpha)$.

Рассмотрим функцию $S(x) = 2x(H - x\,\mathrm{tg}\,\alpha)$. Исследуем функцию $S(x)$ с помощью производной:

1) $S'(x) = 2H - 4x\,\mathrm{tg}\,\alpha$;

2) $2H - 4x\,\mathrm{tg}\,\alpha = 0$, $x = \dfrac{H}{2}\mathrm{ctg}\,\alpha$.

Функция $S(x)$ принимает максимальное значение при $x = \dfrac{H}{2}\mathrm{ctg}\,\alpha$.

Таким образом, $S_{\max} = \dfrac{H^2}{2}\mathrm{ctg}\,\alpha$.

Задача 1*. Известна высота H конуса и угол α наклона образующей к плоскости основания (рис. 2). Найдите, какой максимальный объем может иметь вписанный в него цилиндр (основание цилиндра лежит на основании конуса).

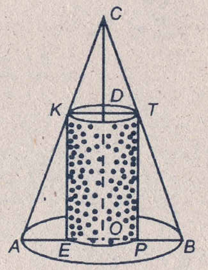


Рис. 2

Решение. Пусть CO — высота конуса $CO = H$, $\angle CAO = \alpha$, $KD = x$. Тогда $CD = x\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $DO = H - x\,\mathrm{tg}\,\alpha$,

$V = S_{\text{кр}} \cdot DO = \pi x^2 (H - x\,\mathrm{tg}\,\alpha)$.

Рассмотрим функцию $V(x) = \pi x^2 (H - x\,\mathrm{tg}\,\alpha)$. Исследуем $V(x)$ с помощью производной:

1) $V'(x) = 2\pi x H - 3\pi x^2\,\mathrm{tg}\,\alpha$;

2) $2\pi x H - 3\pi x^2\,\mathrm{tg}\,\alpha = 0$,

$x = \dfrac{2}{3}H\,\mathrm{ctg}\,\alpha$, $x \neq 0$.

Понятно, что при найденном значении функция $V(x)$ принимает максимальное значение (производная меняет знак с плюса на минус). Следовательно, $V_{\max} = \dfrac{4\pi}{27}H^3\,\mathrm{ctg}^2\alpha$.

Задачи 1 и 2 "похожи", и формулировка одной подсказывает формулировку другой. Но утверждать, что они аналогичны, нельзя, так как рассматриваемые в них фигуры не имеют полной аналогии (элементы аналогии есть в решениях задач). Осевое сечение фигуры задачи 1* — конфигурация задачи 1, а вращая треугольник ABC вокруг прямой CO, получаем фигуру задачи 1*. С этой точки зрения они являются двойственными друг другу. Таким образом, двойственность может быть предпосылкой для формулировки задачи α*, если α известна. Следуя сказанному, видоизменим задачу 1 и сформулируем для новой задачи двойственную.

Задача 2. В равнобедренный треугольник, основание которого a и высота H, вписан прямоугольник наибольшей площади (основание прямоугольника лежит на основании треугольника) (рис. 3). Найдите стороны этого прямоугольника.

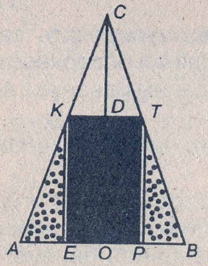


Рис. 3

Задача 2*. В конус, радиус основания которого R, а высота H, вписан цилиндр наибольшего объема (основание цилиндра лежит на основании конуса) (рис. 4). Найдите радиус основания и высоту цилиндра.

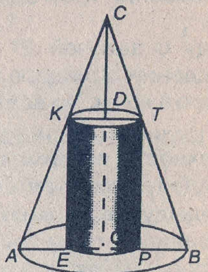


Рис. 4

$x = R\sqrt{2}$ имеет максимум. Другая сторона прямоугольника $CD = R\sqrt{2}$. Следовательно, искомый прямоугольник есть квадрат.

Задача 4. Из всех прямоугольников, вписанных в круг радиусом R, найдите тот, который имеет наибольший периметр.

Решение. Пусть $AB = x$. Тогда другая сторона $CD = \sqrt{4R^2 - x^2}$. Следовательно, периметр $P(x) = 2x + 2\sqrt{4R^2 - x^2}$. Исследуем $P(x)$ с помощью производной:

1) $P'(x) = 2 - \dfrac{2x}{\sqrt{4R^2 - x^2}}$;

2) $\dfrac{2\sqrt{4R^2 - x^2} - 2x}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = 0$, $x = R\sqrt{2}$;

3) $P'\left(x < R\sqrt{2}\right) > 0$,

$P'\left(x > R\sqrt{2}\right) < 0$.

Следовательно, функция $P(x)$ при $x = R\sqrt{2}$ принимает наибольшее значение. Другая сторона $CD = R\sqrt{2}$. Искомый прямоугольник — квадрат (см. рис. 5).

Задача 4*. Из всех цилиндров, вписанных в шар радиусом R, найдите тот, у которого боковая поверхность наибольшая.

