

Учреждение образования  
«Белорусский государственный педагогический университет  
имени Максима Танка»

КОНТРОЛЬНЫЙ  
СВЕДЕТЕЛЬСТВО

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по учебной работе  
\_\_\_\_\_ С.И.Василец  
«12» \_\_\_\_\_ 2021 г.  
Регистрационный № УД 241-65-2021 / уч.

## АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Учебная программа учреждения высшего образования  
по учебной дисциплине для специальности  
1-02 05 01 Математика и информатика

2021 г.

Учебная программа составлена на основе образовательного стандарта высшего образования первая ступень специальность 1-02 05 01 Математика и информатика (ОСВО 1-02 05 01 – 2021); учебного плана специальности 1-02 05 01 Математика и информатика; типовой учебной программы (\_\_\_\_\_.202\_\_, № ТД-\_\_\_\_\_/ тип.)

**СОСТАВИТЕЛЬ:**

А.А.Черняк, профессор кафедры математики и методики преподавания математики учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка», доктор физико-математических наук, доцент

**РЕЦЕНЗЕНТЫ:**

И.И.Рушнова, заведующий кафедрой высшей математики и математической физики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Ю.А.Быкадоров, доцент кафедры информатики и методики преподавания информатики учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка», кандидат физико-математических наук, доцент

**СОГЛАСОВАНО:**

Директор

ГУО «Гимназия № 29 г. Минска»



Г.В.Кушняров

**РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Кафедрой математики и методики преподавания математики  
(протокол № 4 от 09.11.2021 г.)

Заведующий кафедрой И.Н.Гуло И.Н.Гуло

Научно-методическим советом учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка»  
(протокол № 3 от 21.12.2021 г.)

Оформление учебной программы и сопровождающих ее материалов действующим требованиям Министерства образования Республики Беларусь соответствует

Методист учебно-методического отдела

Е.В.Тихонова Е.В.Тихонова

Директор библиотеки

Н.П.Сятковская Н.П.Сятковская

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная программа по дисциплине «Алгебраические структуры и теория чисел» разработана для учреждений высшего образования Республики Беларусь в соответствии с требованиями образовательного стандарта высшего образования первой ступени по специальности 1-02 05 01 Математика и информатика.

«Алгебраические структуры и теория чисел» является одной из ведущих специальных дисциплин в профессиональной подготовке преподавателя математики и информатики. Свойства основных алгебраических структур – группы, кольца, поля – позволяют рассматривать операции над различными математическими объектами с достаточно общих позиций алгебраических структур, в которых эти операции определяются. Поэтому данная дисциплина призвана развить способности студента увязывать абстрактные идеи и методы с конкретными задачами школьной алгебры и рассматривать вопросы школьной программы с достаточно общих позиций, а также овладеть аксиоматическим методом, как эффективным средством математических доказательств.

**Цель** учебной дисциплины – обеспечить будущего учителя математики и информатики аппаратом теории групп и теории чисел для изучения школьной алгебры на профильном уровне, проведения факультативных занятий и подготовки школьников к математическим олимпиадам.

**Задачи** дисциплины:

- сформировать теоретическую базу и инструментарий для изучения многочленов над конечными полями, играющих ключевую роль при изучении последующих дисциплин модуля «алгебра и теория чисел»;
- научить доказывать теоремы теории чисел на основе классических результатов теории групп;
- сформировать алгебраические умения и навыки, необходимые для успешного изучения информатики и современных проблем защиты и безопасности информации.

**Место и связь с другими дисциплинами**

Дисциплина «Алгебраические структуры и теория чисел» служит основой для учебных дисциплин «Алгебра многочленов и расширения полей», «Алгебраические методы в криптографии», «Теория множеств и логика высказываний». Она существенно дополняет основополагающими понятиями высшей алгебры дисциплины «Введение в анализ» и «Аналитическая геометрия».

В результате изучения учебной дисциплины студент должен

**знать:**

- определения и свойства групп и полей;
- теоремы теории чисел.

**уметь:**

- решать сравнения и системы линейных сравнений;

–находить канонические разложения целых чисел и выводить признаки делимости.

***владеть:***

–навыками изложения доказательств теоретико-групповых утверждений; навыками решения типовых задач целочисленной арифметики.

