Заснавальнік і выдавец –
рэдакцыя часопіса
"Адукацыя і выхаванне"

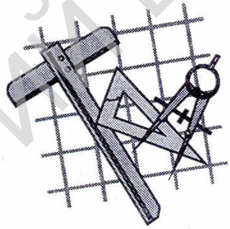
Галоўны рэдактар
У.П.Пархоменка

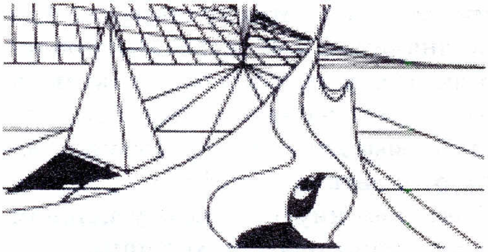
220004, г. Мінск,
вул. Караля, 16;
тэл.: 220-54-81, 220-54-10

*Штоквартальны
навукова-метадычны часопіс
Выдаецца з IV квартала 1995 года
Рэгістрацыйны № 1205*

4(13)1998

МАТЭМАТЫКА:
праблемы выкладання





В.В.Шлыков, *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии БГПУ им. М.Танка,*
Л.Е.Зезетко, *учительница математики и информатики СШ № 58 г. Минска*

ПЛАНИМЕТРИЯ И СТЕРЕОМЕТРИЯ РЯДОМ

Курс стереометрии в школе позволяет решать многие общеобразовательные и воспитательные задачи. Он является уникальным, так как интегрирует в себе возможности для развития логического мышления, пространственных представлений и интуиции, творческих способностей и эстетических вкусов учащихся, помогает ощутить красоту и гармонию окружающего мира. Развитие, которое получают учащиеся в процессе изучения стереометрии, является важным и для их дальнейшего самообразования, независимо от того, какую профессию они изберут. Уровень пространственных представлений является одним из показателей умственных способностей человека, необходимым элементом его общего образования. Не обладая преимуществами перед другими предметами в развитии логического мышления, курс стереометрии предоставляет возможности для развития пространственных представлений и образного мышления у учащихся. Недооценка важности раздела стереометрии в системе школьного образования мешает решению многих вопросов по оптимизации и эффективному изучению не только математики, но и других школьных предметов.

Трудности, с которыми сталкиваются учащиеся при изучении стереометрии, в значительной мере обусловливаются низким уровнем развития у них пространственных представлений. Стереотипы, выработанные в процессе изучения планиметрии, мешают эффективному усвоению понятий стереометрии, умению видеть в “плоском” рисунке геометрию пространства. Немаловажную роль в успешном изучении стереометрии естественно играет хороший уровень подготовки учащихся по планиметрии.

Таким образом, для более успешного изучения стереометрии полезно реализовывать два подхода:

1. При изучении систематического курса планиметрии находить возможности рассмотрения пространственных фигур, так, чтобы это, с одной стороны, способствовало изучению планиметрии, а с другой — развитию пространственных представлений.

2. В процессе изучения стереометрии находить различные приемы развития пространственных представлений, учить умению видеть планиметрию в различных плоскостях.

Именно такой двойственный подход наиболее приемлем для достижения цели эффективного изучения геометрии.

Отметим, что желание строго аксиоматически построить школьный курс стереометрии, стремление довести в явном виде аксиоматику до сознания учащихся приводят к отрицательным результатам. На наш взгляд, нет необходимости и невозможно (по крайней мере, на общеобразовательном уровне) достичь понимания учащимися существа аксиоматического построения курса. Такой подход приводит к потере интереса к предмету со стороны учащихся. Пренебрежение вопросами развития интуиции, пространственных представлений, образного мышления не способствует развитию логического мышления, а погоня за призраком аксиоматического построения приводит к потере красоты формы и содержания предмета, уменьшает потенциальные возможности стереометрии по развитию

конструктивных способностей, нужных любому культурному человеку.

