Заснавальнік і выдавец — рэдакцыя часопіса "Адукацыя і выхаванне"

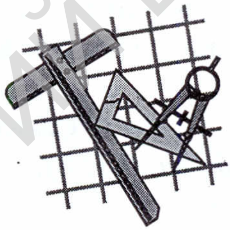
Галоўны рэдактар
У.П.Пархоменка

220004, г. Мінск,
вул. Караля, 16;
тэл.: 220-54-81, 220-54-10

Штоквартальны
навукова-метадычны часопіс
Выдаецца з IV квартала 1995 года
Рэгістрацыйны № 1205

Выпуск 6 '97
I квартал

МАТЭМАТЫКА:
прабемы выкладання



В.В.Шлыков, *доцент кафедры алгебры и геометрии БГПУ им.М.Танка*

РАЗВИТИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

1. В начале знакомства с аксиомами стереометрии пространственные представления у учащихся развиты еще недостаточно хорошо. Поэтому важно, чтобы при изучении первых сведений по стереометрии, носящих абстрактный характер, усвоение изучаемого материала строилось не на заучивании и формализме, а на соединении живого воображения и логических рассуждений.

Пространственные представления являются одним из условий успешного усвоения знаний по стереометрии, следовательно, при изучении уже первых аксиом стереометрии и следствий из них необходимо находить приемы их развития. Естественно, что при этом большую роль играют рисунки (изображения) фигур. Поэтому не может быть оправданной "экономия" на рисунках при изучении геометрического материала, так как они дают возможность сделать предмет стереометрии наглядным, доступным и интересным (иногда в учебных пособиях по геометрии такая "экономия" осуществляется, но, как известно, скупой платит дважды). Кроме того, красивый рисунок – это и средство эстетического воспитания. Интересные рисунки, иногда необычные по отношению к традиционным [1], [2], могут быть отправным пунктом, мотивировкой для изучения того или иного понятия, теми ступеньками, которые поднимают учащегося к пониманию симметрии и красоты не только в геометрии, но и природе [3], [4].

Известный механик и педагог Н.Е.Жуковский говорил: "Если формулы и подстановки некоторыми из изучающих легко запоминаются, то так же скоро они исчезают из памяти; но раз усвоенные геометрические образы, рисующие картину рассматриваемого явления, надолго западают в голову и живут в воображении учащегося". Таким образом, приводя иллюстрации к аксиомам или теоремам, мы создаем опорные сигналы, способствующие лучшему пониманию изучаемых понятий и свойств геометрических фигур, помогаем учащимся решать двойственную задачу: с одной стороны, учиться заключать геометрическую интуицию в рамки математической строгости, а с другой – уметь пользоваться убедительностью интуитивных геометрических выводов, понимать, что иногда интуиция может и подводить.

Изучая стереометрию, полезно рассматривать в качестве иллюстраций различные изображения (рисунки) для одних и тех же геометрических фигур. Сопоставление различных изображений фигур дает возможность ясно понять существо изучаемого вопроса, помогает видеть в "плоском" рисунке геометрию пространства, так как различный взгляд на один и тот же геометрический объект дает более полную информацию о нем, усиливает ощущение пространства. Проиллюстрируем сказанное на примерах. Обратимся к аксиомам и некоторым следствиям из них.

A_1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость и притом только одна.

На рис. 1, *а*, *б* (*ABCD* – тетраэдр) α – плоскость, проходящая через точки *A*, *B* и *C*.

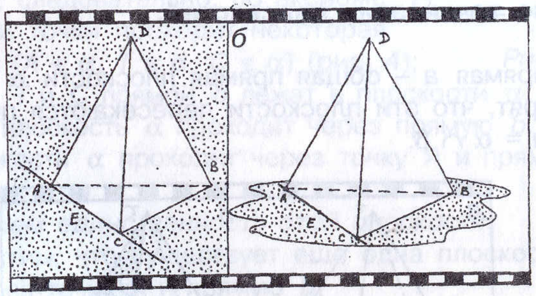


Рис. 1

Точка *E* лежит на прямой *AC*. Прямая *AC* не проходит через точки *D* и *B*. Точка *D* не лежит в плоскости α, а плоскость *ADC* не проходит через точку *B*.

