АДУКАЦЫЯ І ВЫХАВАННЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Серыя "У дапамогу педагогу"
заснавана ў 1995 годзе

Навукова-метадычны часопіс
Выдаецца з IV квартала 1995 года
Зарэгістраваны Міністэрствам інфармацыі
Рэспублікі Беларусь
Пасведчанне № 686 ад 16.09.2009 г.
Перарэгістраваны 03.01.2013 г.
Выходзіць 6 разоў у год

Заснавальнік і выдавец –
РУП «Выдавецтва
"Адукацыя і выхаванне"»
Міністэрства адукацыі
Рэспублікі Беларусь

1(84) • 2013

МАТЭМАТЫКА

Вул. Будзённага, 21,
220070, г. Мінск,
тэл.: 297-93-18 (адк. сакратар),
297-93-22 (аддзел маркетынгу),
факс: 297-91-49
e-mail: aiv@aiv.by
http://www.aiv.by

1/2013

УДК 37.016:514-057.87

Л. Л. Тухолко, старший преподаватель кафедры математики и методики преподавания математики БГПУ,
В. В. Шлыков, доктор педагогических наук

МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМЫ ЗАДАЧ ДЛЯ РАЗВИТИЯ КОНСТРУКТИВНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ X–XI КЛАССОВ ПРИ ОБУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ

Аннотация

В данной работе рассматривается методика построения системы задач для развития конструктивной деятельности учащихся X—XI классов, разработанная на основе конструктивного подхода. Раскрывается роль задач конструктивного характера для интеграции функций такой системы задач, обосновывается их типология. В работе выявляется предметное содержание деятельности, связанной с конструированием способов решения задач. Предлагается подход к построению системы задач для развития этой деятельности с использованием пересекающихся окрестностей базисных задач.

Summary

This work views studies the methods of the building the system of problems for development of the constructive activity of the pupils in X—XI forms, based on the constructive approach. The work reveals the part of constructive problems for the integration of functions in such system of problems, and specifies their typology. The article reviews the subject content of the activity, linked with the construction of the means problem solving. The work suggests the approach to constructing the system of problems for developing this type of activity using the intersectional areas of base problems.

Ключевые слова: система задач, конструктивный подход к построению системы задач, типология задач конструктивного характера, способ решения задачи, базисная задача, пересекающиеся окрестности базисных задач.

Введение

В работе [1] обоснована необходимость развития конструктивной деятельности учащихся при обучении геометрии для овладения одним из методов создания объектов — методом конструирования. Это развитие достигается за счёт обогащения конструктивной деятельности геометрическим содержанием, приобретения учащимися знаний о приёмах конструктивных действий в геометрии, формирования конструктивных геометрических умений и навыков, накопления опыта конструктивной деятельности. Развитие конструктивной деятельности проявляется в постепенном переходе действий учащегося по конструированию объектов с *исполнительского* уровня, характеризующегося внешней регуляцией, на *репродуктивный*, отличающийся внутренней регуляцией действий при построении известных учащемуся конструкций, далее на *прикладной* уровень, связанный с применением метода конструирования, затем на *творческий*, предполагающий конструирование новых по замыслу объектов.

Одним из наиболее важных условий развития конструктивной деятельности при обучении геометрии, выявленных в работе [1], является систематическое включение в неё учащихся посредством специально сконструированной системы задач. К этой системе предъявляются следующие *требования*: обеспечение развития конструктивной деятельности; соответствие образовательным нормативным документам, логике школьного курса геометрии; соблюдение дидактических принципов; обеспечение достижения образовательных, развивающих и воспитательных целей обучения геометрии; выполнение требований полноты, непрерывного повторения, постепенного нарастания сложности и других требований к системам задач [2—6]; соблюдение принципа минимальной достаточности, состоящего в построении системы задач из минимального набора задач, обеспечивающего выполнение перечисленных требований [2].

Аналогичные требования, за исключением обеспечения развития конструктивной деятельности, предъявляются ко всем системам учебных задач по геометрии, но известные методики их построения раскрывают лишь общие подходы и частные приёмы выполнения некоторых действий, например, отбора задач [2; 5—7]. Поэтому они не обеспечивают основы для формирования конкретных представлений о последовательности действий по моделированию системы задач и способах выполнения этих действий. Терминология, применяемая при описании различных методик, не согласована: понятия элементарной, опорной, базисной, ключевой задачи используются в ряде случаев как равнозначные.

Исследований по проблеме развития конструктивной деятельности и по проблеме конструирования системы задач, обеспечивающей это развитие, в методической литературе нет. Представляет интерес разработка методики построения системы задач, обеспечивающей планомерное развитие конструктивной деятельности учащихся при обучении геометрии. Актуальность разработки такой методики обусловлена противоречиями между:

- низким уровнем геометрической подготовки учащихся и значимостью конструктивной деятельности для его повышения;
- возможностями школьного курса геометрии для развития конструктивной деятельности учащихся и отсутствием системы задач, обеспечивающей планомерное развитие этой деятельности;
- потребностью в системе задач для развития конструктивной деятельности учащихся при обучении геометрии и отсутствием обоснованной методики её построения.

Предметное содержание конструктивной деятельности при обучении учащихся геометрии определяется типом конструируемых объектов. В соответствии с содержанием можно выделить следующие компоненты конструктивной деятельности в курсе геометрии: пространственный (конструирование образов геометрических фигур); графический (конструирование графических моделей геометрических фигур); абстрактный (конструирование геометрических фигур); логический (конструирование геометрических предложений); символический (конструирование символических моделей геометрических предложений) и деятельностный (конструирование способов решения геометрических задач). Рассмотрим вопрос о развитии следующих компонентов: конструирование геометрических фигур и их моделей и конструирование способов решения задач. В качестве основы для построения модели требуемой системы задач выберем курс стереометрии.

Основная часть

Общие подходы к построению системы задач для развития конструктивной деятельности учащихся при обучении геометрии. В методической литературе сформулированы требования к системе задач, а требований к методике построения системы задач нет. Для выявления компонентов методики построения системы задач обратимся к теории деятельности.

Деятельность субъекта, мотивированного к созданию объекта, обладающего требуемыми свойствами, представляет собой последовательность действий: формирование цели деятельности, выбор метода моделирования цели, постановка задачи по моделированию цели выбранным методом, поиск подходящих способов действий, уточнение цели (создание проекта), разработка плана исполнительных действий, их выполнение и коррекция результатов в соответствии с поставленной целью, анализ продуктов деятельности, экспертная оценка основного продукта, вывод о результатах деятельности. Выполнение этих действий оптимизируется, если субъекту деятельности известна методика создания требуемого объекта, которая даёт ясное представление о свойствах создаваемого объекта, методе его моделирования, подходящих способах действий, последовательности их выполнения и способах проверки модели.

Для формирования представлений о требуемых свойствах проектируемой системы задач и выбора метода её моделирования выясним содержание понятия системы задач. Г. И. Ковалёвой даётся следующее определение: «система задач — это совокупность упорядоченных и подобранных в соответствии с поставленной целью задач, действующих как одно целое, взаимосвязь и взаимодействие которых приводят к намеченному результату» [6, с. 17]. В этом определении перечислено много признаков системы задач. Чтобы выявить существенные признаки системы задач, проанализируем различные определения понятия системы.

В первых определениях понятия системы (от греч. σύστημα — составленное из частей, сочетание) выделялись два признака: 1) наличие элементов и 2) наличие связей (отношений) между элементами и со средой [8]. Но согласно принципу всеобщей связи все объекты связаны между собой, то есть каждый объект связан с каждым независимо от наблюдателя [9], поэтому «наличие связей» является свойством любой совокупности объектов. Отношение охватывает часть объектов, выделенных и соотнесённых наблюдателем. Оно характеризует один объект относительно другого, поэтому не является признаком системы.