Необходим подход к построению курса стереометрии, позволяющий в равной степени уделять внимание развитию логического мышления и пространственных представлений. Следует обратить внимание на изменение структуры теоретического и задачного материала. В связи с этим методически оправданным является рассмотрение в начале курса вопросов изображения фигур и на интуитивно-наглядном уровне сведений о многогранниках. Это позволяет изменить систему практических заданий, наполнить уроки стереометрии содержательными, доступными и развивающими задачами действительно геометрического характера. Соответствующая система упражнений уже в начале изучения стереометрии способствует эффективному развитию навыков графического моделирования, умению осуществлять образное конструирование геометрических объектов. Как уже отмечалось, важную роль при изучении понятий стереометрии играет хороший уровень подготовки учащихся по планиметрии. Указанный подход позволяет через систему задач, в которых рассматриваются многогранники, осуществлять повторение планиметрии и изучать понятия, связанные с многогранниками.

Рассмотрим некоторые задачи, способствующие достижению указанных целей. Остановимся на задачах, связанных с построением изображений геометрических фигур.

Задача 1. Построить изображение прямоугольника.

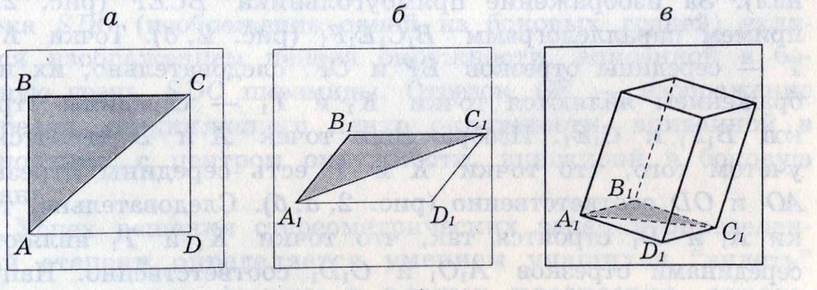


Рис. 1

Решение

Пусть $ABCD$ — прямоугольник (фигура — оригинал). За изображение треугольника ABC (рис. 1, *а*) можно принять любой треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 1, *б*, *в*). Так как $AB||CD$ и $BC||AD$, следовательно, точка D_1 — изображение вершины D прямоугольника $ABCD$ — определяется условием $A_1B_1||C_1D_1$ и $B_1C_1||A_1D_1$ (параллельные отрезки изображаются параллельными отрезками). Таким образом, изображение прямоугольника $ABCD$ является параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$. Например, на рисунке 1, *в* четыре грани прямоугольного параллелепипеда изображаются параллелограммами, а две — прямоугольниками (прямоугольник — частный случай параллелограмма).

Задача 2. Постройте изображение правильного шестиугольника.

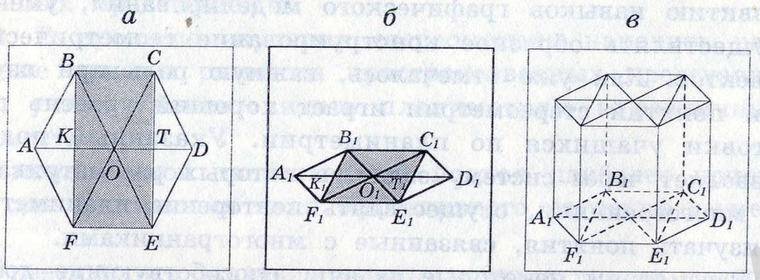


Рис. 2

Решение

Пусть $ABCD$ — правильный шестиугольник (оригинал). За изображение прямоугольника $BCEF$ (рис. 2, *а*) примем параллелограмм $B_1C_1E_1F_1$ (рис. 2, *б*). Точки K и T — середины отрезков BF и CF, следовательно, их изображением являются точки K_1 и T_1 — середины отрезков B_1F_1 и C_1E_1. Изображения точек A и D строятся с учетом того, что точки K и T есть середины отрезков AO и OD соответственно (рис. 2, *а*, *б*). Следовательно, точки A_1 и D_1 строятся так, что точки K_1 и T_1 являются серединами отрезков A_1O_1 и O_1D_1 соответственно. Например, на рисунке 2, *в* изображена шестиугольная призма, в основании которой лежит правильный шестиугольник.

