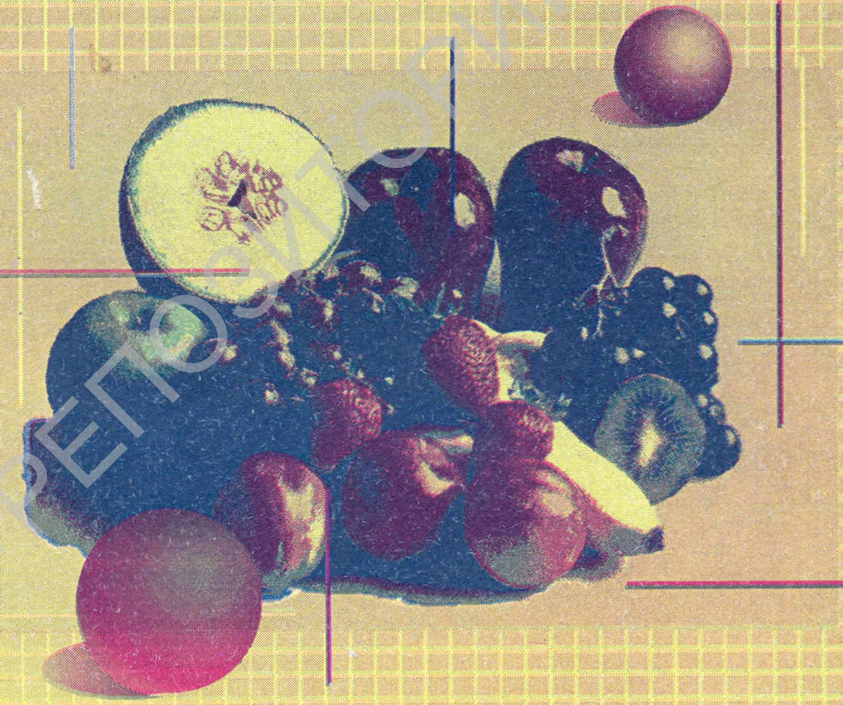
ФОКУС

4 '94

ФІЗІКА, МАТЭМАТЫКА, ІНФАРМАТЫКА І НЕ ТОЛЬКІ
ДЛЯ ВУНДЭРКІНДАЎ І НЕ ТОЛЬКІ



4 '94

Штоквартальны навукова-папулярны інфармацыйна-метадычны часопіс

Выдаецца са снежня 1992 г.

Галоўны рэдактар
В. А. Гайсёнак

Мінск
1994

Заснавальнікі

**Міністэрства адукацыі і навукі
Рэспублікі Беларусь
Белдзяржуніверсітэт
Нацыянальны інстытут адукацыі
Інстытут павышэння кваліфікацыі і
перападрыхтоўкі кіруючых работнікаў
і спецыялістаў адукацыі**

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ФИГУР

Богат, разнообразен и удивителен мир математики. Тот, кто занимается ею, чувствует и понимает это, но и человек, далекий от математики, не останется равнодушным при виде прекрасной картины Леонардо да Винчи "Тайная вечеря" – этого чуда, возникновение которого стало возможным благодаря гениальному применению законов перспективы.

Человечеству свойственно стремление к прекрасному и таинственному, а вся история его развития неизменно свидетельствует, что мир математики, такой абстрактный и недоступный, удивительно успешно помогает в достижении на первый взгляд сказочных и несбыточных мечтаний. И как бы в подтверждение правомерности, и в поддержку этих мечтаний приходят в этот мир "звезды-математики" и "звезды-художники", которые своими математическими и художественными работами зовут нас в "прекрасное далеко". Эти звезды зажигаются и гаснут на небосводе человечества, но свет их столетиями притягивает своей загадочностью и помогает вспыхивать новым дарованиям. Так и возникает этот "Млечный путь", помогающий двигаться человечеству вперед. Действительно, непреодолимо чувство благоговения, когда смотришь гравюры голландского художника М.К.Эшера или графические работы нашего современника члена-корреспондента РАН А.Т.Фоменко. При взгляде на эти работы идеи симметрии и теории групп становятся обворожительно прекрасными, и хочется почувствовать пространство и время, войти в таинственный мир топологии, в котором "королевой бала" является непрерывность, ощутить гармонию формы и содержания.