Л. фон Берталанфи определил систему как «комплекс взаимодействующих компонентов» [9, с. 15]. В словарях понятие взаимодействия поясняется как «1. Взаимная связь явлений. 2. Взаимная поддержка» [10, с. 78]. Если понимать под действием объекта процесс выполнения им какой-либо функции, то *взаимодействие* объектов можно рассматривать как процесс совместного выполнения ими какой-либо функции. Взаимодействие объектов — существенный признак системы, так как в ходе взаимодействия объектов их совокупность приобретает свойства, не характерные для составляющих её объектов. Но определение системы, данное Л. фон Берталанфи, не подходит для системы задач, так как не ясно, как взаимодействуют задачи в составляемой ими системе до того, как их начал решать учащийся.

В некоторых определениях понятия системы указываются признаки упорядоченности, целостности, наличия общей цели функционирования элементов. Например, «система — это выделенное на основе определённых признаков упорядоченное множество взаимосвязанных элементов, объединённых общей целью функционирования и единством управления, и выступающее во взаимодействии со средой как целостное единство» [11, с. 16]. Целостным называют объект, «обладающий внутренним единством» [10, с. 873]. На наш взгляд, это единство является следствием объединения объектов для их взаимодействия. Упорядоченность является условием осуществления взаимодействия, поэтому упорядоченность — существенный признак системы. Понятие цели придаёт понятию системы субъективный характер, так как под целью принято понимать мысленно предвосхищаемый результат деятельности, то есть представляемый субъектом объект, обладающий требуемыми свойствами. Поэтому определения, в которых используется понятие цели, неприменимы, например, к системам, созданным природой.

В некоторых определениях понятия системы вместо понятия цели используется понятие результата. Например, П. К. Анохин даёт следующее определение: «системой можно назвать только такой комплекс избирательно вовлечённых компонентов, у которых взаимодействие и взаимоотношения принимают характер взаимоСОдействия компонентов на получение фокусированного полезного результата» [12, с. 80]. Понятие результата не подходит для систем, у которых взаимодействие элементов непрерывно продолжается. Поэтому для характеристики взаимодействия объектов в более поздних определениях понятия системы используется понятие функции, например: «техническая система — совокупность элементов, образующих новые свойства, которыми не обладают отдельно взятые элементы, и предназначенная для выполнения определённой технической функции» [13, с. 64].

Трактуя понятие функции объекта (от лат. *functio* — исполнение работы) как требование выполнения им определённого преобразования, а понятие *взаимодействия* объектов как процесс совместного выполнения ими какой-либо функции, под *системой* будем понимать *упорядоченную совокупность объектов, взаимодействие которых направлено на выполнение функций, не свойственных отдельно взятым объектам.* Учитывая, что система задач является продуктом деятельности человека, которая вызывается потребностями, под *системой задач* будем понимать *упорядоченную совокупность задач, взаимодействие которых направлено на выполнение требуемых функций, не свойственных отдельно взятым задачам.*

Выделяют два подхода к исследованию и построению систем: дескриптивный, состоящий в выявлении функций системы на основании анализа её структуры (от лат. *structura* — строение, порядок) и содержания, и конструктивный, предполагающий обратный порядок действий: по заданным функциям системы разрабатываются её содержание и структура [14]. Для построения системы задач, направленной на развитие конструктивной деятельности учащихся при обучении геометрии, применим *конструктивный подход*: выявим функции этой системы, затем выясним её содержание и структуру.

Подход раскрывает лишь направление деятельности. Метод в отличие от подхода раскрывает не только направление деятельности, но и последовательность действий, достаточных для достижения цели. В соответствии с конструктивным подходом к построению системы задач, направленной на развитие конструктивной деятельности учащихся при обучении геометрии, применим конструктивный метод, который состоит в выборе, комбинировании и соединении задач так, чтобы система обладала требуемыми функциями. В ходе выполнения перечисленных конструктивных действий на основании требуемых функций выявим конструктивные свойства (состав, взаимное расположение задач и способы их соединения в систему) и структурные свойства (порядок предъявления задач и связи между ними) проектируемой системы задач.

Таким образом, *методика построения системы задач* для развития конструктивной деятельности учащихся при обучении геометрии, разрабатываемая на основе «модели структуры конструктивной деятельности» [1], на наш взгляд, должна характеризовать следующие компоненты:

1) назначение проектируемой системы задач и её функции;

2) конструктивные свойства системы: её состав, взаимное расположение задач и способы их соединения в систему;

3) структурные свойства: порядок предъявления задач и связи между ними;

4) последовательность построения системы задач, обладающей перечисленными функциональными, конструктивными и структурными свойствами;

5) приёмы, используемые при построении системы задач.

Функции системы задач для развития конструктивной деятельности учащихся при обучении геометрии. Назначение проектируемой нами системы задач — развитие конструктивной деятельности учащихся при обучении геометрии, следовательно, она должна выполнять функции:

1) *пропедевтики конструктивной деятельности* — подготовки учащихся к конструктивной деятельности в ходе обучения выполнению отдельных конструктивных действий и их комбинаций;

2) *обогащения предметного содержания конструктивной деятельности* — обеспечения применения учащимися при конструировании новых для них объектов: геометрических фигур, символов, предложений, приёмов решения геометрических задач;

3) *обучения конструктивной деятельности* — организации деятельности учащихся по овладению знаниями о применении метода конструирования, приёмах конструктивных действий и формировании конструктивных умений и навыков;

4) *обогащения опыта конструктивной деятельности* — обеспечения возможности применения учащимися конструктивных геометрических знаний, умений и навыков;

5) *регуляции процесса развития конструктивной деятельности* — организации конструктивной деятельности на различных уровнях: исполнительском, репродуктивном, прикладном, творческом и стимулирования перехода на более высокий уровень;

6) *диагностики уровня развития конструктивной деятельности* — обеспечения средствами выявления этих уровней;

7) *обучения геометрии* — организации деятельности учащихся на всех этапах обучения геометрии: подведения к новому материалу, его изучения, запоминания, применения, обобщения и систематизации, контроля и коррекции знаний и умений;

8) *образования* — содействия формированию образа научной картины мира с точки зрения геометрии, на основе геометрического компонента содержания школьного математического образования;

9) *интеллектуального развития и воспитания* — содействия развитию познавательных процессов учащихся и обогащения их умственного опыта [15];

10) *индивидуализации и дифференциации* — обеспечения средствами для дифференцированного обучения геометрии с учётом индивидуальных особенностей учащихся;

11) *оптимизации процесса обучения геометрии* — предоставления средств для достижения целей обучения при минимально необходимых затратах времени и усилий учителей и учащихся [16].

Для конструирования *многофункциональной* системы задач необходимо найти *способы интеграции её функций*. В теории решения изобретательских задач (ТРИЗ) с этой целью используется приём универсализации, который состоит в применении в качестве элементов конструкции объектов, выполняющих несколько функций, благодаря чему нет необходимости в других объектах, выполняющих эти функции [17]. В качестве *многофункциональных задач*, выполняющих часть требуемых функций проектируемой нами системы, могут выступать задачи, связанные с конструированием геометрических фигур и их моделей. Для краткости назовём их *задачами конструктивного харак-*

тера. Выявим типы таких задач в курсе стереометрии и раскроем их функции.

Типология учебных задач конструктивного характера в курсе стереометрии. В работах [7] и [18] рассмотрены классификации геометрических задач конструктивного характера, которые разработаны на основе подхода, предложенного психологами Н. А. Менчинской и Т. В. Кудрявцевым, исследовавшими учебную конструктивно-техническую деятельность. В соответствии с этим подходом задачи конструктивного характера «классифицируются по результатам решения, при этом различают задачи на воссоздание объекта по образцу, на доконструирование, на переконструирование, на конструирование объекта» [18, с. 10]. В работе [7] к этому перечню добавлены задачи на реконструирование и деконструирование, а задачи на воссоздание объекта по образцу называются задачами на моделирование.