A_2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки данной прямой лежат в этой плоскости.

Если каждая точка прямой *a* лежит в плоскости α, то говорят, что прямая *a* лежит в плоскости α или плоскость α проходит через прямую *a*, и пишут $a \subset \alpha$.

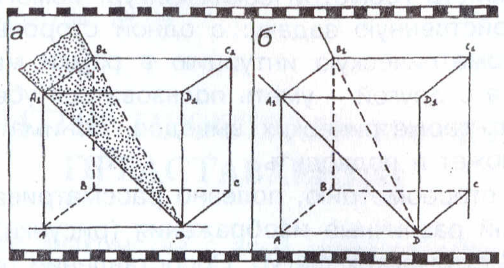


Рис. 2

На рис. 2 ($ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб) β – плоскость, проходящая через точки A, D и C. Прямая AD лежит в плоскости β, а прямые DB_1 и CC_1 в плоскости β не лежат. Плоскость DA_1B_1 не проходит через прямую AD.

Если прямая a и плоскость α имеют только одну общую точку O, то говорят, что они пересекаются в точке O, и пишут: $O = a \cap \alpha$.

На рис. 2, *а*, *б* прямая CC_1 пересекает плоскость β в точке C, а прямая DB_1 – в точке D ($D = \beta \cap DB_1$).

A_3. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

Если прямая a – общая прямая плоскости α и плоскости β, то говорят, что эти плоскости пересекаются по прямой a, и пишут: $a = \alpha \cap \beta$.

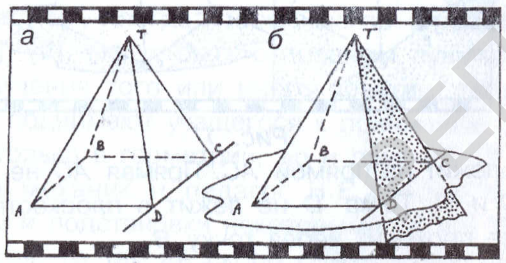


Рис. 3

На рис. 3, *а*, *б* ($TABCD$ – правильная четырехугольная пирамида) γ – плоскость, проходящая через точки A, D и C. Прямая CD лежит на каждой из плоскостей γ и TDC (точки C и D лежат в каждой из этих плоскостей, значит, по аксиоме

A_2 прямая CD лежит в каждой из них), следовательно, указанные плоскости пересекаются по прямой CD ($CD = \gamma \cap TDC$).

Рассмотрение различных изображений фигуры, дополняющих друг друга, дает возможность в процессе их сопоставления активизировать зрительную память, естественным образом реализовать тезис, что все познается в сравнении. Определенные элементы двойственности, развивающие пространственные представления и способствующие пониманию изучаемого материала, необходимо применять и при доказательстве теорем. Обратимся снова к примерам.

Теорема 1. **Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.**

Доказательство.

I. *Докажем, что такая плоскость существует:*

1) пусть точка A не лежит на прямой b ($A \notin b$);

2) обозначим через T и C две точки, лежащие на прямой b;

3) точки A, T и C не лежат на одной прямой, следовательно, по аксиоме A_1 через эти точки проходит некоторая плоскость α ($A \in \alpha$, $T \in \alpha$, $C \in \alpha$) (рис. 4);

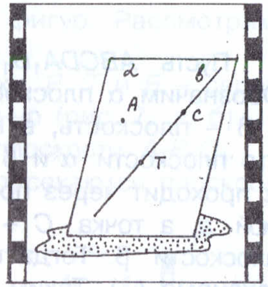


Рис. 4

4) точки T и C прямой b лежат в плоскости α, значит, по аксиоме A_2 плоскость α проходит через прямую b. Таким образом, плоскость α проходит через точку A и прямую b ($A \in \alpha$, $b \subset \alpha$).