Математике присуща взаимосвязь геометрических и топологических свойств. Алмаз становится бриллиантом, когда он огранен должным образом – превращен в некоторый многогранник. А теорема Эйлера ($\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$, где α_0 обозначает число вершин, α_1 – число ребер и α_2 – число граней многогранника) для выпуклых многогранников – одна из жемчужин топологии. Так соседствуют в природе и математике удивительное и красивое. И если красота спасет мир, то математика – прекрасное здание, архитектура которого поражает воображение и будит фантазию, — поможет в этом! Математика привлекательна, как букет ярких цветов, в котором каждый романтический и увлеченный человек может найти цветок особой красоты – предмет своего поклонения и любви. Об одном из таких цветков – топологии, где особенно ярко проявляется единство формы и содержания, и пойдет речь.

В школьной геометрии изучаются свойства фигур, сохраняющиеся при движениях. Две фигуры рассматриваются здесь как одинаковые (равные), если одна из них переводится в другую с помощью движения. Топология же изучает свойства фигур, сохраняющиеся при более общих отображениях, чем движения, а именно гомеоморфизмах. Гомеоморфизмы — это такие отображения, которые являются взаимно однозначными и сохраняют лишь "непрерывное расположение точек фигуры" (не допускают "склеиваний" и "разрывов"). С точки зрения топологии фигуры считаются одинаковыми (гомеоморфными), если одну в другую можно перевести с помощью гомеоморфизма, т.е. если непрерывным образом можно перейти от одной фигуры к другой и непрерывным же образом вернуться обратно.

Проектирование f "подковки" γ на отрезок CD не является гомеоморфизмом, так как при этом отображении "склеиваются", например, точки x_1 и x_2 ($f(x_1)=f(x_2)$) (рис. 1).

Линию t можно отобразить на фигуру, состоящую из двух линий t_1 и t_2, но для этого ее нужно "разорвать". Поскольку разрывы не разрешены, то такое отображение не является гомеоморфизмом (рис. 2).

Примером гомеоморфного отображения служит центральное проектирование φ окружности на контур квадрата из точки O, где O – их общий центр (рис. 3). Во-первых, отображение является взаимно однозначным. Во-вторых, если зафиксировать точку x_0

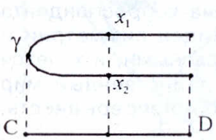


Рис. 1

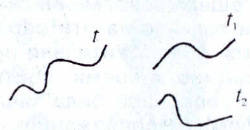


Рис. 2

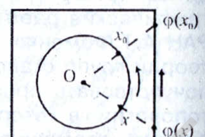


Рис. 3

на окружности, соответствующую ей точку $\varphi(x_0)$ на контуре квадрата и рассмотреть переменную точку x окружности и ее образ $\varphi(x)$, то при неограниченном приближении точки x к точке x_0 точка $\varphi(x)$ неограниченно приближается к точке $\varphi(x_0)$. Таким же свойством обладает и обратное проектирование контура квадрата на окружность. Непрерывный переход в обе стороны возможен! Те свойства фигуры, которые сохраняются при гомеоморфизмах, называются **топологическими свойствами** или **топологическими инвариантами**. Контур треугольника, контур квадрата и окружность — попарно гомеоморфные фигуры. Каждую из них можно перевести в другую без разрывов и склеиваний (рис. 4).

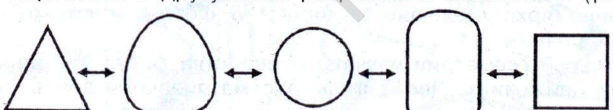


Рис. 4

Аналогично поверхность тетраэдра, сфера и поверхность куба гомеоморфны между собой. С точки зрения топологии нет различия между этими поверхностями (рис. 5).

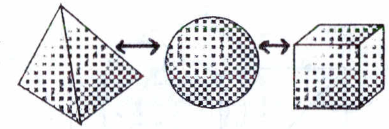


Рис. 5

Рассмотренные примеры показывают, что понятия прямолинейности, длины отрезка, величины угла, площади фигуры, объема тела не являются топологическими (топологию не интересуют понятия измерительного характера).

Еще раз подчеркнем, что в основе топологии лежит понятие непрерывности, которое мы пока понимали интуитивно. Точное определение ему впервые было дано французским математиком О. Коши (1787 – 1857). Далее поговорим о непрерывности подробнее. А пока предлагаем взять в попутчики интуицию и решить следующие упражнения.