Задача 3. Дано изображение $SABCD$ правильной четырехугольной пирамиды, все ребра которой равны между собой. Постройте изображение отрезка, соединяющего центр окружности, вписанной в основание, с центром окружности, вписанной в боковую грань.

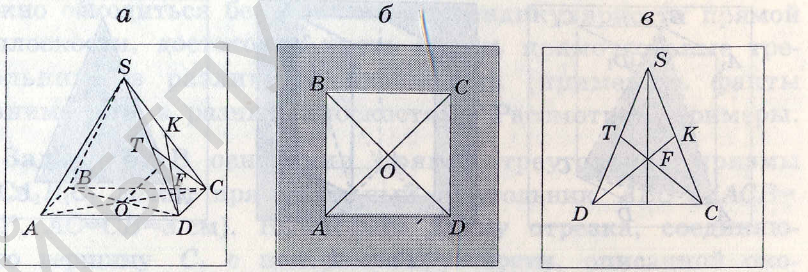


Рис. 3

Решение

Центр окружности, вписанной в основание (квадрат) данной пирамиды, есть точка пересечения его диагоналей. Следовательно, его изображением является точка O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ (рис. 3, *а*). Центром окружности, вписанной в боковую грань, является точка пересечения биссектрис ее углов. Так как боковая грань — равносторонний треугольник, то биссектрисы этого треугольника являются и медианами. Таким образом, точка F пересечения медиан DK и CT треугольника SDC (изображение одной из боковых граней) является изображением центра окружности, вписанной в боковую грань SDC пирамиды. Отрезок OF — изображение отрезка, соединяющего центр окружности, вписанной в основание, с центром окружности, вписанной в боковую грань.

Успех решения стереометрических задач в определенной степени определяется умением учащихся "видеть" геометрические фигуры в разных плоскостях, определять их форму и доказывать их равенство или подобие. Поэтому естественно уделить внимание такого рода задачам.

Задача 4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$— правильная четырехугольная призма. Верно ли, что треугольник AB_1C является равнобедренным?

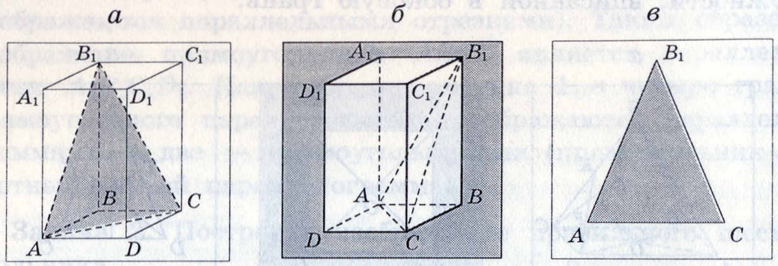


Рис. 4

Решение

Треугольник AB_1C является равнобедренным, так как $AB_1=B_1C$. Действительно, $\Delta AA_1B_1=\Delta CC_1B_1$ ($\angle AA_1B_1=\angle CC_1B_1=$ $=90°$, так как боковые грани правильной призмы — прямоугольники; $A_1B_1=B_1C_1$, так как основание правильной призмы — квадрат; $AA_1=BB_1$, $BB_1=CC_1$). Отсюда следует, что $AB_1=B_1C$, т.е. ΔAB_1C равнобедренный.

Задача 5. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильная шестиугольная призма. Точка O — середина отрезка AE. Верно ли, что отрезок F_1O есть высота треугольника AF_1E?

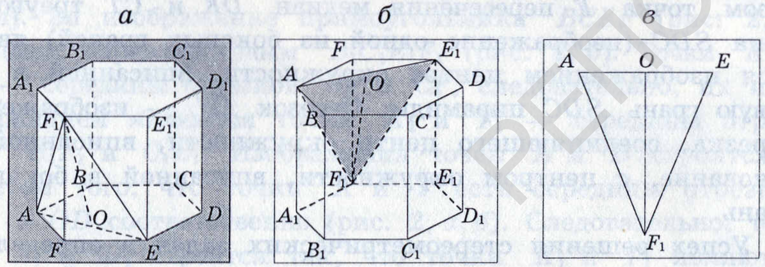


Рис. 5

Решение

Треугольник AF_1E является равнобедренным. Действительно, $\Delta AFF_1=\Delta EFF_1$ (боковые грани правильной призмы — прямоугольники, следовательно, $\angle AFF_1=\angle F_1FE=90°$, $AF=FE$, FF_1— общая сторона). Таким образом, $AF_1=EF_1$. В равнобедренном треугольнике AF_1F медиана F_1O является и высотой.