Учитывая трудность выявления и разбиения на непересекающиеся классы всех задач, связанных с конструированием геометрических фигур и их моделей, вместо понятия классификации будем использовать понятие типологии. На наш взгляд, типологии, предложенные в работах [7] и [18], требуют уточнения, так как признаки, по которым задачи конструктивного характера объединены в группы, не соответствуют выбранному авторами основанию типологии. Кроме того, некоторые задачи, размещённые на одном уровне типологии, должны находиться на разных уровнях, например, задачи на моделирование и на конструирование; на конструирование и доконструирование (переконструирование, реконструирование). Обоснуем эту точку зрения с учётом предложенной нами трактовки понятия конструирования, как процесса выбора, комбинирования и соединения объектов.

На наш взгляд, геометрическая задача на моделирование — это задача, формулировка которой определяет необходимость создания модели геометрической фигуры. Методы моделирования могут быть конструктивными и неконструктивными (объект, который может служить моделью, можно выделить из какого-либо объекта, получить другим методом). Средства моделирования также могут быть различными: графическими, физическими, компьютерно-графическими и т. д. Любая конструкция, построенная в соответствии с условием задачи, является моделью образа, сформированного на основании этого условия. Поэтому любую задачу на конструирование можно рассматривать как задачу на моделирование конструктивным методом или как задачу на конструирование модели объекта, обладающего требуемыми свойствами.

Пример задачи на моделирование геометрической фигуры, которая может быть решена как конструктивно, так и неконструктивно, рассмотрен нами в работе [19]: «Приведите пример многогранника, поверхность которого образована равными квадратами, и он не является кубом» [19, с. 47—48]. Различные модели требуемого многогранника могут быть построены по аналогии с геометрической фигурой, изображённой на рисунке 1, как путём соединения кубов, так и путём их отделения от прямоугольного параллелепипеда.

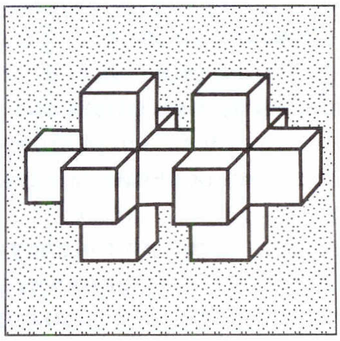


Рисунок 1

Классические задачи на построение также являются задачами на конструирование модели, так как каждая из них предполагает построение одной из возможных геометрических конструкций, содержащих геометрическую фигуру, заданную условием задачи. В зависимости от выбора начальной точки, полуплоскости, в которой проводятся построения, и т. д.

можно получить различные конструкции, содержащие искомую геометрическую фигуру. Кроме того, решение задач на построение, как правило, сопровождается построением графической модели геометрической конструкции.

Отметим, что в работах [7] и [18] к числу задач на моделирование отнесены задачи «на изображение геометрического образа или создание соответствующей модели геометрического объекта» [7, с. 12], то есть задачи на построение графических и физических моделей геометрических фигур. Чтобы избежать терминологической неясности, задачи, формулировка которых определяет необходимость построения графической конструкции, обладающей требуемыми свойствами, назовём *графическими конструктивными задачами*. Задачи, формулировка которых определяет необходимость построения конструкции из подручных материалов (бумаги, спиц, пластилина и т. д.), обладающей требуемыми свойствами, назовём *практическими конструктивными задачами*.

Таким образом, один из типов учебных геометрических задач конструктивного характера — это *учебные задачи на конструирование моделей геометрических фигур. Они включают геометрические, графические и практические конструктивные задачи*. Выясним, что означают термины «доконструирование», «переконструирование», «реконструирование», «деконструирование».

К числу задач на доконструирование в работе [7] отнесены задачи, «для решения которых необходимы дополнительные построения, направленные на получение новой вспомогательной геометрической фигуры, свойства которой помогают решить поставленную задачу» [7, с. 12]. В работе [18] — «задачи на построение сечений многогранников плоскостью, а также на достраивание данной фигуры так, чтобы она стала развёрткой поверхности определённого геометрического тела» [18, с. 12]. Технические задачи на доконструирование предполагают необходимость дополнения механизма с отсутствующим элементом таким элементом, чтобы механизм мог действовать определённым образом [20]. Причём возможна вариативность в выборе недостающего элемента.

С нашей точки зрения, задачи на «доконструирование» являются одним из типов задач на конструирование, так как их решение требует выполнения конструктивных действий: выбора, комбинирования и соединения объектов таким образом, чтобы выполнялись определённые условия, а целью деятельности является конструкция. То есть *задача на доконструирование* — это конструктивная задача, формулировка которой определяет необходимость дополнения данной конструкции любыми элементами, которые обеспечат ей обладание требуемыми свойствами. К числу геометрических задач на доконструирование относятся задачи, требующие выполнения дополнительных построений. Вариативность в выборе применяемой при этом геометрической конструкции даёт основание для их использования в качестве учебных задач, направленных на развитие творческой конструктивной деятельности учащихся.

К задачам на переконструирование в работе [7] отнесены «а) задачи на замену неизвестной геометрической фигуры другой, более простой фигурой, имеющей ту же искомую величину, что и неизвестная фигура; б) задачи на разрезание и перекраивание фигур» [7, с. 12]. В работе [18] — задачи, которые, на наш взгляд, требуют выполнения отдельных конструктивных действий: «задачи на выделение и узнавание частей геометрической фигуры; задачи на расчленение фигуры на части по некоторому признаку; задачи на подсчёт числа частей фигуры, обладающих определёнными свойствами» [18, с. 12]. Технические задачи на переконструирование предполагают конструирование из частей данного механизма другого механизма, который может действовать определённым образом. Причём возможны замена частей, их удаление, дополнение механизма другими элементами.

Это означает, что *задача на переконструирование* — это конструктивная задача, формулировка которой определяет необходимость разбиения данной конструкции на части и построения из этих частей другой конструкции, обладающей требуемыми свойствами, с возможной заменой, удалением или дополнением элементов. Аналогом таких задач в геометрии являются задачи, связанные с конструированием равносоставленных, а также равновеликих геометрических фигур.

Задачи на «реконструирование» в работе [7] определяются как задачи на «восстановление геометрической фигуры по некоторым элементам» [7, с. 12]. В работе [18] такой тип задач не выделяется. С нашей точки зрения, задачи на реконструирование схожи с задачами на доконструирование с той разницей, что вариативность в выборе недостающего элемента недопустима. То есть *задача на реконструирование* — это конструктивная задача, формулировка которой определяет необходимость восстановления конструкции по имеющейся части этой конструкции.

Примером задачи на реконструирование является следующая задача: «На рисунке 2, *а* изображено сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью EFT. а) Опишите последовательность выполненных построений. б) Перечертите рисунок 2, *б* в тетрадь и дополните его так, чтобы на нём было изображено сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью EFT». Если к этой задаче добавить требование «в) Перечертите рисунок 2, *в* в тетрадь и постройте сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью EFT», то её можно использовать для обеспечения перехода конструктивной деятельности с исполнительского уровня на репродуктивный.

Задачи на «деконструирование» определяются в работе [7] как задачи, «в процессе решения которых на сложном рисунке вычленяется более простая геометрическая фигура при «игнорировании» оставшихся геометрических объектов» [7, с. 12]. На наш взгляд, эти задачи к числу конструктивных не относятся, так как они предполагают выполнение отдельного конструктивного действия: распознавания (выбора) элементов конструкции.

