

Учреждение образования  
«Белорусский государственный педагогический университет  
имени Максима Танка»



УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по учебной работе  
С.И.Василец  
2021 г.

Регистрационный № УД-24-1-54-2021 уч.

## ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебная программа учреждения высшего образования  
по учебной дисциплине (по выбору студента) для специальности  
1-02 05 01 Математика и информатика

2021 г.

Учебная программа составлена на основе образовательного стандарта высшего образования первая ступень специальность 1-02 05 01 Математика и информатика, утвержден и введен в действие постановлением Министерства образования РБ 30.08.2013 г. № 87 и учебного плана специальности 1-02 05 01 Математика и информатика

**СОСТАВИТЕЛЬ:**

И.Н.Гуло, заведующий кафедрой математики и методики преподавания математики учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка», кандидат физико-математических наук, доцент

**РЕЦЕНЗЕНТЫ:**

Т.Н.Жоровина, доцент кафедры теории функций Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Ю.А.Быкадоров, профессор кафедры информатики и методики преподавания информатики учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка», кандидат физико-математических наук, доцент

**СОГЛАСОВАНО:**

Директор

ГУО «Средняя школа № 61 г. Минска»



 И.В.Цубикова

**РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Кафедрой математики и методики преподавания математики (протокол № 10 от 27.04.2021 г.);

Заведующий кафедрой  И.Н.Гуло

Советом физико-математического факультета (протокол № 10 от 26.05.2021 г.)

Оформление учебной программы и сопровождающих ее материалов действующим требованиям Министерства образования Республики Беларусь соответствует

Методист учебно-методического отдела

 С.А.Стародуб

Директор библиотеки

 Н.П.Сятковская

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Программа дисциплины по выбору студента «Теория функций действительной переменной» составлена для студентов физико-математического факультета в соответствии с требованиями образовательного стандарта высшего образования специальности 1-02 05 01 Математика и информатика.

«Теория функций действительной переменной» основывается на классическом анализе и теории множеств, тесно связана с линейной алгеброй и геометрией. Этот курс играет важную роль в системе математического образования будущих учителей математики. При изучении этой учебной дисциплины студенты рассмотрят вопросы, изучение которых необходимо для их будущей профессии: сравнение бесконечных множеств, строение линейных множеств, сведениями об обобщении как методе исследования на примере теории интеграла Лебега.

**Место учебной дисциплины** в системе подготовки специалиста и связь с другими учебными дисциплинами

Учебная дисциплина относится к циклу специальных дисциплин компонента учреждения высшего образования.

**Связь с другими учебными дисциплинами**

Материал учебной дисциплины «Теория функций действительной переменной» связан с учебными дисциплинами «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения» и «Теорией функций». Основные понятия и методы теории функций действительной переменной должны быть в настоящее время необходимым элементом образования любого школьного учителя старших классов. Научно-технический прогресс ставит перед школьным педагогом задачу не только прекрасно владеть основными понятиями школьной математики, но и понимать их место в современной математике, знать их происхождение, развитие и использование в различных областях естествознания. Поэтому данная учебная дисциплина ставит себе целью показать происхождение и развитие таких фундаментальных понятий математики как число, множество, функция, а также познакомить студентов с современной теорией множеств, теорией меры и интеграла, играющих огромную роль в различных областях математики.

**Цель:** знакомит студентов с современным состоянием математики в области измеримости множеств, функций и их интегрирования.

**Задачи учебной дисциплины:**

- усвоение специфического понятийного аппарата теории функций;
- совершенствование навыков самостоятельной работы с научной литературой;
- обобщение основных понятий и структур математического анализа.

Программа составлена в соответствии с требованиями образовательного стандарта высшего образования и рассчитана на изучение дисциплины в

шестом семестра обучения, что обусловлено необходимостью получения студентами достаточных знаний по математическому анализу, алгебре и аналитической геометрии, а также приобретения ими необходимой математической культуры. Предполагается свободное владение основными понятиями математического анализа (предел, непрерывность, производная, интеграл, ряд), знание важнейших свойств непрерывных функций, и теорем курса дифференциального и интегрального исчисления.

Согласно образовательному стандарту высшего образования, изучение учебной дисциплины «Теория функций действительной переменной» должно обеспечить формирование у студентов компетенций.

### **Требования к академическим компетенциям**

Специалист должен:

АК-5. Быть способным порождать новые идеи (обладать креативностью).

АК-8. Обладать навыками устной и письменной коммуникации.