1. Какие из фигур, изображенных на рис. 6, гомеоморфны?
2. Объясните, почему парабола гомеоморфна прямой.
3. Задайте гомеоморфизм между множеством точек окружности, из которой выброшена одна точка, и множеством точек прямой.

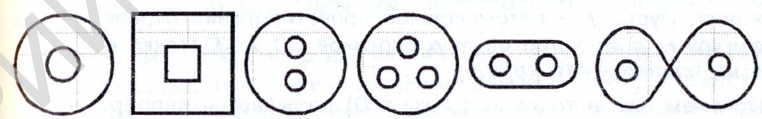


Рис. 6

Непрерывные отображения. Прежде всего рассмотрим понятие ε-окрестности точки. *ε-Окрестностью точки $x_0 \in A$ в фигуре A называется множество всех точек этой фигуры, находящихся на расстоянии, меньшем ε от точки x_0.*

Например, ε-окрестность точки x_0 на плоскости – это открытый круг с центром в точке x_0 (граничная окружность ему не принадлежит), ε-окрестность точки x_0 в пространстве – открытый шар с центром в x_0 (граничная сфера ему не принадлежит). Форма ε-окрестности точки в зависимости от фигуры может быть разной. На рис. 7 показаны ε-окрестности точек в различных фигурах. Надеемся, что читатель понял: ε-окрестность точки x_0 в фигуре A есть пересечение фигуры A и ε-окрестности точки x_0 на плоскости (в пространстве).

Отображение f фигуры A на фигуру B называется *непрерывным* в точке $x_0 \in A$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, что для

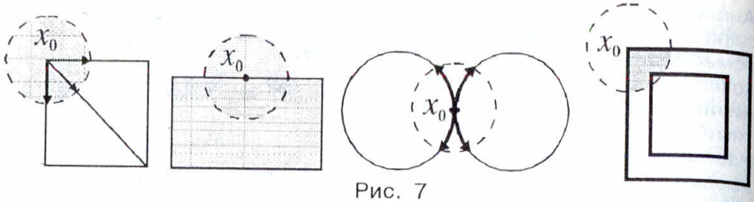


Рис. 7

любой точки x, отстоящей от x_0 на расстоянии, меньшем, чем δ, точка $f(x)$ находится от точки $f(x_0)$ на расстоянии, меньшем, чем ε.

Используя понятие ε-окрестности, определение непрерывности можно сформулировать так: отображение f непрерывно в точке $x_0 \in A$, если для любой ε-окрестности точки $f(x_0)$ в фигуре B найдется δ-окрестность точки x_0 в фигуре A, которая полностью отображается в ε-окрестность.

Чтобы яснее понять, что такое непрерывность отображения, рассмотрим пример разрыва, т.е. нарушения непрерывности отображения. Пусть f – ортогональное проектирование отрезка *TP* на фигуру *F*, состоящую из двух отрезков *CD* и *KE* (точка *K* фигуре *F* не принадлежит) (рис.8).

Покажем, что в точке x_0 ($f(x_0) = D$) нарушается непрерывность. Рассмотрим ε-окрестность точки *D*, показанную на рис. 8 (полуинтервал (*OD*]). Тогда какую бы δ-окрестность точки x_0 на *TP* мы ни взяли (интервал с центром в точке x_0), она целиком не отображается в выбранную ε-окрестность (правая часть любой δ-окрестности проектируется на отрезок *KE*, и ее проекция не содержится в выбранной ε-окрестности). Условие непрерывности нарушено в точке x_0!

Надеемся, что рассмотренный пример поможет читателю ощутить, что непрерывность – "дело тонкое", и там, где она нарушается, и происходит "разрыв". Наглядно это можно увидеть при растяжении тонкого резинового жгутика. В процессе деформации он вдруг разрывается. Вот оно нарушение непрерывности!

Если отображение f фигуры A в фигуру B непрерывно в каждой точке x фигуры A, то говорят, что оно непрерывно на множестве точек фигуры A.

Рассмотрим пример. Пусть *A* и *B* — две концентрические окружности, а f – центральное проектирование *A* на *B* из общего центра *O* (рис. 9). Данное отображение является непрерывным в каждой точке окружности *A*. Действительно, для любой ε-окрестности точки $f(x)$ окружности *B* (дуга *TK*, из которой исключены

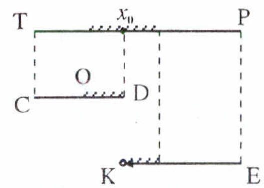


Рис. 8

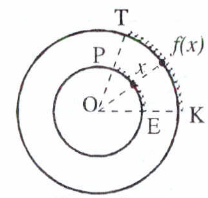


Рис. 9

точки *T* и *K*) найдется δ-окрестность точки $x \in A$ (дуга *PE* без концевых точек *P* и *E*), которая полностью отображается в выбранную ε-окрестность.