Конструктивные задачи на реконструирование, доконструирование и переконструирование различаются характером действия выбора элементов конструкции: в задачах на реконструирование нужно найти недостающий элемент, в задачах на доконструирование — любой подходящий элемент; в задачах на переконструирование нужно выделить элементы из данной конструкции. Каждый из этих типов задач имеет ценность как для организации конструктивной деятельности с геометрическим содержанием на различных уровнях, так и для организации обучения геометрии. Итак, *по характеру действия выбора элементов конструкции* можно выделить следующие типы конструктивных задач:

- на реконструирование;
- на доконструирование;
- на переконструирование;
- на конструирование нового по составу объекта.

Для подготовки к конструктивной деятельности полезны задачи на выполнение отдельных конструктивных действий:

- на распознавание (выбор) элементов конструкции;

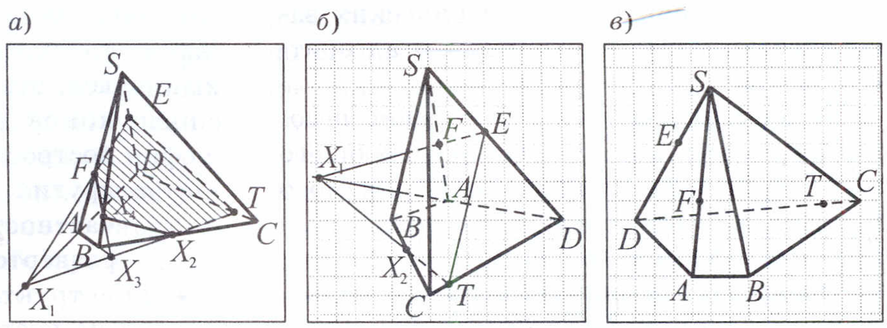


Рисунок 2

- на комбинирование элементов конструкции;
- на соединение элементов конструкции.

При обучении геометрии конструктивные задачи могут быть предъявлены учащимся в качестве учебных задач и могут быть сформулированы ими самостоятельно для решения учебных задач конструктивным методом. Можно выделить три основных способа применения конструктивного метода решения задач: доконструирование; переконструирование; реконструирование опорной геометрической конструкции.

Под *опорной геометрической конструкцией* нами понимается часто применяющаяся при решении задач геометрическая конструкция, позволяющая оперативно выявлять свойства одних геометрических фигур в контексте других геометрических фигур. Например, геометрическая конструкция, состоящая из куба и пирамиды, у которой три взаимно перпендикулярных ребра являются рёбрами куба, позволяет оперативно выявлять свойства такой пирамиды, в частности, находить радиус описанной около неё сферы, высоту этой пирамиды.

В методической литературе есть и другие определения понятия опорной геометрической конструкции. В. В. Орлов определяет её как «геометрическую фигуру, плоскую или пространственную, свойства которой, связи и отношения составляющих её элементов нам известны или будут установлены при исследовании фигуры; на которой иллюстрируется изучаемый теоретический материал, раскрываются новые связи объектов, формируются приёмы поиска решения геометрических задач, необходимые инструкции и алгоритмы» [21, с. 12].

На наш взгляд, это определение несоразмерно, так как объём определяющего понятия больше объёма определяемого понятия: под это определение можно подвести геометрические конфигурации (совокупности геометрических фигур), не являющиеся геометрическими конструкциями, то есть не обладающие свойством связности. Действительно, автор относит к опорным геометрическим конструкциям фигуры, связи между элементами которых «будут установлены» в процессе их исследования.

Для определяющего понятия, используемого В. В. Орловым, в большей степени подходит понятие «базовой геометрической конфигурации», введённое Т. М. Мищенко, под которой она понимает «геометрическую фигуру или ряд геометрических фигур, находящихся в определённых отношениях между собой, которые вычленяются в результате процесса применения теории к решению геометрических задач и выступают в качестве средства построения промежуточных математических моделей» [22, с. 7].

Назначение базовой геометрической конфигурации, согласно Т. М. Мищенко, состоит в «создании наглядной опоры, обеспечивающей эвристический переход от содержания геометрической задачи к ранее установленным геометрическим фактам» [22, с. 8]. Опорная геометрическая конструкция, с нашей точки зрения, имеет несколько иное назначение: *оперативное предоставление контекста* для раскрытия свойств одних геометрических фигур на основании свойств других геометрических фигур.

Итак, учебные задачи, связанные с конструированием геометрических фигур и их моделей в курсе стереометрии, можно сгруппировать *по характеру требования*:

✓ задачи на конструирование моделей геометрических фигур:
  - конструктивные геометрические задачи на построение:
    – точек, прямых, плоскостей, углов, отрезков, сечений многогранников (классические задачи на построение);
    – других геометрических фигур, в частности, многогранников и их развёрток;
  - конструктивные графические задачи на построение:
    – изображений многогранников;

– изображений других геометрических фигур;
- конструктивные практические задачи на построение:
  – физических моделей многогранников;
  – физических моделей других геометрических фигур;

✓ геометрические задачи на вычисление и (или) доказательство, которые можно решить конструктивным методом, то есть путём:
- реконструирования опорной геометрической конструкции;
- доконструирования;
- переконструирования;

✓ комбинированные геометрические задачи, связанные с применением конструирования.

Задачи на конструирование моделей геометрических фигур могут включать задачи, отличающиеся *характером действия выбора элементов конструкции*, то есть задачи на реконструирование, доконструирование, переконструирование, конструирование нового по составу объекта.

Функции учебных геометрических задач конструктивного характера в курсе стереометрии. Задачи конструктивного характера в курсе стереометрии выполняют функции формирования конструктивных знаний, умений и навыков, обогащения опыта деятельности, связанной с конструированием геометрических фигур и их моделей. Раскроем другие их функции, соответствующие функциям проектируемой нами системы задач.

Являясь носителем геометрической информации и требований (явных и неявных) по её преобразованию (перекодированию на язык геометрических символов, графических изображений, пространственных образов, словесных описаний; получению на её основе новой геометрической информации, её применению и т. д.), геометрические задачи конструктивного характера, с одной стороны, способствуют обогащению понятийного опыта учащихся, связанного с геометрией, с другой стороны — формированию образа научной картины мира с точки зрения геометрии, то есть выполняют *образовательную функцию*. Эти задачи осуществляют *методологическую функцию*, состоящую в содействии овладению учащимися методом конструирования. Кроме того, в ходе их решения выполняются действия, характерные для любой деятельности, поэтому они способствуют обогащению умственного опыта, позволяющего регулировать интеллектуальную деятельность с любым предметным содержанием [15].

Решение геометрических задач конструктивного характера способствует формированию умения распределять внимание по всем направлениям деятельности (построение геометрической конструкции, её модели, доказательство правильности построения), фокусировать внимание на ключевых моментах, учитывать контекст. Необходимость проектирования конструкции, соответствующей условию задачи, стимулирует продуцирование догадок и проведение их проверки путём доказательства. При этом активизируется взаимосвязанная работа интуиции и логики, сопровождаемая переживанием различных эмоциональных состояний: подъёма, эстетического наслаждения, морального удовлетворения и т. д., что способствует обогащению эмоционально-оценочного опыта учащихся. Таким образом, решение геометрических задач конструктивного характера способствует обогащению всех составляющих умственного опыта, а значит, они выполняют *функцию интеллектуального воспитания учащихся* [15].