Освоение учебной дисциплины «Алгебраические структуры и теория чисел» должно обеспечить формирование следующих компетенций:

БПК-15: Применять в работе с обучающимися положения теории чисел и методы линейной алгебры для решения алгебраических уравнений и их систем.

В рамках образовательного процесса по учебной дисциплине «Алгебраические структуры и теория чисел» студент должен приобрести не только теоретические и практические знания, умения и навыки по специальности, но и развить свой ценностно-личностный, духовный потенциал, сформировать качества патриота и гражданина, готового к активному участию в экономической, производственной, социально-культурной и общественной жизни страны.

Учебная дисциплина «Алгебраические структуры и теория чисел» изучается на 1 курсе во втором семестре при дневной форме получения образования. На изучение учебной дисциплины «Алгебраические структуры и теория чисел» отводится 110 часов, из них аудиторных – 50 часов (лекции – 22 часов, практические занятия – 28 часа). На самостоятельную работу студентов отведено 60 часов.

Форма текущей аттестации – зачёт.

## СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

### **Раздел 1. Введение в алгебру**

#### 1.1. Отображения и отношения

Три вида отображений, отношение эквивалентности. Бинарные операции. Метод математической индукции.

#### 1.2. Комплексные числа и операции над ними

Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы комплексных чисел. Операции над комплексными числами. Корни  $n$ -й степени. Квадратные уравнения с действительными коэффициентами.

### **Раздел 2. Алгебраические структуры**

#### 2.1. Группы и их изоморфизм

Определение полугруппы и группы. Аддитивные и мультипликативные группы. Примеры групп и их изоморфизм. Симметрическая группа подстановок.

#### 2.2. Подгруппы, свойства циклических групп, нормальные подгруппы и фактор-группы

Определение подгруппы. Свойства циклических групп. порядки подгрупп конечных групп. Знакопеременная подгруппа подстановок. Нормальные подгруппы и фактор-группы.

#### 2.3. Кольца, поля и их изоморфизм, характеристика поля

Определение кольца, поля, подполя. Примеры полей (колец) и их изоморфизм. Характеристика поля. Минимальные поля.

### **Раздел 3. Теория чисел**

#### 3.1. Делимость в кольце целых чисел.

Делимость в кольце целых чисел: деление с остатком, НОД и НОК, алгоритм Евклида нахождения НОД, алгоритм Эратосфена нахождения простых чисел. Каноническое разложение и основная теорема арифметики.

#### 3.2. Группа, кольцо и поле целых чисел по модулю $n$ .

Функция Эйлера. Теоремы Эйлера, Ферма, Вильсона и их следствия. Дроби в  $g$ -ичной системе счисления и вывод признаков делимости. Периодические  $g$ -ичные дроби.

3.3. Линейные и нелинейные уравнения, системы линейных уравнений. в мультипликативной группе по модулю  $n$ .

Китайская теорема об остатках. Алгоритм нахождения обратных элементов в мультипликативной группе по модулю  $n$ . Линейные уравнения в мультипликативной группе по модулю  $n$ . Нелинейные уравнения в мультипликативной группе по простому модулю.

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА**  
(дневная форма получения образования)

Номер занятия	раздела, темы, занятия; перечень изучаемых вопросов	Количество аудиторных часов			Самостоятельная работа студентов	Материальное обеспечение занятия (наглядные, методические пособия и др.)	Литература	Формы контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Лабораторные				
1	2	3	4	5	6	7	8	9
<b>2 семестр</b>								
1	<b>Введение в алгебру</b>	<b>4</b>	<b>6</b>		<b>20</b>		[1-10]	
1.1	<b>Отображения и отношения.</b> Три вида отображений, отношение эквивалентности. Бинарные операции. Метод математической индукции	2	2		20	Раздаточные материалы		Теоретический тест
1.2	<b>Комплексные числа и операции над ними</b> Алгебраическая,	2	4			Раздаточные материалы		Проверочная самостоятельная работа