II. *Докажем единственность этой плоскости:*

1) допустим, что существует еще одна плоскость β, проходящая через точку A и прямую b;

2) так как плоскость β проходит через прямую b, а точки T и C лежат на прямой b, то плоскость β проходит через точки A, T и C, не лежащие на одной прямой;

3) по аксиоме A_1 существует только одна плоскость, проходящая через точки A, T и C. Следовательно, плоскость β совпадает с плоскостью α. Теорема доказана.

Например, пусть γ – плоскость, проходящая через вершины A, B и D параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 5, *а*, *б*). Точки A и D лежат в плоскости γ, следовательно, прямая AD

лежит в этой плоскости (аксиома A_2). Существует единственная плоскость, проходящая через точку B и прямую AD (теорема 1), значит, плоскость γ сопадает с плоскостью, которая проходит через точку B и прямую AD. Плоскости γ и ADB_1 пересекаются по прямой AD.

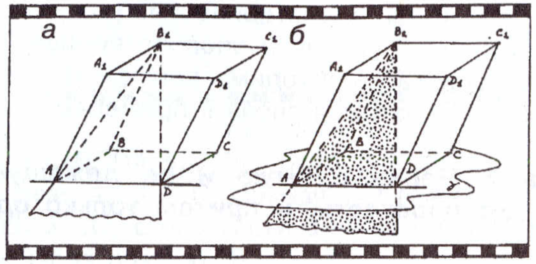


Рис. 5

Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед (рис. 6, *а*, *б*). Обозначим α плоскость, проходящую через прямые AD и DC, а β – плоскость, в которой лежат прямые a и b. Докажем, что плоскости α и β пересекаются по прямой AC. Плоскость α проходит через прямую AC. Так как точка A лежит на прямой a, а точка C – на прямой b, то точки A и C лежат в плоскости β. Тогда плоскость β проходит через прямую AC (аксиома A_2). Таким образом, прямая AC лежит в каждой из плоскостей α и β, т.е. указанные плоскости пересекаются по прямой AC ($AC = \alpha \cap \beta$).

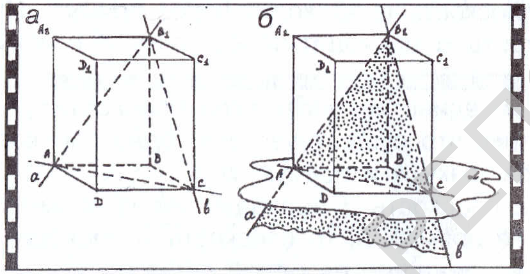


Рис. 6

2. Большие возможности для развития пространственных представлений и усвоения знаний по стереометрии предоставляют задачи, связанные с построениями на изображениях пространственных фигур, в частности, задачи на построение сечений. В процессе решения таких задач аксиомы стереометрии усваиваются осознанно, а не заучиваются формально,

конкретизируется теоретический материал и, следовательно, эффективно формируются пространственные представления у учащихся. Время, затраченное на решение таких задач, будет окупаться при изучении всех разделов стереометрии. Поэтому естественно, что указанные задачи не должны концентрироваться в одном месте, а быть органичной частью различных параграфов курса стереометрии.

Заметим, что позиционные задачи на построение обладают определенной двойственностью: с одной стороны, в процессе их решения совершенствуются пространственные представления, а с другой – успех при решении задач во многом определяется уровнем этих представлений у учащихся. Остановимся на некоторых методических приемах, способствующих разрешению этой дилеммы. Как уже отмечалось, полезно рассматривать парные изображения фигур. Рассмотрим задачу.

Задача 1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Точки P, T и E – середины ребер A_1B_1, B_1C_1 и AA_1 соответственно (рис. 7, *а*, *б*).

а) Докажите, что прямая PT лежит в плоскости $A_1B_1C_1$.

б) Постройте прямую, по которой пересекаются плоскости PTE и AA_1D_1.

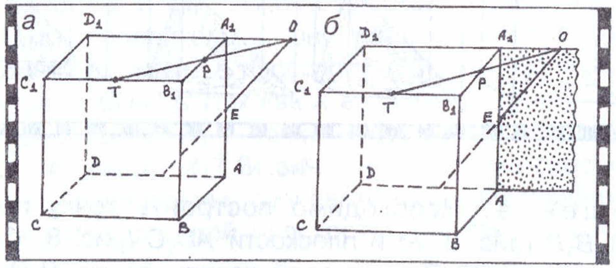


Рис. 7

Решение.