Согласно исследованиям психологов (А. Р. Лурия, Т. В. Кудрявцев, Л. А. Парамонова), конструирование благоприятно сказывается на развитии познавательных процессов. Как отмечает А. Р. Лурия, в процессе конструктивной деятельности «возникает произвольность, подвижность восприятия, развиваются чёткие и свободно регулируемые представления» [23, с. 58]. Действительно, при выборе элементов конструкции выполняются все виды действий, характерных для восприятия: обнаружение, различение, идентификация и опознание. Кроме того, происходит неоднократное преобразование объектов, подбираемых в качестве элементов конструкции: их пространственного положения, структуры, рассматриваются различные сочетания элементов и их частей. Поэтому решение геометрических задач конструктивного характера обеспечивает *развитие пространственных представлений* учащихся.

Так как при решении этих задач в курсе геометрии объектом конструирования является геометрическая фигура, то есть абстрактный объект, то конструктивные действия выполняются как на уровне пространственного, так и логического мышления: преобразуются и комбинируются как образы геометрических фигур, так и геометрические предложения, связанные с задачной ситуацией. При этом используются и те признаки и свойства геометрических фигур, которые имеются в представлении, и те, которые выявлены в результате логических действий. Это означает, что решение геометрических задач конструктивного характера *стимулирует взаимосвязанную работу пространственного и логического мышления*. Необходимость держать в поле зрения разные конструкции *способствует развитию внимания*, формированию умения распределять его между различными конструкциями и оперативно переключать с одной конструкции на другую. Рассмотрим пример.

Задача. В треугольной пирамиде $ABCD$ рёбра AC, BC и DC взаимно перпендикулярны, точки O и F лежат в плоскостях ABC и BCD соответственно и одинаково удалены от прямых AB, BC и CD. Найдите длину отрезка FO, если $BC = CD = \sqrt{3}$; $AC = 3$.

Для уточнения положения точки O нужно проанализировать свойства данной пирамиды; применить знания о геометрическом месте точек, равноудалённых от двух пересекающихся прямых на плоскости; сформировать представления о таком геометрическом месте точек в пространстве; выбрать наиболее удобный ракурс рассмотрения пирамиды (рис. 3, *а*, *б*); провести необходимые построения. Эти действия требуют взаимосвязанной работы пространственного и логического мышления. Интуитивная догадка о том, что данную пирамиду можно рассмотреть в контексте прямоугольного параллелепипеда (рис. 3, *в*), облегчит действия по уточнению положения точки F. Для вычисления длины отрезка OF нужно рассмотреть ряд треугольников, связывающих отрезок OF с другими отрезками, длины которых известны, в контексте построенной конструкции.

Необходимость оперативного обнаружения нужных для конструирования элементов стимулирует запоминание свойств объектов и типичных сочетаний, наиболее пригодных в различных случаях, мысленного присвоения им ориентирующих знаков, проведение их систематизации по различным признакам. Это способствует *развитию памяти* и обеспечивает переход конструктивной деятельности от беспорядочно осуществляемых проб к последовательному и осознанному выполнению конструктивных действий.

В процессе решения геометрических задач конструктивного характера происходит постоянный анализ будущей конструкции: из каких элементов она будет состоять, каково будет взаимное расположение элементов, как они будут связаны, и синтез, позволяющий мысленно соединять части,

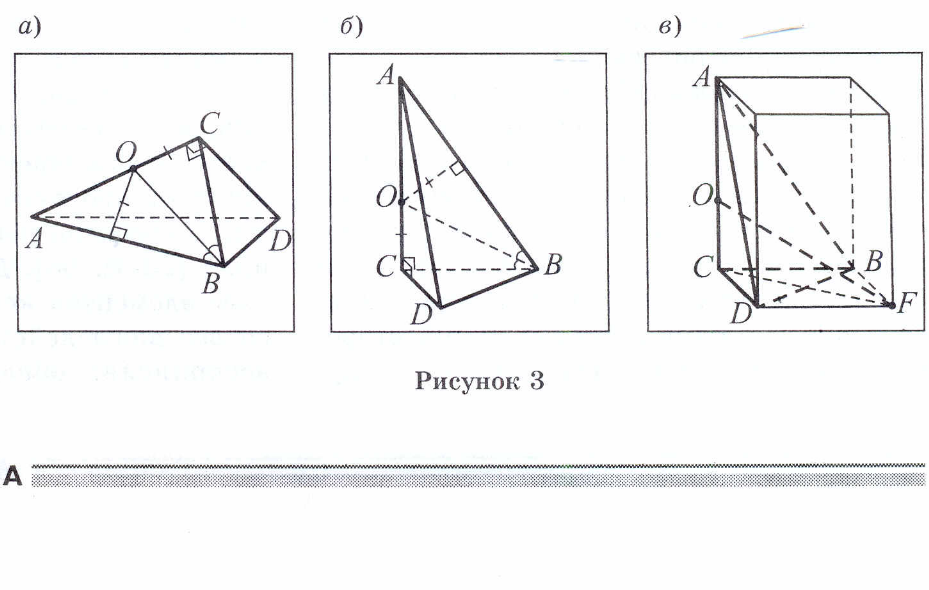


Рисунок 3

чтобы выяснить, будет ли обладать построенная конструкция требуемыми свойствами. В процессе анализа уточняются представления о конструктивных свойствах создаваемого объекта, в процессе синтеза формируется его целостный образ. Активируя такие мыслительные операции, как анализ и синтез, конструктивные задачи *стимулируют работу мышления*. Итак, задачи конструктивного характера способствуют развитию восприятия, мышления, внимания, памяти, значит, выполняют *функцию интеллектуального развития учащихся*.

Умение решать геометрические задачи конструктивного характера может служить как показателем уровня развития конструктивной деятельности, связанной с конструированием геометрических фигур и их моделей, так и показателем уровня геометрической подготовки учащихся. Например, умение строить новую по замыслу геометрическую конструкцию и её графические модели или применять конструктивный метод решения в незнакомой ситуации является, с одной стороны, показателем творческого уровня развития конструктивной деятельности, с другой стороны, согласно нормам оценки результатов учебной деятельности учащихся, показателем высокого уровня усвоения учебного материала. Это означает, что геометрические задачи конструктивного характера выполняют *функцию диагностики деятельности, связанной с конструированием геометрических фигур и их моделей*, а также *контроля результатов учебной геометрической деятельности*.

Геометрические задачи конструктивного характера можно использовать для мотивации учебной деятельности, организации деятельности по выявлению и усвоению свойств и признаков понятий, закономерностей, способов действий (в частности конструктивных), методов решения задач, по формированию умений и навыков, их закреплению и применению, то есть для *обучения учащихся геометрии и конструктивной деятельности*. Рассмотрим пример задачи для мотивации изучения темы «Аксиомы стереометрии».

Задача. Дачник решил пристроить к своему дому, изображённому на рисунке 4, *а*, шпалеру (решётку) для винограда так, как показано на рисунке 4, *б*. а) Вычислите, на каком расстоянии от меньшей стены дома нужно забетонировать основания кирпичных столбиков, высота которых 1 м, если дом имеет размеры 3 м × 5 м, высота стен 3 м, высота фронтона 2 м. б) Вычислите, какой длины должны быть наклонные брусы. в) На графической модели этого дома (рис. 4, *в*) укажите точку, изображающую основание столбика, на который будет опираться наклонный брус, если изображающий его отрезок лежит на прямой ED_1. г) Продумайте, как разметить основания остальных столбиков, сделайте соответствующие построения на чертеже.