При решении ряда задач в начале курса стереометрии можно обходиться без понятия перпендикулярности прямой и плоскости, достаточно уметь видеть прямоугольные треугольники в различных плоскостях (применять факты планиметрии в разных плоскостях). Рассмотрим примеры.

Задача 6. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC ($\angle ACB=$ $=90°$, $AC=CB=3$ см). Вычислите длину отрезка, соединяющего вершину C_1 с центром окружности, описанной около треугольника ABC, если длина бокового ребра равна $\sqrt{7}$ см.

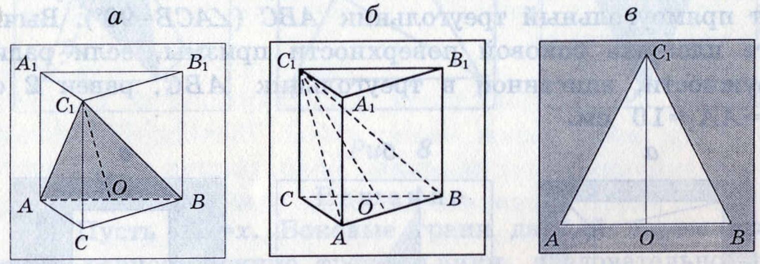


Рис. 6

Решение

1) Центр окружности, описанной около треугольника ABC, есть точка O — середина гипотенузы AB. Таким образом, необходимо вычислить длину отрезка C_1O.

2) $\Delta ACC_1=\Delta BCC_1$ ($\angle ACC_1=\angle BCC_1=90°$, так как боковые грани прямой призмы есть прямоугольники, $AC=CB$, CC_1 — общая сторона). Следовательно, $AC_1=BC_1$, т.е. треугольник AC_1B равнобедренный.

3) Медиана C_1O в равнобедренном треугольнике AC_1B является высотой.

Из прямоугольного треугольника C_1OB ($OB=\frac{1}{2}AB=$ $=\frac{3}{2}\sqrt{2}$ см, $C_1B=\sqrt{CB^2+CC_1^2}=4$ см) находим катет $C_1O=$ $=\sqrt{C_1B^2-OB^2}=\sqrt{\frac{23}{2}}$ см.

Ответ: $\sqrt{\frac{23}{2}}$ см.

Задача 7. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ACB ($\angle ACB=90°$, $AC=3$ см, $BC=2AC$). Точка F — середина ребра BC. Вычислите длину отрезка C_1M, где точка M — середина отрезка AF, а $CC_1=$ 2см.

Ответ: $\sqrt{\frac{17}{2}}$ см.

Задача 8. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC ($\angle ACB=90°$). Вычислите площадь боковой поверхности призмы, если радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, равен 2 см, $AB=AA_1=10$ см.

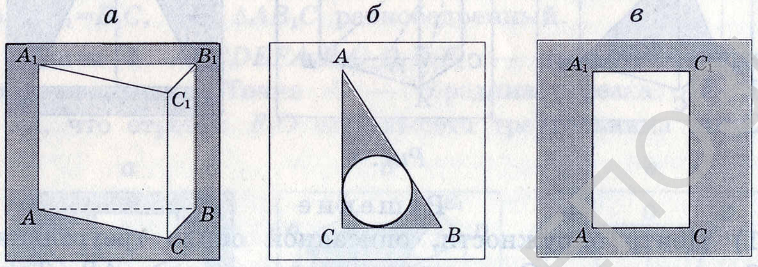


Рис. 7

Решение

1) Площадь боковой поверхности призмы есть сумма площадей ее боковых граней, т.е. сумма площадей прямоугольников AA_1B_1B, AA_1C_1C, CC_1B_1B (рис. 7, *а*, *б*). Таким образом, площадь боковой поверхности $S_{бок}=AC\cdot CC_1+$ $+CB\cdot CC_1+BA\cdot CC_1=(AC+CB+BA)CC_1=P_{ABC}\cdot CC_1$.