а) Точки B_1 и C_1 лежат в плоскости $A_1B_1C_1$. Тогда по аксиоме A_2 каждая точка прямой B_1C_1, значит, и точка T лежит в плоскости $A_1B_1C_1$. Аналогично, точка P лежит на прямой A_1B_1, следовательно, она лежит в плоскости $A_1B_1C_1$. Итак, точки P и T лежат в плоскости $A_1B_1C_1$. Отсюда (аксиома A_2) следует, что каждая точка прямой PT лежит в плоскости $A_1B_1C_1$, т.е. прямая PT лежит в плоскости $A_1B_1C_1$.

б) Прямые PT и A_1D_1 лежат в одной плоскости и не параллельны, значит, они пересекаются в некоторой точке

O ($O = PT \cap A_1D_1$). Плоскости PTE и AA_1D_1 пересекаются по прямой OE. Действительно, точка O лежит в плоскости PTE, так как она лежит на прямой PT. Точка E также лежит в плоскости PTE, следовательно, *прямая OE лежит в плоскости PTE*. С другой стороны, точка O лежит на прямой A_1D_1, значит, она лежит в плоскости AA_1D_1. Так как точка E лежит на прямой AA_1, то она также лежит в плоскости AA_1D_1. Отсюда следует, что *прямая OE лежит в плоскости AA_1D_1*. Таким образом, прямая OE лежит в каждой из плоскостей PTE и AA_1D_1, т.е. указанные плоскости пересекаются по прямой OE.

Решение задачи на построение в пространстве воспринимается не формально, если выполнить каждый шаг построения на отдельном рисунке (создать "мультфильм" решения задачи). При таком подходе зрительная память учащегося более прочно фиксирует каждый этап построения, появляется возможность увидеть динамику решения задачи.

Задача 2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте точку пересечения прямой B_1D и плоскости AD_1C.

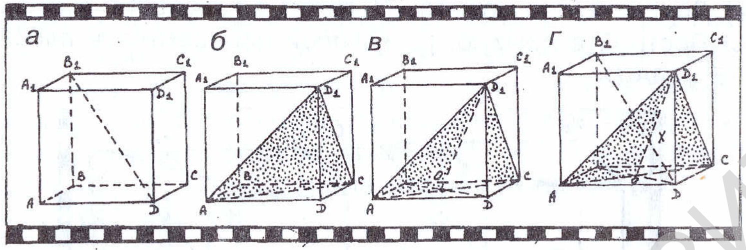


Рис. 8

Решение. Необходимо построить точку пересечения прямой B_1D (рис. 8, *а*) и плоскости AD_1C (рис. 8, *б*). Рассмотрим плоскость BB_1D, в которой лежит прямая B_1D. Построим линию пересечения плоскостей BB_1D и AD_1C. Указанные плоскости пересекаются по прямой OD_1, где O – точка пересечения прямых AC и BD (рис. 8, *в*). Прямые B_1D и OD_1 лежат в одной плоскости BB_1D и не параллельны, следовательно, они пересекаются в некоторой точке X (рис. 8, *г*). Точка X – точка пересечения прямой B_1D и плоскости AD_1C.

Рассмотрим еще один подход к развитию пространственных представлений у учащихся при построении сечений многогранников. Суть его в том, чтобы решать позиционную задачу на различных изображениях многогранника, повернутого в пространстве. Для получения изображения повернутого многогранника достаточно на каком-либо его изображении переобозначить вершины, например, по ходу часовой стрелки. Рассмотрим пример.

Задача 3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки O, E и T – середины ребер AB, AD и CC_1 соответственно (рис. 9, *а*, *б*). Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки O, E и T.