Решение. Обозначим радиус основания цилиндра x, а высоту y. Тогда боковая поверхность $S = 2\pi xy$. Из треугольника ABC находим $y = 2\sqrt{R^2 - x^2}$. Таким образом, $S(x) = 4\pi x\sqrt{R^2 - x^2}$. Функцию $S(x)$ исследуем с помощью производной:

1) $S'(x) = \dfrac{4\pi R^2 - 8\pi x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}$;

2) $\dfrac{4\pi R^2 - 8\pi x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 0$, $x = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$;

3) $S'\left(x < \dfrac{R}{\sqrt{2}}\right) > 0$,

$S'\left(x > \dfrac{R}{\sqrt{2}}\right) < 0$.

Таким образом, при $x = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$ функция $S(x)$ принимает наибольшее значение. Высота цилиндра $y = R\sqrt{2}$ (см. рис. 6).

Задача 5. В окружность радиусом R вписан равнобедренный треугольник максимальной площади. Найдите основание и высоту треугольника (рис. 7).

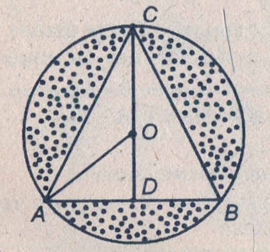


Рис. 7

Решение. Обозначим $OC = OA = R$, $OD = x$. Тогда $AD = \sqrt{R^2 - x^2}$, $AB = 2\sqrt{R^2 - x^2}$, $DC = R + x$, $S(x) = (R + x)\sqrt{R^2 - x^2}$. Исследуем полученную функцию с помощью производной:

1) $S'(x) = -\dfrac{2x^2 + Rx - R^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}$;

2) $2x^2 - Rx - R^2 = 0$.

Корни уравнения $x_1 = -R$, $x_2 = \dfrac{R}{2}$. Исследуем только критическое значение $x = \dfrac{R}{2}$, так как $0 < x < R$. Нетрудно проверить, что при $x = \dfrac{R}{2}$ функция принимает наибольшее значение. Теперь находим

Задача 5*. В шар радиусом R вписан конус максимального объема. Найдите радиус основания и высоту конуса (рис. 8).

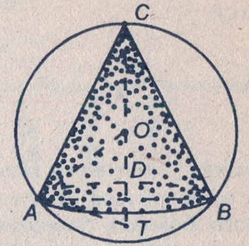


Рис. 8

Решение. Пусть $AD = x$ — радиус основания конуса, $DC = y$ — высота. Из треугольника CAT (C и T — концы диаметра) имеем: $AD^2 = CD \cdot DT$, $x^2 = y(2R - y)$. Подставим значение x^2 в формулу объема конуса

$V(y) = \dfrac{1}{3}\pi y^2(2R - y) =$

$= \dfrac{1}{3}\pi\left(2Ry^2 - y^3\right)$, $\quad 0 < y < 2R$.

Исследуем функцию $V(y)$ с помощью производной:

1) $V'(y) = \dfrac{1}{3}\pi\left(4Ry - 3y^2\right)$;

2) $\dfrac{1}{3}\pi\left(4Ry - 3y^2\right) = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = \dfrac{4}{3}R$.

$AB = 2AD = R\sqrt{3}$, $CD = \dfrac{3R}{2}$. Наибольшую площадь имеет треугольник с основанием $R\sqrt{3}$ и высотой $\dfrac{3R}{2}$.

Функция $V(y)$ при $x = \dfrac{4}{3}R$ принимает максимальное значение. Найдем значение x:

$$x^2 = \left(2R - \frac{4}{3}R\right)\frac{4}{3}R, \quad x = \frac{2\sqrt{2}}{3}R.$$

Наибольший объем имеет конус с радиусом основания $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}R$ и высотой $\dfrac{4}{3}R$.

В качестве упражнений можно решить следующие задачи.

1. Из всех конусов, вписанных в шар радиусом R, найдите тот, у которого боковая поверхность наибольшая.

2. Определите, какую максимальную полную поверхность может иметь конус, вписанный в сферу, площадь которой P.

Обратим внимание на то, что понятия "максимум" и "минимум" можно отнести к конкретному проявлению "принципа двойственности". Поэтому естественно попробовать формулировать двойственные задачи на отыскание минимума объема или поверхности. Например, рассматривать экстремальные задачи, в которых описанный около сферы конус является переменным. Тогда можем говорить о минимуме объема или поверхности переменного конуса.

Задача 6. Определите, какой может быть минимальная площадь равнобедренного треугольника, описанного около круга, площадь которого S.

Задача 6*. Определите, каким может быть минимальный объем конуса, описанного около шара, объем которого V.

Таким образом, тесно переплетающиеся аналогия и двойственность дают возможность для построения некоторой цепочки экстремальных задач. Надеемся, что читатель сможет присоединить еще несколько своих звеньев.

А теперь самостоятельно решите задачи:

1. Из всех прямоугольников данного периметра P найдите тот, у которого площадь будет наибольшей.

2. Из всех прямоугольников данной площади S найдите тот, у которого периметр наименьший.

3. Из всех цилиндров данного объема V найдите тот, у которого полная поверхность наименьшая.

4. Из всех прямых параллелепипедов с данной полной поверхностью S, в основании которых лежит квадрат, найдите тот, который имеет наибольший объем.

В. Шлыков