2) Для нахождения периметра P_{ABC} воспользуемся формулой для радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник $r_{ABC}=p_{ABC}-AB$. Имеем $2=p_{ABC}-10$, $p_{ABC}=$ $=12$ см. Следовательно, $P_{ABC}=2p_{ABC}=24$ см.

3) Теперь вычисляем $S_{бок}=P_{ABC}\cdot CC_1=24\cdot 10=240$ см^2.

Ответ: 240 см^2.

Задача 9. *SABCD* — правильная четырехугольная пирамида, все ребра которой равны между собой. Точки T и F — середины ребер SA и SC соответственно. Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды, если площадь треугольника DTF равна $8\sqrt{5}$ см^2.

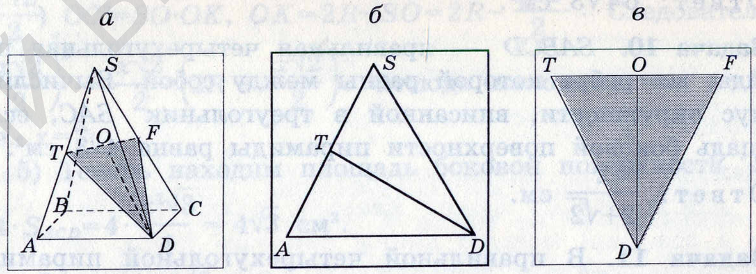


Рис. 8

Решение

1) Пусть $AD=x$. Боковые грани данной пирамиды — равные равносторонние треугольники, следовательно, площадь ее боковой поверхности $S_{бок}=4\cdot\frac{x^2\sqrt{3}}{4}=x^2\sqrt{3}$.

2) В прямоугольном треугольнике ATD ($\angle ATD=90°$, $AD=x$, $AT=\frac{x}{2}$) катет $TD=\sqrt{AD^2-AT^2}=\frac{x\sqrt{3}}{2}$ (рис. 8, *а*, *б*).

3) Треугольник DTF равнобедренный ($TD=FD$, так как $\Delta TAD=\Delta FCD$). Если O — середина отрезка TF, тогда медиана DO в равнобедренном треугольнике DTF является высотой. Из прямоугольного треугольника TOD

($\angle TOD=90^\circ$, $TD=\frac{x\sqrt{3}}{2}$, $TO=\frac{1}{2}TF=\frac{x\sqrt{2}}{4}$) находим катет $OD=\sqrt{TD^2-TO^2}=\frac{x}{2}\cdot\sqrt{\frac{5}{2}}$.

4) Площадь треугольника DTF $S_{DTF}=\frac{1}{2}TF\cdot OD=\frac{1}{2}\cdot\frac{x\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{x^2\sqrt{5}}{8}$. Из уравнения $\frac{x^2\sqrt{5}}{8}=8\sqrt{5}$ находим $x=8$, т.е. $AD=8$ см.

5) Теперь находим площадь боковой поверхности $S_{бок}=4\cdot\frac{x^2\sqrt{3}}{4}=64\sqrt{3}$ см².

Ответ: $64\sqrt{3}$ см².

Задача 10. *SABCD* — правильная четырехугольная пирамида, все ребра которой равны между собой. Вычислите радиус окружности, вписанной в треугольник *SAC*, если площадь боковой поверхности пирамиды равна $4\sqrt{3}$ см².

Ответ: $\frac{2}{2+\sqrt{2}}$ см.

Задача 11. В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD* все ребра равны между собой. Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды, если радиус окружности, описанной около треугольника *SAC*, равен $\sqrt{2}$ см.