Таким образом, геометрические задачи конструктивного характера наряду с выполнением функций *формирования конструктивных знаний, умений и навыков, обогащения опыта деятельности, связанной с конструированием геометрических фигур и их моделей, диагностики уровня её развития* способствуют *образованию, развитию и воспитанию учащихся*, выполняют *контролирующую* и *методологическую* функции. Поэтому их можно использовать в качестве многофункциональных задач, выполняющих часть требуе-

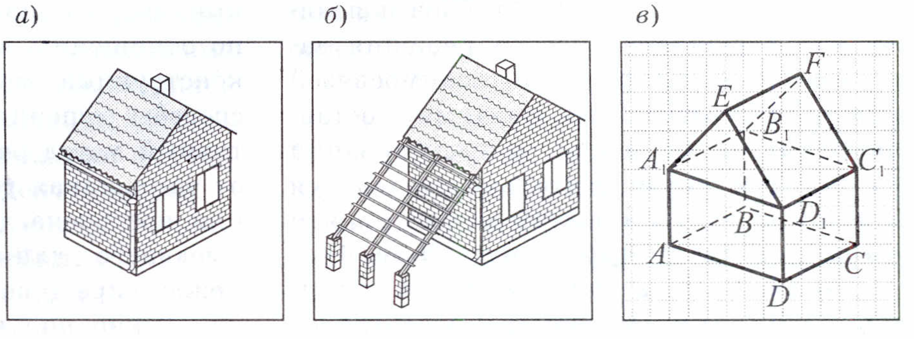


Рисунок 4

мых функций проектируемой нами системы задач. Совмещая в себе свойства, необходимые для организации обучения геометрии, направленного на развитие конструктивной деятельности учащихся, они будут выполнять в этой системе *интегрирующую функцию*.

Несмотря на то, что задачи конструктивного характера выполняют значительную часть требуемых функций проектируемой нами системы задач, отдельные задачи не могут выполнить функцию регуляции процесса развития конструктивной деятельности, а также функцию обучения геометрии. Кроме того, отдельные задачи, имеющие конструктивный характер, не обеспечивают развитие деятельности, связанной с конструированием способов решения учебных геометрических задач. Необходимо найти такой состав, способы взаимного расположения задач, их соединения в систему и порядка предъявления, чтобы система задач выполняла требуемые функции.

Условия развития деятельности по конструированию способов решения учебных геометрических задач. Специфика деятельности, связанной с конструированием способов решения задач, определяется её предметным содержанием, то есть тем, из чего конструируются способы решения задач. Выясним сущность понятия способа решения задачи.

Г. А. Балл даёт следующее определение: «способом решения задачи m_p уместно считать всякую процедуру, которая при её осуществлении решателем Q может обеспечить решение этой задачи» [24, с. 37], при этом под процедурой понимается система последовательно осуществляемых операций. В работе [25] А. А. Аксёнов поясняет, что «сущность способа решения заключается в обнаружении взаимосвязей между теоретическими фактами, составляющими базис задачи, и выстраивании их в такой последовательности, следуя которой от условия задачи можно прийти к выполнению её требования» [25, с. 4].

Наблюдения за учащимися, студентами, учителями, которым предлагалось раскрыть способ решения задачи, показывают, что в отличие от самого решения задачи, которое представляет собой последовательность логически связанных предложений, выражающих обоснованные суждения, способ решения задачи отражает последовательность действий, выполненных для достижения требования задачи на основании изученной теории. Метод решения задачи также представляет собой описание последовательности действий, направленных на решение задачи. Выясним, в чём различие понятий способа и метода решения задачи.

В. А. Далингер установил следующие отличия между способами и методами доказательства: «Если доказательство утверждения отличается от другого доказательства того же самого утверждения не логической основой, а последовательностью умозаключений, то будем говорить, что утверждение доказывается двумя различными способами. Если же одно доказательство отличается от другого логической основой, то будем говорить о различных методах доказательства» [26, с. 14].

Для уточнения отличий между способом и методом решения задачи обратимся к структуре деятельности: после формирования цели деятельности выбирается метод моделирования цели, затем ставится задача по достижению цели выбранным методом, для чего подбираются соответствующие способы действий. Например, если целью деятельности является неизвестное расстояние между скрещивающимися прямыми, может быть выбран метод координат или конструктивный метод решения. Далее, если выбран метод координат, в зависимости от того, как именно расположить систему координат по отношению к данной геометрической конструкции, можно получить различные способы решения. Если выбран конструктивный метод решения, то в зависимости от того, какая геометрическая конструкция построена для нахождения отрезка, имеющего длину, равную расстоянию между скрещивающимися прямыми, также можно получить различные способы решения задачи.

Таким образом, под *методом решения учебной задачи* будем понимать описание последовательности действий по моделированию цели деятельности. Методы решения геометрических задач связаны с использованием различного аппарата математической теории: векторный и координатный методы; методы, основанные на применении геометрических неравенств, преобразований (в частности, конструктивный метод); метод математической индукции; алгебраический метод, основанный на решении уравнений, и др.

Важно отличать метод решения задачи от методов поиска и изложения решения задачи, к которым относятся синтетический, аналитический, аналитико-синтетический, индуктивный методы, а также методы доказательства от противного, исключением и др. К числу методов поиска решения задачи также относятся метод переформулировки задачи (выделение вспомогательных задач, отбрасывание некоторых условий, обобщение задачи), а также метод прогнозирования [3]. В ходе поиска решения и при его изложении могут использоваться комбинации методов.

Под *способом решения учебной геометрической задачи* будем понимать описание последовательности действий, основанных на изученной теории, корректное осуществление которых приводит к выполнению требования задачи. Теоретические факты служат основой для действий по распознаванию геометрических фигур, доказательству их принадлежности определённому виду, исследованию и доказательству их свойств, обоснованному применению известных свойств, нахождению величин и т. д.

Итак, предметным содержанием деятельности, связанной с конструированием способов решения учебных геометрических задач, являются действия, которые можно выполнить на основании изученной теории. Цель этой деятельности — способ решения задачи, который находится путём выбора, комбинирования и последовательного соединения действий, достаточных для выполнения требования задачи.

Для развития деятельности по конструированию способов решения задач должны быть выполнены следующие условия:

1) последовательное овладение учащимися действиями, возможными в курсе геометрии; выявление геометрических ситуаций, требующих выполнения этих действий;

2) овладение учащимися типичными комбинациями действий; выявление геометрических ситуаций, требующих выполнения этих комбинаций;

3) овладение приёмами выбора, комбинирования и последовательного соединения действий, необходимых для выполнения требования задачи;

4) формирование и обогащение опыта деятельности по конструированию способов решения задач.

Состав и взаимное расположение задач системы для развития конструктивной деятельности учащихся при обучении геометрии. Анализ методической литературы по вопросу обучения поиску решения геометрических задач показывает, что для формирования умения находить способы решения задач используются различные приёмы, которые в систематизированном виде можно представить следующим образом:

1. Разрабатываются эвристические инструкции по применению теоретического материала, алгоритмы и образцы решений элементарных (простейших) задач (М. И. Гольдштейн, И. Ф. Шарыгин); выделяются базовые геометрические конфигурации (Т. М. Мищенко), отображающие геометрическую ситуацию, отвечающую соответствующему теоретическому факту; формируется умение решать элементарные задачи и применять их для решения более сложных задач.

2. Организуется изучение структуры различных задач (Г. Д. Зайцева) с целью 1) формирования умения раскладывать их на элементарные; 2) выявления задач, которые входят в состав других задач; 3) выявления задач, которые решаются одинаковым методом.

3. Формулируются задачи, результат или метод решения которых может быть ис-

пользован при решении других задач, называемые *опорными* или *ключевыми* задачами (И. Ф. Шарыгин, В. Г. Бевз, И. Г. Габович, М. И. Лисова); разрабатываются опорные геометрические конструкции, соответствующие опорным задачам (В. В. Орлов); выявляются признаки задач, которые могут быть решены с применением опорных задач; формулируются общие подходы к их решению.

4. Формируются обобщённые приёмы учебной деятельности (В. И. Крупич), позволяющие решать любые задачи, включая нестандартные, решение которых предполагает выбор из большого числа возможных последовательностей действий.