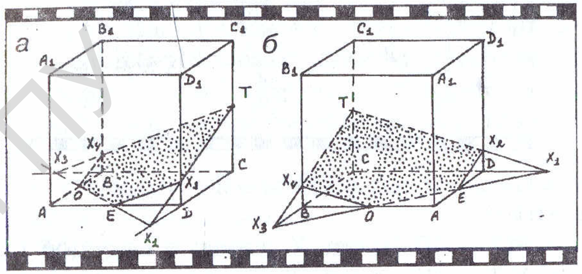


Рис. 9

Решение.

1) Проведем отрезок OE, по которому секущая плоскость OET пересекает грань $ABCD$.

2) Прямые OE и DC лежат в плоскости грани $ABCD$ и не параллельны, следовательно, они пересекаются в некоторой точке X_1. Точка X_1 лежит в плоскости OET (так как $X_1 \in OE$) и в плоскости грани DD_1C_1C (так как $X_1 \in DC$).

3) Найдем точку X_2 – точку пересечения прямой X_1T и ребра DD_1 (прямые X_1T и DD_1 лежат в плоскости грани DD_1C_1C и не параллельны, следовательно, они пересекаются). Точка X_2 лежит в секущей плоскости (так как $X_2 \in X_1T$) и на ребре DD_1.

Таким образом, плоскость OET пересекает грани AA_1D_1D и DD_1C_1C по отрезкам EX_2 и TX_2 соответственно.

4) Построим точку X_3, в которой пересекаются прямые OE и BC (лежат в плоскости грани $ABCD$ и не параллельны, поэтому пересекаются). Точка X_3 лежит в секущей плоскости (так как $X_3 \in OE$) и в плоскости грани BB_1C_1C (так как $X_3 \in BC$).

5) Построим точку X_4 – точку пересечения прямой X_3T и ребра BB_1. Точка X_4 лежит в секущей плоскости (так как $X_4 \in X_3T$) и на ребре BB_1. Следовательно, секущая плоскость пересекает грани AA_1B_1B и BB_1C_1C по отрезкам OX_4 и X_4T соответственно. Пятиугольник OX_4TX_2E – искомое сечение.

Задача 4. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Точки P, Q и T лежат на ребрах A_1B_1, BB_1 и AC соответственно (рис. 10, *а*, *б*, *в*). Постройте сечение призмы плоскостью PQT.

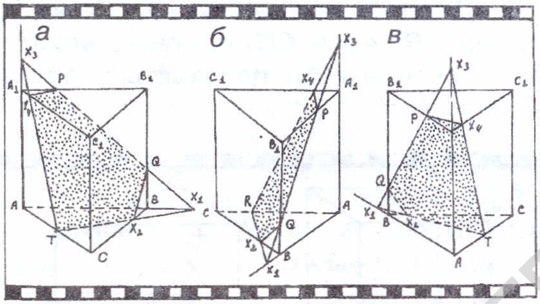


Рис. 10

Решение.

1) $X_1 = PQ \cap AB$ (точка X_1 лежит в секущей плоскости).

2) $X_2 = X_1T \cap BC$ (точка X_2 – вершина сечения).

3) $X_3 = PQ \cap AA_1$ (секущая плоскость проходит через точку X_3).

4) $X_4 = X_3T \cap A_1C_1$ (точка X_4 – вершина сечения).

Пятиугольник TX_4PQX_2 – искомое сечение призмы.

Если сечение построено на некотором изображении многогранника (например, рис. 10, *а*), то в качестве самостоятельной работы можно предложить построить сечения на изображениях повернутого многогранника. Заметим, что построения на этих изображениях не являются простыми повторениями построений, выполненных на рис. 10, *а*. Имея в качестве "консультанта" этот рисунок, учащиеся для выполнения работы вынуждены анализировать его и "вращать" себя в пространстве, т.е. развивать пространственные представления. С точки зрения развития пространственных представлений здесь решаются фактически три задачи и при этом экономится время за счет того, что запись решения одна и та же для всех случаев.

1. *Фоменко А.Т.* Наглядная геометрия и топология. – М.: МГУ, 1992.

2. *Тарасов Л.В.* Этот удивительно симметричный мир. – М.: Просвещение, 1982.

3. *Вейль Г.* Симметрия. – М.: Наука, 1968.

4. *Берже М.* Геометрия. – Т. 1, 2. – М.: Мир, 1984.