Думаем, что теперь наш собеседник успешно решит следующие упражнения.

1. Пусть p и q — две различные фиксированные точки плоскости. Рассмотрим отображение, при котором точке p соответствует точка q, а любой точке x, не совпадающей с p, ставится в соответствие сама точка x. Докажите, что данное отображение не является непрерывным в точке p.
2. Пусть *A* – множество точек плоскости, а *B* – некоторая прямая на плоскости. Докажите, что ортогональное проектирование точек плоскости на прямую является непрерывным в любой точке плоскости.
3. Разобьем плоскость на две части *A* и *B*, где *A* состоит из всех точек, лежащих ниже горизонтальной прямой ℓ, а *B* – множество остальных точек. Определим отображение f следующим образом: каждой точке x из *B* ставится в соответствие точка, полученная при параллельном переносе на одну единицу вправо вдоль прямой ℓ, а каждой точке из *A* соответствует сама эта точка. В каких точках отображение f не является непрерывным?

Гомеоморфизмы и топологические инварианты. Теперь поговорим подробнее о гомеоморфных отображениях.

Взаимно однозначное отображение фигуры *A* на фигуру *B* называется *гомеоморфизмом*, если оно непрерывно в каждой точке фигуры *A* и обратное к нему отображение непрерывно в каждой точке фигуры *B*.

Говорят, лучше один раз увидеть, чем сто раз услышать. Поэтому обратимся к наглядным примерам.

Пусть *A* – полуокружность с центром в точке *O*, из которой исключены концевые точки p и q, а *B* – касательная к полуокружности, параллельная диаметру pq. Центральное проектирование *A* на *B* из точки *O* является гомеоморфизмом (рис. 10).

Полуокружность без концевых точек p и q (рис. 11) с помощью ортогонального проектирования гомеоморфно отображается на отрезок, из которого выброшены концевые точки m и n (открытый отрезок).

А теперь, взяв в помощники аналогию, попробуйте доказать следующие факты.

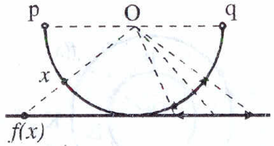


Рис. 10

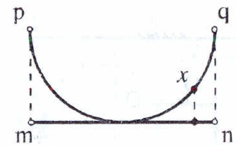


Рис. 11

1. Полусфера без граничной окружности гомеоморфна кругу без ограничивающей окружности (открытому кругу).
2. Полусфера без граничной окружности гомеоморфна плоскости.
3. Открытый круг гомеоморфен плоскости.

Примеры отображений, не являющихся гомеоморфизмами, вы легко придумаете самостоятельно и, надеемся, поймете, что ортогональные проектирования φ и g, показанные на рис. 12, не являются гомеоморфизмами (нет взаимной однозначности). Быть может, читателю сложнее будет придумать пример взаимно однозначного и непрерывного отображения, но для которого обратное отображение не является непрерывным. Рассмотрим такой пример. Пусть *A* — множество точек полуинтервала $[0,2\pi)$, *B* – множество точек окружности. Отображение f каждому α из полуинтервала $[0,2\pi)$ ставит в соответствие точку *M* окружности, такую, что отрезок *OM* наклонен к горизонтальному радиусу *OP* под углом α. Данное отображение взаимно однозначное и непрерывное. Обратное отображение, которое каждой точке *M* окружности ставит в соответствие величину угла наклона радиуса *OM* к горизонтальному радиусу *OP*, не является непрерывным в точке *P* (интуиция подсказывает, что обратное отображение "разрывает" окружность в точке *P*) (рис. 13).