	тригонометрическая и показательная формы комплексных чисел. Операции над комплексными числами. Корни $n$ -й степени. Квадратные уравнения с действительными коэффициентами.						
2	<b>Алгебраические структуры</b>	<b>10</b>	<b>8</b>		<b>40</b>		[1-10]
2.1	<b>Группы и их изоморфизм</b> Определение полугруппы и группы. Аддитивные и мультипликативные группы. Примеры групп и их изоморфизм. Симметрическая группа подстановок.	2	2		20		Устный опрос
2.2	<b>Подгруппы, свойства циклических групп, нормальные подгруппы и фактор-группы</b> Определение подгруппы. Свойства циклических групп. порядки подгрупп конечных групп. Знакопеременная подгруппа	4	4		20	Методические пособия [6,10]	Проверочная самостоятельная работа

	подстановок. Нормальные подгруппы и фактор-группы.						
2.3	<b>Кольца, поля и их изоморфизм, характеристика поля</b> Определение кольца, поля, подполя. Примеры полей (колец) и их изоморфизм. Характеристика поля. Минимальные поля.	4	2			Методические пособия [6,10]	Теоретический тест
	<b>Теория чисел</b>	<b>8</b>	<b>14</b>				[1-10]
3.1	<b>Делимость в кольце целых чисел</b> Делимость в кольце целых чисел: деление с остатком, НОД и НОК, алгоритм Евклида нахождения НОД, алгоритм Эратосфена нахождения простых чисел. Каноническое разложение и основная теорема арифметики.	2	4				Устный опрос Отчет о выполнении самостоятельной работы
3.2	<b>Группа, кольцо и поле целых чисел по модулю <math>n</math></b> Функция Эйлера Теоремы Эйлера, Ферма, Вильсона и их следствия. Дроби в $g$ -	4	4			Методические пособия [6,10]	Устный опрос Отчет о выполнении самостоятельной работы

	ичной системе счисления и вывод признаков делимости. Периодические $g$ -ичные дроби.						
3.3	<b>Линейные и нелинейные уравнения, системы линейных уравнений в мультипликативной группе по модулю <math>n</math></b> Китайская теорема об остатках. Алгоритм нахождения обратных элементов в мультипликативной группе по модулю $n$ . Линейные уравнения в мультипликативной группе по модулю $n$ . Нелинейные уравнения в мультипликативной группе по простому модулю.	2	6			Методические пособия [6,10]	Устный опрос Отчет о выполнении самостоятельной работы
	<b>Всего</b>	<b>22</b>	<b>28</b>		<b>60</b>		<b>Зачёт</b>

**ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ*****Основная литература***

1. Бухштаб, А.А. Теория чисел / А.А. Бухштаб. – М.: Лань, 2020. – 384 с. Репозиторий БГПУ.
2. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – М.: Лань, 2021. – 432 с.

***Дополнительная литература***

3. Милованов, М. В. Алгебра и аналитическая геометрия : учеб. для студентов матем. спец. вузов / М. В. Милованов, М. М. Толкачев, Р. И. Тышкевич, А.С. Феденко. - Минск : Амалфея, 2001. - Ч. 1. - 401 с.
4. Фаддеев, Д.К. Лекции по алгебре / Д.К. Фаддеев – М.: Лань, 2007.– 416 с.
5. Фаддеев, Д.К. Задачи по высшей алгебре. / Д.К. Фаддеев И.С. , Соминский. – М.: Лань, 2008.– 288 с.
6. Баркович О.А. Алгебра: задания для практических занятий и самостоятельной работы: часть 1. Введение в алгебру / О.А. Баркович. – Минск: БГПУ, 2005. – 134 с.
7. Виноградов, И.М. Основы теории чисел / И.М. Виноградов. – М.: Лань, 2020. – 176 с.
8. Окунев, Л.Я. Высшая алгебра / Л.Я. Окунев – М.: Лань, 2014.– 336 с.
9. Окунев, Л.Я. Сборник задач по высшей алгебре / Л.Я. Окунев – М.: Лань, 2009.– 192 с.
10. Черняк, А.А. Алгебра в задачах и решениях. Часть 2: Алгебраические структуры, целочисленная арифметика, многочлены / А.А. Черняк.– Мн.: БГПУ, 2008.– 110 с.

## РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ФОРМЫ И МЕТОДЫ ОБУЧЕНИЯ

Основными методами (формами) обучения, отвечающими целям учебной дисциплины, являются: методы проблемного обучения (проблемное изложение, частично-поисковый и исследовательский методы). В процессе реализации учебной программы особое место должна занимать организация учебно-исследовательской работы студентов. Эта работа должна органично включаться в образовательный процесс в сочетании со всеми видами учебных занятий.

### МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ И ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

В принципе, каждая тема программы позволяет организовывать творческую самостоятельную работу студентов, которая будет содействовать становлению преподавателя-исследователя, владеющего значительным творческим потенциалом.

Рекомендуем следующие темы для организации самостоятельной работы студентов:

- применение метода математической индукции для доказательства равенств и неравенств;
- число отображений разных видов, заданных на конечных множествах.
- примеры фактор-групп групп невырожденных матриц;
- разложение подстановок в произведение транспозиций.

Контроль за самостоятельной работой студентов предполагается проводить на еженедельных консультациях, коллоквиумах и экзаменах.

### ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА

№ /п	Название темы раздела	Кол-во часов на СРС	Задание	Форма выполнения
1	Доказательства уравнений и неравенств методом математической индукции	10	[5,6,9]	Решение индивидуальных контрольных примеров
2.	Число отображений разных видов, заданных на конечных множествах. Свойства отношений частичного порядка	10	[8,9]	Самостоятельно вывести формулы

3.	Примеры фактор-групп групп невырожденных матриц	20	[10]	Построение фактор-групп на различных матричных множествах
4.	Разложение подстановок в произведение транспозиций	20	[3,10]	Разобраться в алгоритмах разложения подстановок

### ПЕРЕЧЕНЬ РЕКОМЕНДУЕМЫХ СРЕДСТВ ДИАГНОСТИКИ

Рекомендуется проведение одного коллоквиума по второму разделу программы для подготовки к устной части экзамена.

С целью текущего контроля предусматривается проведение двух контрольных работ – по одной по каждому из двух последних разделов.

Для контроля и самоконтроля знаний и умений студентов по отдельным темам или разделам представляется целесообразным использование тестовых технологий.

### ПРИМЕРНЫЙ ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ К ЗАЧЕТУ

1. Три вида отображений.
2. Отношение эквивалентности.
3. Бинарные операции.
4. Операции над комплексными числами.
5. Корни  $n$ -й степени.
6. Определение полугруппы и группы.
7. Определение подгруппы. Свойства циклических групп.
8. Нормальные подгруппы и фактор-группы.
9. Определение кольца, поля, подполя.
10. Характеристика поля. Минимальные поля.
11. Делимость в кольце целых чисел: деление с остатком, НОД и НОК, алгоритм
12. Евклида нахождения НОД, алгоритм Эратосфена нахождения простых чисел.
13. Каноническое разложение и основная теорема арифметики.
14. Функция Эйлера. Теоремы Эйлера, Ферма, Вильсона и их следствия.
15. Дроби в  $g$ -ичной системе счисления и вывод признаков делимости.
16. Китайская теорема об остатках.
17. Линейные уравнения в мультипликативной группе по модулю  $n$ .

**ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ**

по учебной дисциплине «Алгебраические структуры и теория чисел»

Название дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы по изучаемой учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
1	2	3	4
Теория множеств и логика высказываний	Кафедра математики и методики преподавания математики	С содержанием данной учебной дисциплины согласуются, замечаний и предложений нет	Протокол № 4 от 09.11.2021
Алгебра многочленов и расширения полей	Кафедра математики и методики преподавания математики	С содержанием данной учебной дисциплины согласуются, замечаний и предложений нет	Протокол № 4 от 09.11.2021
Алгебраические методы в защите информации	Кафедра математики и методики преподавания математики	С содержанием данной учебной дисциплины согласуются, замечаний и предложений нет	Протокол № 4 от 09.11.2021
Введение в анализ	Кафедра математики и методики преподавания математики	С содержанием данной учебной дисциплины согласуются, замечаний и предложений нет	Протокол № 4 от 09.11.2021
Аналитическая геометрия	Кафедра математики и методики преподавания математики	С содержанием данной учебной дисциплины согласуются, замечаний и предложений нет	Протокол № 4 от 09.11.2021