АК-9. Уметь учиться, повышать свою квалификацию в течение всей жизни.

### **Требования к социально-личностным компетенциям**

Специалист должен:

СЛК-3. Обладать способностью к межличностным коммуникациям.

СЛК-4. Владеть навыками здоровьесбережения.

### **Требования к профессиональным компетенциям**

Специалист должен быть способен:

#### **Обучающая деятельность**

ПК-1. Управлять учебно-познавательной и (учебно-исследовательской) деятельностью обучающихся.

ПК-2. Использовать оптимальные методы, формы и средства обучения.

ПК-3. Организовывать и проводить учебные занятия различных видов и форм.

ПК-4. Организовывать самостоятельную работу обучающихся.

#### **Развивающая деятельность**

ПК-11. Развивать учебные возможности и способности обучающихся на основе системной педагогической диагностики.

ПК-12. Развивать навыки самостоятельной работы обучающихся с учебной, справочной, научной литературой и др. источниками информации.

ПК-13. Организовывать и проводить коррекционно-педагогическую деятельность с обучающимися.

ПК-14. Предупреждать и преодолевать неуспеваемость обучающихся.

#### **Ценностно-ориентационная деятельность**

ПК-15. Формулировать образовательные и воспитательные цели.

ПК-16. Оценивать учебные достижения обучающихся, а также уровни их воспитанности и развития.

ПК-17. Осуществлять профессиональное самообразование и самовоспитание с целью совершенствования профессиональной деятельности.

ПК-18. Организовывать целостный педагогический процесс с учетом современных образовательных технологий и педагогических инноваций.

ПК-19. Анализировать и оценивать педагогические явления и события прошлого в свете современного научного знания.

### **Требования к уровню освоения содержания учебной дисциплины**

В результате изучения учебной дисциплины студент должен овладеть следующими знаниями и умениями.

Студент должен *знать*:

- основные понятия и теоремы теории функций действительной переменной;

- понятия меры Лебега, измеримого множества и измеримой функции;
- определение и свойства интеграла Лебега;

Студент должен *уметь*:

- сравнивать бесконечные множества;
- вычислять интеграл Лебега от измеримых и суммируемых функций.

В результате изучения дисциплины по выбору студент должен *владеть* практическими умениями применять полученные математические знания в нестандартных ситуациях науки и жизни.

Методы обучения рекомендованы к использованию в процессе преподавания дисциплины: сообщение преподавателя (слово преподавателя), беседа, анализ, построение алгоритмов, моделирование, математический эксперимент, самостоятельная работа.

Информационно-методическая часть учебной программы включает список основной и дополнительной литературы, методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов, перечень используемых средств диагностики результатов учебной деятельности.

Дисциплина по выбору студента «Теория функций действительной переменной» изучается при дневной форме получения образования в 6 семестре. Согласно учебным планам на изучение учебной дисциплины всего отводится 82 часа, из них аудиторных 52 часа (лекций – 28 часов, практических занятий – 24 часа), на самостоятельную работу студентов отведено 30 часов.

Текущая аттестация – зачёт – предполагает ответы на теоретические вопросы и выполнение практического задания.

## СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

### **Тема 1. Мощность множества**

Первоначальные сведения о множествах. Соответствия между множествами. Понятие мощности множества. Счетные множества и их свойства. Счётность множеств целых, рациональных и алгебраических чисел. Множества мощности континуума. Теорема Кантора – Бернштейна. Сравнение мощностей. Проблема континуума. Существование множеств больших мощностей.

### **Тема 2. Мера Лебега. Измеримые функции**

Линейные множества. Строеие линейных открытых и замкнутых множеств. Совершенные множества. Канторово множество. Мера ограниченного открытого множества. Мера ограниченного замкнутого множества. Внешняя и внутренняя меры ограниченного множества и их свойства. Измеримые множества. Измеримые функции и их свойства.

### **Тема 3. Интеграл Лебега. Пространства $L_1, L_2$**

Определение интеграла Лебега от ограниченной функции. Верхняя и нижняя суммы Лебега и их основные свойства. Существование и основные свойства интеграла Лебега. Предельный переход под знаком интеграла. Сравнение интегралов Римана и Лебега. Интеграл от неотрицательной измеримой функции. Суммируемые функции. Пространства  $L_1, L_2$ . Вычисление интеграла Лебега от неограниченных функций.