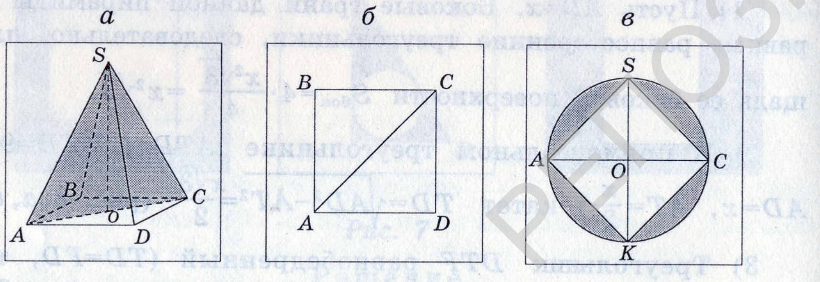


Рис. 9

Решение

1) Пусть $SC=CD=x$. Точка O — середина отрезка AC. Тогда $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=x\sqrt{2}$, $OC=\frac{1}{2}AC=\frac{x\sqrt{2}}{2}$ (рис. 9, *а*, *б*).

2) Треугольник SAC равнобедренный, следовательно, медиана SO является и высотой этого треугольника. В прямоугольном треугольнике SOC катет $SO=\sqrt{SC^2-OC^2}=\frac{x\sqrt{2}}{2}$.

3) Если K — точка пересечения SO с окружностью, описанной около треугольника SAC, тогда треугольник SCK прямоугольный ($\angle SCK=90^\circ$).

4) В треугольнике SCK ($\angle SCK=90^\circ$, $SK=2R$, $SO=OC=\frac{x\sqrt{2}}{2}$) $OC^2=SO\cdot OK$, $OK=2R-SO=2R-\frac{x\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, $\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{x\sqrt{2}}{2}\left(2R-\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)$. Отсюда находим, что $x=R\sqrt{2}$, т.е. $x=2$.

5) Теперь находим площадь боковой поверхности $S_{бок}=4\cdot S_{SCD}=4\cdot\frac{x^2\sqrt{3}}{4}=4\sqrt{3}$ см².

Ответ: $4\sqrt{3}$ см².

Задача 12. Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды равна $4\sqrt{3}$ см². Точки T и F — середины ребер AD и SD соответственно. Вычислите радиус окружности, описанной около треугольника STF, если все ребра пирамиды равны между собой.

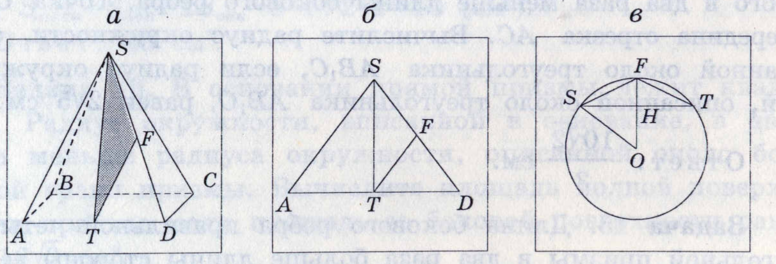


Рис. 10

Р е ш е н и е

1) Для нахождения радиуса окружности, описанной около треугольника, воспользуемся формулой $R_{STF}=\frac{SF\cdot TF\cdot ST}{4S_{STF}}$ (рис. 10, *а*, *б*, *в*).

2) Площадь $S_{STF}=\frac{1}{4}S_{ASD}=\frac{\sqrt{3}}{4}$ (так как все боковые грани пирамиды равные треугольники и $S_{ASD}=\frac{1}{4}S_{бок}$).

3) Пусть $AS=x$. Тогда $S_{ASD}=\frac{1}{4}S_{бок}$, $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$. Отсюда $x=2$ см.

4) Теперь $SF=TF=\frac{1}{2}SD=1$ см. В прямоугольном треугольнике STD катет $ST=\sqrt{SD^2-TD^2}=\sqrt{3}$ см.

5) Следовательно, $R_{STF}=\frac{SF\cdot TF\cdot ST}{4S_{STF}}=\frac{1\cdot 1\cdot\sqrt{3}}{4\frac{\sqrt{3}}{4}}=1$ (см).

О т в е т: 1 см.

Задача 13. В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат, длина стороны которого в два раза меньше длины бокового ребра. Вычислите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если площадь треугольника BC_1D равна 6 см^2.