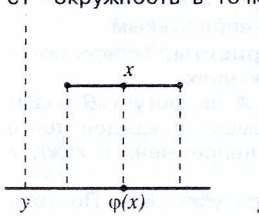


Рис. 12

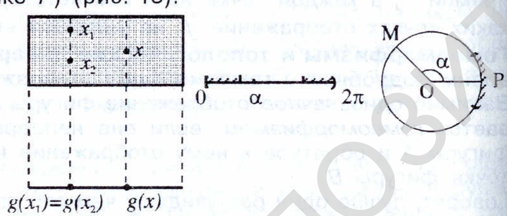


Рис. 13

Ранее мы уже отмечали, что две гомеоморфные фигуры рассматриваются (с точки зрения топологии) как одинаковые, не отличающиеся друг от друга, а свойства фигур, которые не изменяются при гомеоморфизмах, называются *топологическими инвариантами*. Одной из задач топологии является отыскание методов, позволяющих ответить на вопрос: гомеоморфны две фигуры или нет. Для доказательства того, что две фигуры не могут быть гомеоморфными, пользуются топологическими инвариантами. Пусть, например, фигура *A* обладает некоторым свойством θ,

которое является топологическим инвариантом, т.е. этим свойством обладает и любая фигура, гомеоморфная *A*. Если теперь две фигуры *A* и *B* таковы, что одна обладает свойством θ, а другая нет, то эти фигуры не могут быть гомеоморфными.

Рассмотрим некоторые топологические инварианты.

Число компонент. Фигура *A*, изображенная на рис. 14, состоит из двух "кусков", не связанных между собой частей, а фигура *B* состоит из одного связанного "куска". Оказывается, что число связанных "кусков" (число компонент), из которых состоит фигура, является топологическим инвариантом. Таким образом, если фигуры состоят из различного числа компонент, то они не могут быть гомеоморфными (фигуры *A* и *B* не гомеоморфны).

Индекс точки. Пусть F – фигура, состоящая из конечного числа дуг (дуга – фигура, гомеоморфная отрезку), x – некоторая точка фигуры F. Число дуг фигуры F, сходящихся в точке x, называется *индексом точки* x в фигуре F. В фигуре *C*, изображенной на рис. 15,точка x_1 имеет индекс 3, а точка x_2 – индекс 2. Число точек определенного индекса является топологическим инвариантом. Теперь понятно, что фигуры F_1 и F_2 (рис. 15) не гомеоморфны, так как фигура F_1 имеет две точки индекса 3, а в фигуре F_2 таких точек четыре.

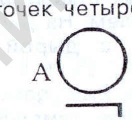


Рис. 14

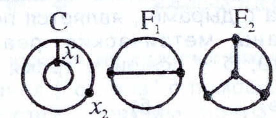


Рис. 15

Разбивающие точки. На восьмерке (рис. 16) имеется точка x_0, такая, что после ее удаления получается фигура, содержащая более одной компоненты. Точку, обладающую таким свойством, называют *разбивающей точкой* фигуры. Никакая отличная от x_0 точка восьмерки не является разбивающей.

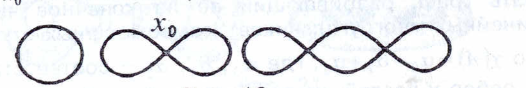


Рис. 16

Число разбивающих точек фигуры есть топологический инвариант, число неразбивающих точек – также топологический инвариант. Следовательно, фигуры, имеющие различное число разбивающих (неразбивающих) точек, не могут быть гомеоморфными. Например, окружность, восьмерка и двойная восьмерка (рис. 16) попарно не гомеоморфны.

Эйлерова характеристика графа. Конечным графом называется фигура G, состоящая из конечного числа точек (вершин) и конечного числа дуг (ребер), пересекающихся только в вершинах, при этом две вершины графа могут соединяться несколькими ребрами. Кроме того, допускаются замкнутые ребра, которые начинаются и оканчиваются в одной и той же вершине.

Совокупность точек всех ребер и всех его вершин называется *телом графа*. Два графа называются *гомеоморфными*, если гомеомофны их тела.

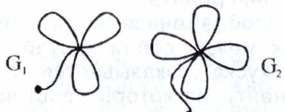


Рис. 17

Эйлеровой характеристикой графа G называется число $\chi(G)=\alpha_0-\alpha_1$, где α_0 – число вершин, α_1 – число его ребер. Эйлерова характеристика графа есть топологический инвариант. Графы G_1 и G_2 (рис. 17) не гомеоморфны, так как $\chi(G_1)=-2$, а $\chi(G_2)=-3$.

Заметим, что если эйлеровы характеристики графов равны, то отсюда не следует, что графы гомеоморфны. Попробуйте придумать соответствующий пример.