5. Формируется опыт решения задач. С этой целью конструируются системы задач с применением различных приёмов (Г. И. Ковалёва).

На наш взгляд, эффективность перечисленных приёмов обучения поиску решения геометрических задач определяется той системой задач, которая используется при их применении. В методической литературе сформулированы требования к системам задач, предложены общие подходы к их построению в соответствии с этими требованиями и примеры таких систем задач, но конкретные способы их построения не описаны. Кроме того, имеющиеся системы задач в большей степени ориентированы на организацию повторения учебного материала с целью обобщения и систематизации знаний и не подходят для обучения систематическому курсу геометрии. Рассмотрим *способ построения системы задач, направленной на развитие деятельности по конструированию способов решения учебных геометрических задач,* к отдельной теме школьного курса геометрии.

Исходя из того, что каждый факт геометрической теории даёт новые возможности для выполнения геометрических действий, составляющих способы решения задач, важно сформулировать задачи, направленные на формирование этих действий. В работах Н. Х Розова и О. А. Мазуренко акцентируется внимание на необходимости составления «необходимой и достаточной системы базисных задач», которая поможет учащимся «в минимальное время наилучшим образом овладеть максимальным объёмом знаний и умений» [27, с. 45]. С этой целью предлагается «по каждой теме курса геометрии составить некоторый «реестр» понятий и фактов, геометрических конфигураций, основных методов решения и подобрать иллюстрирующие их задачи. Всё это и будет ... «базисом» в бескрайнем многообразии геометрических задач» [27, с. 45].

На наш взгляд, в соответствии с математическим значением понятия базиса те задачи, которые составляют базис задач школьного курса геометрии, должны не иллюстрировать теорию, а трансформировать её в способы действий, из которых можно конструировать способы решения задач школьного курса геометрии. Поэтому под *базисной задачей* нами понимается сформулированная в общем виде задача, решение которой представляет собой описание действия, основанного на какомлибо теоретическом факте. Базисные задачи составляют базис задач школьного курса геометрии. Его минимизация может служить одним из способов оптимизации системы задач. При этом важно выполнить требование полноты системы задач с точки зрения отражения в ней всех действий, требующихся для решения школьных геометрических задач.

Примерами базисных задач являются: планиметрические задачи «Вычислить длину катета прямоугольного треугольника по известным длинам другого катета и гипотенузы», «Найти в данной геометрической конструкции равные треугольники, используя первый признак равенства треугольников», стереометрическая задача «Доказать параллельность двух данных прямых в пространстве, используя признак параллельности прямых». Один геометрический факт может служить основанием для формулировки нескольких базисных задач. Итак, *первым шагом* построения требуемой системы задач является разработка системы базисных задач, соответствующих рассматриваемой теме учебного курса.

Для овладения действиями, соответствующими базисным задачам, необходимо сформировать их ориентировочную основу и обеспечить возможность выполнения в знакомой, изменённой и незнакомой ситуациях. Поэтому базисные задачи должны быть конкретизированы для различных геометрических фигур и связывающих их геометрических конструкций, кроме того, должны быть сконструированы задачи, определяющие необходимость последовательного выполнения действий, соответствующих различным базисным задачам.

Согласно В. И. Крупичу и О. Б. Епишевой, «математические задачи можно разделить на алгоритмические, решение которых однозначно определяется некоторым алгоритмом, полуалгоритмические и полуэвристические, решение которых неоднозначно определяется той или иной схемой, содержащей как алгоритмические, так и эвристические указания; эвристические, решение которых не гарантируется конечным числом шагов, а предполагает их выбор из многих вариантов» [28, с. 8]. Под алгоритмом при этом понимается «общепринятое и однозначное предписание, определяющее процесс последовательного преобразования исходных данных в искомый результат» [28, с. 7].

Выделение задач, для которых разрабатываются алгоритмы решений, обусловлено либо их практической значимостью, либо частым проявлением в составе других геометрических задач. Алгоритмические задачи, сформулированные в общем виде, назовём типовыми. В нашем понимании, *типовая задача* — это сформулированная в общем виде задача, решение которой представляет собой описание последовательности действий, регламентируемых определённым алгоритмом. Примерами типовых задач являются: планиметрическая задача «Найти высоту равнобедренного треугольника, проведённую к боковой стороне, по известным длинам его сторон», стереометрическая задача «Найти радиус сферы, описанной около правильной треугольной пирамиды, по известным длинам стороны основания и бокового ребра». Разработка системы типовых задач, соответствующих рассматриваемой теме, является *вторым шагом* построения требуемой системы задач.

Для овладения алгоритмами действий, соответствующими типовым задачам, необходимо помочь учащимся сформулировать эти алгоритмы и обеспечить возможность их применения в знакомой, изменённой и незнакомой ситуациях. Поэтому типовые задачи, так же как и базисные, должны быть конкретизированы для различных геометрических фигур и связывающих их геометрических конструкций, кроме того, необходимо сконструировать задачи, способы решения которых включают решения типовых задач.

Наряду с типовыми задачами, способ решения которых известен учащимся, функцию опоры для решения других задач могут выполнять результаты решения некоторых задач, например, формулы или свойства геометрических фигур, выявленные в ходе их решения, а также методы решения задач. Задачи, результат или метод решения которых можно использовать при решении других задач, называют *опорными задачами* [29]. Выбор опорных задач осуществляется с учётом практических потребностей, традиций, сложившихся в методике обучения геометрии, материалов конкурсных экзаменов, то есть достаточно свободен в отличие от выбора базисных задач, основанных на теории.

Примером опорной задачи, результат решения которой используется при решении других задач, является задача «Докажите, что площадь $S_{\text{орт}}$ ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна произведению его площади S на косинус угла α между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции: $S_{\text{орт}} = S\cos\alpha$». Такие задачи называют «дополнительными к курсу теоремами» [29, с. 89], так как они не требуются для развития теории, их область приложения — практика. Примером задачи, метод решения которой может быть полезен при решении других задач, является задача «В тетраэдре $SABC$ точки P и K — середины рёбер AS и BC соответственно. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности тетраэдра от точки P до точки K, если длина ребра тетраэдра равна a». Метод решения данной задачи состоит в конструировании развёртки многогранника.

Отметим, что при выделении опорных задач, иллюстрирующих методы решения, в данной работе акцентируется внимание на конструктивном методе, так как темы «Векторы и координаты в пространстве», «Преобразования в пространстве», «Метод математической индукции», согласно программе, не изучаются. Опорные задачи в курсе стереометрии удобно разделить на два класса: опорные задачи на вычисление и (или) доказательство и опорные задачи на построение. Можно выделить опорные задачи на графическое моделирование, связанные с построением изображений пространственных геометрических фигур. Для овладения учащимися умением применять опорные задачи при решении других задач необходимо помочь им сформировать обобщённые приёмы поиска решения задачи, ознакомить с методами решения задач и обеспечить возможность их применения для решения эвристических задач. Разработка системы опорных задач, соответствующих рассматриваемой теме, является *третьим шагом* построения требуемой системы задач.

Базисные, типовые и опорные задачи составляют основу для конструирования системы задач, направленной на развитие деятельности по конструированию способов решения учебных геометрических задач. Для отдельной темы учебного курса геометрии эта система строится путём конкретизации базисных и типовых задач и конструирования из полученных и опорных задач новых задач, направленных на овладение соответствующими действиями, приёмами и методами поиска решений задач.