О т в е т: 32 см^2.

Задача 14. В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат, длина стороны которого в два раза меньше длины бокового ребра. Точка O — середина отрезка AC. Вычислите радиус окружности, описанной около треугольника AB_1C, если радиус окружности, описанной около треугольника AB_1O, равен $2\sqrt{5}$ см.

О т в е т: $\frac{10\sqrt{2}}{3}$ см.

Задача 15. Длина бокового ребра правильной четырехугольной призмы в два раза больше длины стороны ее основания. Вычислите площадь полной поверхности призмы, если длина отрезка BO равна $\sqrt{9}$ см (точка O — точка пересечения диагоналей грани DD_1C_1C).

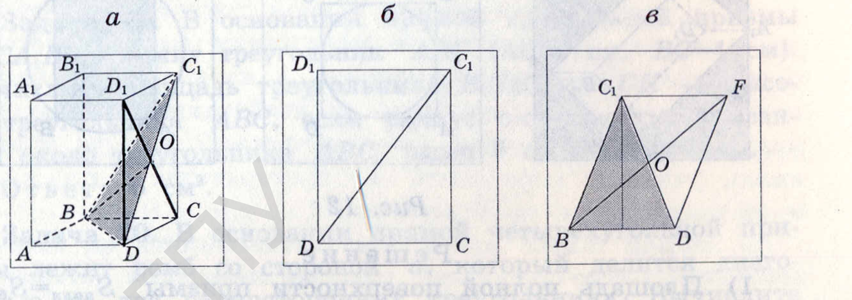


Рис. 11

Р е ш е н и е

1) Пусть $DC=x$, $CC_1=2x$. Боковые грани правильной призмы являются прямоугольниками, следовательно, в прямоугольном треугольнике C_1CD гипотенуза $C_1D=\sqrt{DC^2+CC_1^2}=x\sqrt{5}$ (рис. 11, *а*, *б*, *в*).

2) Рассмотрим равнобедренный треугольник BC_1D (рис. 11, *а*, *в*). Пусть точка F лежит на продолжении BO так, что $BO=OF$. Тогда четырехугольник BC_1FD параллелограмм.

3) Сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон, следовательно, $2(BC_1^2+BD^2)=C_1D^2+BF^2$. Таким образом, $2(5x^2+2x^2)=5x^2+4BO^2$. Отсюда находим, что $x=2$, т.е. $DC=2$ см.

4) Теперь находим площадь полной поверхности призмы $S_{полн}=S_{бок}+2S_{осн}=8\cdot 4+2\cdot 4=40$ (см^2).

О т в е т: 40 см^2.

Задача 16. В основании прямой призмы лежит квадрат. Радиус окружности, вписанной в основание, в два раза меньше радиуса окружности, описанной около боковой грани призмы. Вычислите площадь полной поверхности призмы, если площадь ее боковой поверхности равна $16\sqrt{3}$ см^2.

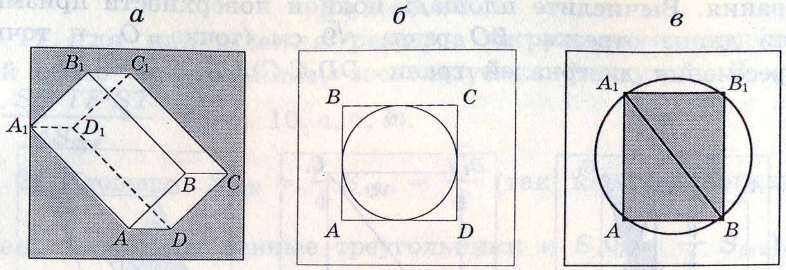


Рис. 12

Решение

1) Площадь полной поверхности призмы $S_{полн}=S_{бок}+$ $+2S_{осн}$. По условию задачи $S_{бок}=16\sqrt{3}$ см^2, следовательно, достаточно вычислить $S_{осн}$ (рис. 12, *а*, *в*).

2) Пусть x — длина радиуса окружности, вписанной в основание, y — радиус окружности, описанной около боковой грани.