Эйлерова характеристика поверхности. Фигура, у которой каждая точка имеет ε-окрестность, гомеоморфную открытому кругу, называется *поверхностью*. Сфера S^2 и тор T^2 (велосипедная камера) – поверхности (рис. 18, *а*, *б*). Рассматриваются также *поверхности с краем*. Сфера, у которой выброшено несколько множеств, гомеоморфных открытому кругу (сфера с дырами), является поверхностью с краем. На рис. 19, *а* показаны метрические реализации сферы с дырой, а на рис. 19, *б* – сферы с тремя дырами.

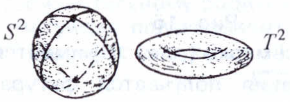


Рис. 18

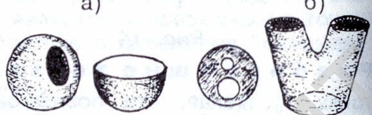


Рис. 19

Пусть *А* – поверхность (с краем или без края), на которой можно нарисовать граф, разбивающий ее на конечное число частей (криволинейных многоугольников), гомеоморфных открытому кругу. Число $\chi(A)=\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2$, где α_0, α_1, α_2 – соответственно число вершин, ребер и частей, на которые граф разбивает поверхность, называется *эйлеровой характеристикой поверхности*.

Для любой поверхности ее эйлерова характеристика не зависит от выбора разбивания на криволинейные многоугольники, а является топологическим инвариантом поверхности.

Например, эйлерова характеристика сферы равна 2. Рассмотрим на сфере граф, у которого две вершины и четыре ребра: $\alpha_0=2$, $\alpha_1=4$, $\alpha_2=4$ (рис. 18, *а*). Тогда $\chi(S^2)=2-4+4=2$. Убедитесь самостоятельно, что эйлерова характеристика тора равна нулю. Следовательно, сфера и тор негомеоморфные поверхности.

А теперь несколько упражнений.

1. Тор, у которого выброшено множество, гомеоморфное открытому кругу, называется ручкой. Чему равна эйлерова характеристика ручки?
2. Докажите, что эйлерова характеристика сферы с q дырами равна $2-q$.
3. Какие поверхности с краем, изображенные на рис. 20, гомеоморфны, а какие нет?

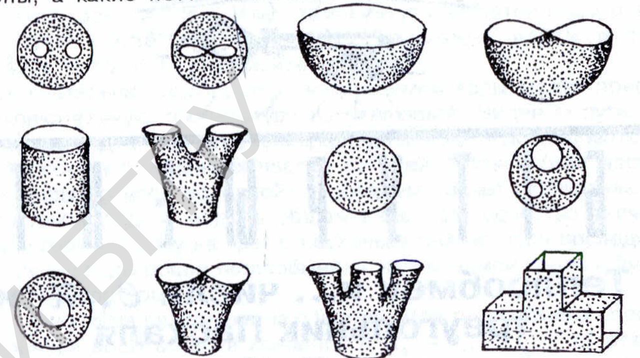


Рис. 20

Пусть A_1 и A_2 – две поверхности, каждая из которых имеет край, гомеоморфный окружности. Соединив ("склеив" с помощью гомеоморфизма) края этих поверхностей, получим новую поверхность *А*. Можно доказать, что $\chi(A)=\chi(A_1)+\chi(A_2)$. На рис. 21 показано "склеивание" двух ручек, в результате чего получается поверхность, которая называется двойным тором. Эйлерова характеристика двойного тора равна минус двум (надеемся, вы уже доказали, что эйлерова характеристика ручки равна минус единице).

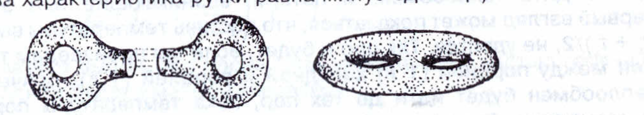


Рис. 21

Пусть *А* – сфера с p дырами. Заклеим каждую дыру ручкой. Полученная поверхность A_p называется сферой с p ручками. Эйлерова характеристика сферы с p дырами равна $2-p$, а ручки – минус единице, следовательно, эйлерова характеристика сферы с p ручками равна $2-2p$ (приклеивание ручки уменьшает эйлерову характеристику поверхности *А* на единицу). Теперь понятно, что две сферы с различным числом ручек – поверхности негомеоморфные.

В. Шлыков