### **Тема 4. Ряды Фурье**

Ортогональные функции. Ортогональная система функций. Замкнутость и полнота системы тригонометрических функций. Ряд Фурье. Разложение кусочно-гладкой функции в ряд Фурье.

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА**  
(дневная форма получения образования)

Номер раздела, темы, занятия	Название раздела, темы, занятия; перечень изучаемых вопросов	Количество аудиторных часов			Самостоятельная работа студентов	Материальное обеспечение занятия (наглядные, методические пособия и др.)	Литература	Формы контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия				
1	2	3	4	5	6	7	8	9
<b>6 семестр</b>								
1.	<b>Мощность множества</b>	<b>6</b>	<b>6</b>		<b>8</b>			
1.1.	Первоначальные сведения о множествах. Соответствия между множествами. Понятие мощности множества. Счетные множества и их свойства. Счётность множеств целых, рациональных и алгебраических чисел.	2			2	Тесты	[2-8, 12]	Устный опрос
1.2.	Соответствия между множествами. Понятие мощности множества. Счетные множества и их свойства.		2				[1, 9]	
1.3	Множества мощности континуума. Теорема Кантора – Бернштейна. Сравнение мощностей. Проблема	2			2	Тесты	[2-8, 12]	Устный опрос

	континуума. Существование множеств больших мощностей.							
1.4	Множества мощности континуума. Сравнение мощностей.		2			Индивидуальные задания	[1, 9]	Самостоятельная работа
1.5	Множества на числовой прямой. Замкнутые и открытые множества, их строение. Совершенные множества. Совершенное множество Кантора.	2			4		[1-10, 12]	
2.	<b>Мера Лебега. Измеримые функции</b>	<b>6</b>	<b>6</b>		<b>6</b>			
2.1	Линейные множества. Строение линейных открытых и замкнутых множеств. Совершенные множества. Канторово множество.	2			2	Тесты	[1-10, 12]	Устный опрос
2.2	Линейные множества. Строение линейных открытых и замкнутых множеств. Совершенные множества. Канторово множество.		2			Индивидуальные задания	[1, 9]	
2.3	Мера ограниченного открытого множества. Мера ограниченного замкнутого множества. Внешняя и внутренняя меры ограниченного множества и их свойства. Измеримые множества.	2			2	Тесты	[2-8, 12]	Устный опрос
2.4	Мера ограниченного открытого множества. Мера ограниченного замкнутого множества. Внешняя и внутренняя меры ограниченного		2		2	Индивидуальные задания	[1, 9]	



	множества и их свойства. Измеримые множества.							
2.5	Измеримые функции и их свойства. Измеримость почти всюду непрерывных функций.	2						
2.6	Измеримые функции и их свойства. Эквивалентность измеримых функций. Измеримость суммы, произведения, частного двух измеримых функций.		2				[1, 9]	Самостоятельная работа
<b>3</b>	<b>Интеграл Лебега. Пространства <math>L_1, L_2</math></b>	<b>8</b>	<b>6</b>		<b>10</b>			
3.1	Определение интеграла Лебега от ограниченной функции. Верхняя и нижняя суммы Лебега и их основные свойства.	2			4		[2-8, 12]	Устный опрос
3.2	Верхняя и нижняя суммы Лебега и их основные свойства.		2			Индивидуальные задания	[1, 9]	
3.3	Существование и основные свойства интеграла Лебега. Предельный переход под знаком интеграла. Сравнение интегралов Римана и Лебега.	2			2		[2-8, 12]	
3.4	Методы вычисления интеграла Лебега. Сравнение интегралов Римана и Лебега.		2				[1, 9]	Самостоятельная работа
3.5	Интеграл от неотрицательной измеримой функции. Суммируемые функции. Пространства $L_1, L_2$ . Вычисление интеграла Лебега от неограниченных функций.	4			2		[2-8, 12]	Устный опрос
3.6	Суммируемые функции. Пространства		2		2		[1, 9]	

	$L_1, L_2$ . Вычисление интеграла Лебега от неограниченных функций.							
<b>4</b>	<b>Ряды Фурье</b>	<b>8</b>	<b>6</b>		<b>6</b>			
4.1	Ортогональные функции. Ортогональная система функций. Замкнутость и полнота системы тригонометрических функций.	4			2	Тесты	[2-8, 12]	Устный опрос
4.2	Ортогональные функции. Ортогональная система функций. Замкнутость и полнота системы тригонометрических функций.		2		4	Индивидуальные задания	[1, 9]	Самостоятельная работа
4.3	Ряд Фурье. Разложение кусочно-гладкой функции в ряд Фурье.	4				Тесты	[2-8, 12]	Устный опрос
4.4	Ряд Фурье. Разложение кусочно-гладкой функции в ряд Фурье.		4			Индивидуальные задания		
	<b>Всего</b>	<b>28</b>	<b>24</b>		<b>30</b>			<b>зачёт</b>

# ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

## ЛИТЕРАТУРА

### Основная литература

1. Кротов, В. Г. Математический анализ : учеб. пособие / В. Г. Кротов. – Минск : Белорус. гос. ун-т, 2017. – 376 с.
2. Теория функций действительной переменной [Электронный ресурс] : учеб.-метод. комплекс / сост. И. Н. Гуло // Репозиторий БГПУ. – Режим доступа: <http://elib.bspu.by/handle/doc/44474>. – Дата доступа: 12.05.2021.

### Дополнительная литература

1. Ильин, В. А. Основы математического анализа : учеб. для студентов : в 2 ч. / В. А. Ильин, Э. Г. Поздняк. – М. : Наука, 2002. – Ч. 2. – 464 с.
2. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 576 с.
3. Майсеня, Л. І. Курс вышэйшай матэматыкі. Тэорыя функцый камплекснай зменнай. Аперацыйнае злічэнне : падруч. для студэнтаў / Л. І. Майсеня. – Мінск : Інтэрпрэссэрвіс, 2003. – 480 с.
4. Макаров, М. П. Дополнительные главы математического анализа / М. П. Макаров. – М. : Наука, 1968. – 312 с.
5. Маркушевич, А. И. Введение в теорию аналитических функций / А. И. Маркушевич, Л. А. Маркушевич. – М. : Просвещение, 1977. – 320 с.
6. Натансон, И. П. Теория функций вещественной переменной / И. П. Натансон. – М. : Наука, 1974. – 476 с.
7. Очан, Ю. С. Сборник задач и теорем по теории функций действительного переменного / Ю. С. Очан. – М. : Просвещение, 1983. – 228 с.
8. Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И. И. Привалов. – М. : Наука, 1984. – 432 с.
9. Сидоров, Ю. В. Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин. – М. : Наука, 1980. – 480 с.
10. Стельмашук, Н. Т. Элементы теории аналитических функций : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. вузов / Н. Т. Стельмашук, В. А. Шилинец. – Минск : ДизайнПРО, 1997. – 191 с.
11. Шабат, Б. В. Введение в комплексный анализ : учеб. для вузов : в 2 ч. / Б. В. Шабат. – 4-е изд., стер. – М. : Лань, 2004. – Ч. 1 : Функции одного переменного. – 336 с.
12. Шахно, К. У. Элементы теории функций комплексной переменной и операционного исчисления / К. У. Шахно. – Минск : Выш. шк., 1975. – 400 с.

## МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

В процессе изучения дисциплины по выбору студента «Теория функций действительной переменной» большое внимание уделяется организации самостоятельной работы студентов, как при изучении теоретических вопросов, так и при выполнении практических заданий.

Самостоятельная работа студентов реализуется как в процессе аудиторных занятий (на лекциях, практических занятиях), так и на консультациях, при выполнении индивидуальных заданий и т.д.

Формы самостоятельной работы студентов:

- выполнение индивидуальных заданий, направленных на развитие у студентов самостоятельности и методической компетенции;
- выполнение обучающих и контрольных тестов;

Основными **задачами** самостоятельной работы студентов являются:

- углубление знаний и умений студентов, полученных в ходе плановых учебных занятий;
- формирование когнитивных компетенций;
- подготовка студентов к занятиям, к промежуточному и итоговому контролю;
- формирование навыков самостоятельной научно-исследовательской деятельности.

Самостоятельная работа студентов проводится в предусмотренном учебным планом объеме.

### ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА

№ п/п	Название темы раздела	Кол-во часов на СРС	Задание	Форма выполнения
	<b>Мощность множества</b>	<b>8</b>		
1.	Первоначальные сведения о множествах. Соответствия между множествами. Понятие мощности множества. Счетные множества и их свойства. Счётность множеств целых, рациональных и алгебраических чисел.	2	[6, с. 9–33] [2, с. 21–31]	Доказать сформулированные на лекции теоремы
2.	Множества мощности континуума. Теорема Кантора – Бернштейна. Сравнение мощностей. Проблема континуума. Существование множеств больших мощностей.	2	[7, с. 9–17 №27–61]	Письменный отчет с решением (не менее 5 задач)

3.	Множества на числовой прямой. Замкнутые и открытые множества, их строение. Совершенные множества. Совершенное множество Кантора.	4	[6, с. 34–55] [2, с. 56–65]	Доказать сформулированные на лекции теоремы
	<b>Мера Лебега. Измеримые функции</b>	<b>6</b>		
4.	Линейные множества. Строение линейных открытых и замкнутых множеств. Совершенные множества. Канторово множество.	2	[6, с. 56–85] [2, с. 251–261]	Доказать сформулированные на лекции теоремы
5.	Мера ограниченного открытого множества. Мера ограниченного замкнутого множества. Внешняя и внутренняя меры ограниченного множества и их свойства. Измеримые множества.	2	[7, с. 37–43 №235–245]	Письменный отчет с решением (не менее 5 задач)
6.	Мера ограниченного открытого множества. Мера ограниченного замкнутого множества. Внешняя и внутренняя меры ограниченного множества и их свойства. Измеримые множества.	2	[7, с. 37–43 №294–296, с.47–48 №320–326]	Письменный отчет с решением (не менее 5 задач)
	<b>Интеграл Лебега. Пространства <math>L_1, L_2</math></b>	<b>10</b>		
7.	Определение интеграла Лебега от ограниченной функции. Верхняя и нижняя суммы Лебега и их основные свойства.	4	[6, с. 109–125] [2, с. 291–310]	Доказать сформулированные на лекции свойства
8.	Существование и основные свойства интеграла Лебега. Предельный переход под знаком интеграла. Сравнение интегралов Римана и Лебега.	2	[7, с. 85–87 №565–575]	Письменный отчет с решением (не менее 5 задач)
9.	Интеграл от неотрицательной измеримой функции. Суммируемые функции. Пространства $L_1, L_2$ .	2	[6, с.129–142, с.154–179] [2, с.375–388]	Доказать сформулированные на лекции теоремы

	Вычисление интеграла Лебега от неограниченных функций.			
10.	Суммируемые функции. Пространства $L_1, L_2$ . Вычисление интеграла Лебега от неограниченных функций.	2	[7, с. 88–89 №581–586]	Письменный отчет с решением (не менее 5 задач)
	<b>Ряды Фурье</b>	<b>6</b>		
11.	Ортогональные функции. Ортогональная система функций. Замкнутость и полнота системы тригонометрических функций.	2	[6, с.257–261, с.289–299] [2, с.389–390, с.406–412]	Доказать сформулированные на лекции теоремы
12.	Ортогональные функции. Ортогональная система функций. Замкнутость и полнота системы тригонометрических функций.	4	[6, с.266–279, с.311–334, с. 370–377]	Привести примеры ортогональных систем функций и доказать их ортогональность (не менее 3)

### **ПЕРЕЧЕНЬ ИСПОЛЬЗУЕМЫХ СРЕДСТВ ДИАГНОСТИКИ РЕЗУЛЬТАТОВ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ**

При изучении дисциплины «Теория функций действительной переменной» планируется проведение устного опроса и проверочных работ в рамках учебных часов, отведенных на аудиторные занятия по дисциплине. Промежуточный контроль знаний осуществляется посредством тестовых заданий, проверочных работ.

Для оценки достижений и уровня знаний студента при изучении дисциплины целесообразно применить инструментарий, который включает

- самостоятельное решение задачи у доски;
- блиц-опрос при обсуждении плана решения задачи и отдельных пунктов плана;
- контроль ведения рабочих тетрадей.

**ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ**  
по учебной дисциплине «Теория функций действительной переменной»

Название дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы по изучаемой учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
1	2	3	4
Математический анализ	Кафедра математики и методики преподавания математики	С содержанием данной учебной дисциплины согласуются, замечаний и предложений нет	Протокол №10 от 27.04.2020
Алгебра	Кафедра математики и методики преподавания математики	С содержанием данной учебной дисциплины согласуются, замечаний и предложений нет	Протокол №10 от 27.04.2020
Дифференциальные уравнения	Кафедра математики и методики преподавания математики	С содержанием данной учебной дисциплины согласуются, замечаний и предложений нет	Протокол №10 от 27.04.2020
Теория функций	Кафедра математики и методики преподавания математики	С содержанием данной учебной дисциплины согласуются, замечаний и предложений нет	Протокол №10 от 27.04.2020