3) В прямоугольном треугольнике D_1DC $\angle D_1DC=90°$, так как боковые грани прямой призмы—прямоугольники, $DC=2x$, $DD_1=\sqrt{D_1C^2-DC^2}=\sqrt{4y^2-4x^2}$.

По условию задачи $2x=y$, $2x\sqrt{4y^2-4x^2}=4\sqrt{3}$. Отсюда находим, что $x=1$, $y=2$, т.е. $DC=2$ см. Следовательно, $S_{полн}=S_{бок}+2S_{осн}=2\cdot4+16\sqrt{3}=8(1+2\sqrt{3})$ см^2.

Ответ: $8(1+2\sqrt{3})$ см^2.

Задача 17. В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник ($AB=BC=13$ см). Радиус окружности, вписанной в боковую грань, содержащую основание треугольника ABC, равен высоте, проведенной к этому основанию, и равен 5 см. Вычислите разность между боковой поверхностью призмы и площадью ее основания.

Ответ: 380 см^2.

Задача 18. В основании треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник. К боковой стороне длиной 4 см проведена медиана, длина которой 3 см. Вычислите площадь боковой поверхности призмы, если длина бокового ребра призмы равна $(8-\sqrt{10})$ см.

Ответ: 54 см^2.

Задача 19. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC ($AC=9$ см, $BC=4$ см). Вычислите площадь треугольника B_1CH, где CH — высота треугольника ABC, если радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 6 см, а $AA_1=3$ см.

Ответ: 6 см^2.

Задача 20. В основании прямой четырехугольной призмы лежит ромб со стороной a, который делится диагональю на два равносторонних треугольника. Вычислите площадь полной поверхности призмы, если длина ее бокового ребра равна радиусу вписанной в основание окружности.

Ответ: $2a^2\sqrt{3}$ см^2.

Задача 21. В основании прямой призмы лежит треугольник со сторонами 9 см, 10 см, 17 см. Длина бокового ребра призмы равна половине длины высоты треугольника, проведенной к меньшей стороне. Вычислите полную поверхность призмы.

Ответ: 216 см^2.

Задача 22. В основании прямой призмы лежит треугольник со сторонами 3 см, 25 см, 26 см. Радиус окружности, описанной около боковой грани, содержащей меньшую сторону треугольника, равен этой стороне. Вычислите полную поверхность призмы.

Ответ: $(72+162\sqrt{3})$ см^2.

Рассмотренные примеры задач показывают возможность организации повторения фактов планиметрии и одновременно изучения понятий, связанных с многогранниками.

Для построения логики решения стереометрической задачи важно уметь выделять ("видеть") планиметрическую фигуру, которая является ключевой для того или иного логического шага, определять ее метрическую характеристику. В связи с этим наряду с графическими моделями пространственных фигур мы обязательно рассматриваем и выносные чертежи (проекцию плоской фигуры на плоскость, в которой она лежит). Такой подход помогает более спокойно воспринимать искажения фигур, которые происходят при их изображениях в параллельной проекции, акцентировать внимание на необходимости определения фактической формы рассматриваемой фигуры (оригинала), учиться “переходить” от пространства к плоскости и от плоскости к пространству.

В данной статье мы больше остановились на задачах вычислительного характера, которые позволяют достигнуть поставленной цели. В то же время отметим, что рассмотрение в начале курса стереометрии сведений о многогранниках и их сечениях предоставляет большие возможности для развития пространственных представлений учащихся в процессе решения позиционных задач. К рассмотрению таких задач мы обратимся в будущей статье.

Н.С.Абрамович

О ПРИМЕНЕНИИ КВАДРАТНЫХ НЕРАВЕНСТВ К НАХОЖДЕНИЮ НАИБОЛЬШЕГО И НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ

В данной статье изложен один из элементарных приемов нахождения наименьшего и наибольшего значений функций $y=f(x)$. В целом ряде случаев этот метод прост и эффективен. Следуя данному приему, аргумент x аналитически выражается через y и определяется множество допустимых значений y. Это множество и будет множеством значений заданной функции. Зная множество значений функции, можно указать ее наименьшее и наибольшее значения, если они существуют.

Рассмотрим **примеры**.