Базисные задачи, конкретизированные для различных геометрических фигур и связывающих их геометрических конструкций, назовём *элементарными*. Это согласуется с принятой многими авторами трактовкой понятия элементарной задачи как «задачи в одно действие на применение известной теоремы или формулы» [29, с. 88]. Примером элементарной задачи, соответствующей базисной задаче «Доказать параллельность двух данных прямых в пространстве, используя признак параллельности прямых», является задача «Два параллелограмма $ABCD$ и $ABTE$ не лежат в одной плоскости. Докажите, что четырёхугольник $DCTE$ — параллелограмм».

Отметим, что есть и другое толкование понятия элементарной задачи, например, в учебном пособии [30] к элементарным отнесены «во-первых, задачи, решаемые за один шаг поиска, во-вторых, более сложные задачи ..., решение которых уже известно из имеющегося опыта решения задач..., чем больший опыт решения задач, тем больше задач становятся для нас "элементарными"» [30, с. 119]. В данной работе элементарность задачи с субъективной точки зрения не рассматривается.

При составлении системы элементарных задач важно учесть все типичные ситуации и исключить возможность формирования ошибочных ассоциаций [3, с. 161]. Для этого нужно выбрать подходящий способ варьирования задач и форму их предъявления. В методической литературе рассматриваются следующие приёмы варьирования задач: обобщение задачи, рассмотрение взаимно-обратных задач, рассмотрение стереометрических аналогов (П. М. Эрдниев), перефразировка, изменение геометрической конструкции, рассмотрение частного случая (И. Ф. Шарыгин) и другие.

Учитывая, что элементарные задачи — это конкретизированные базисные задачи, то есть задачи в одно действие, наиболее подходящим, с нашей точки зрения, приёмом их варьирования является изменение геометрической конструкции. Для этого необходимо выявить типичные и особенные геометрические ситуации, связанные с конкретизируемой базисной задачей, разработать иллюстрирующие их *геометрические конструкции*, которые будем называть *базисными*, и сформулировать соответствующие элементарные задачи. С целью повышения интенсивности обучения их можно решать устно по готовым чертежам, оформив решение первой задачи в качестве образца. Итак, *четвёртым шагом* построения требуемой системы задач является разработка подсистемы элементарных задач, соответствующих базисным задачам, и библиотеки базисных геометрических конструкций, иллюстрирующих базисные задачи.

Для обеспечения переноса умений, сформированных в ходе решения элементарных задач, то есть для овладения учащимися умением выполнять действия, соответствующие базисным задачам, в изменённой и сильно изменённой ситуациях, необходимы специально сконструированные задачи, требующие решения нескольких элементарных задач. Задачу, способ решения которой является частью способа решения другой задачи, назовём *вложенной* в эту задачу. При конструировании и размещении задач, требующих решения нескольких вложенных в них задач, важно учесть принцип постепенного нарастания сложности.

Например, если в базисную стереометрическую задачу «Найти высоту призмы по известным объёму и площади основания» вложить базисную планиметрическую задачу «Найти площадь прямоугольного треугольника по известным длинам катетов», то можно получить задачу «Найдите длину высоты треугольной призмы, основанием которой служит прямоугольный треугольник, длины катетов которого равны 2 см и 3 см, если объём этой призмы равен 21 см^3», направленную на формирование умения находить высоту призмы в изменённой ситуации. Эту задачу можно усложнить путём введения в неё ещё одной базисной планиметрической задачи: «Найти длину катета по известным длинам другого катета и гипотенузы», тогда задача будет иметь вид: «Найдите длину высоты треугольной призмы, основанием которой служит прямоугольный треугольник, катет и гипотенуза которого соответственно равны 7 см и 25 см, если объём этой призмы равен 21 см^3». Для формирования умения находить высоту призмы в сильно изменённой ситуации можно вложить соответствующую базисную задачу в другую задачу, например: «Одна из вершин верхнего основания треугольной призмы находится на одинаковом расстоянии от всех вершин нижнего основания. Найдите это расстояние, если основанием призмы является правильный треугольник, длина стороны которого равна $2\sqrt{3}$ см, а её объём равен 9 см^3».

Разработку системы задач, направленной на овладение действиями, соответствующими базисным задачам, важно вести с учётом необходимости выявления учащимися типовых задач. Они должны заметить задачи, для решения которых нужно выполнить одинаковые последовательности действий, сформулировать соответствующие типовые задачи и алгоритмы их решений. Варьировать эти задачи можно путём изменения геометрической конструкции.

Разработанные задачи необходимо расположить в системе задач так, чтобы была возможность реализации их функционального назначения. Задачи в системе могут располагаться 1) *последовательно*, представляя собой набор задач, предлагаемых для последовательного решения; 2) *параллельно*, в виде набора задач, предлагаемых для решения на выбор; 3) *концентрически*, в виде задачи, решение которой предполагает последовательное решение вложенных в неё задач; 4) *последовательно-концентрически*, когда вложенные задачи располагаются последовательно по нарастанию сложности; 5) *параллельно-концентрически*, когда параллельно расположенные задачи имеют общую вложенную в них задачу, которую называют ключевой [6] (рис. 5, *а*).

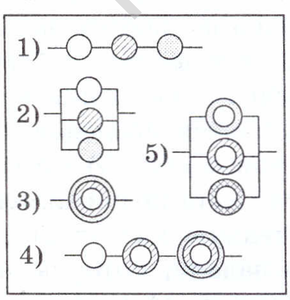
Для задач, имеющих одинаковое назначение, лучше использовать параллельное расположение, тогда в зависимости от индивидуальных особенностей учащихся можно варьировать количество задач, предлагаемых для решения. Кроме того, такие задачи можно использовать для организации самостоятельной работы, осуществления коррекции знаний, а также в качестве домашнего задания. Значительный запас таких заданий не перегружает систему задач, а обеспечивает выполнение функций формирования геометрических умений и навыков. Параллельно расположенные задачи должны быть выделены в системе задач.

Модель структуры подсистемы задач, направленной на овладение действием, соответствующим базисной задаче, представлена на рисунке 5, *б*. В подсистеме, имеющей такую структуру, после серии элементарных задач, направленных на формирование умения выполнять это действие в знакомой ситуации, обозначенных кругами белого цвета (блок A), последовательно предлагаются серии задач одинакового уровня сложности, направленные на формирование умения выполнять это действие в изменённой ситуации (блок B) и в сильно изменённой ситуации (блок C).

Итак, *пятым шагом* построения требуемой системы задач является разработка подсистемы задач, направленной на овладение действиями, соответствующими базисным задачам, а также на выявление типовых задач и типовых геометрических конструкций. Аналогичным образом на *шестом шаге* строится подсистема задач, направленная на овладение алгоритмами решений типовых задач (в терминологии В. И. Крупича — алгоритмических задач), выявляются опорные задачи и опорные геометрические конструкции. На *седьмом шаге* строится подсистема задач для формирования умения решать задачи с использованием опорных задач и выявления приёмов поиска решения задачи (полуалгоритмических (полуэвристических) задач).

Для обеспечения возможности конструировать способы решения задач на творческом уровне на *восьмом шаге* конструируются задачи, решение которых требует применения приёмов и методов поиска решения задач в незнакомой ситуации (эвристические задачи). Для этого можно использовать такие приёмы варьирования задач, как перефразировка задачи, усложнение геометрической конструкции, введение задач практического содержания, рассмотрение взаимно-обратных задач, обобщение задачи и др.

Примерами таких задач, полученных путём усложнения геометрической конструкции, являются следующие задачи: «Через каждое ребро тетраэдра проведите плоскость, параллельную противолежащему ребру. Найдите объём многогранника, ограниченного этими плоскостями, если расстояние между противолежащими рёбрами тетраэдра равно a» и «Три взаимно перпендикулярных отрезка длиной a пересекаются в точке O. Найдите объём тетраэдра, в котором эти отрезки соединяют середины противолежащих рёбер». Эти задачи могут быть решены с использованием опорной геометрической



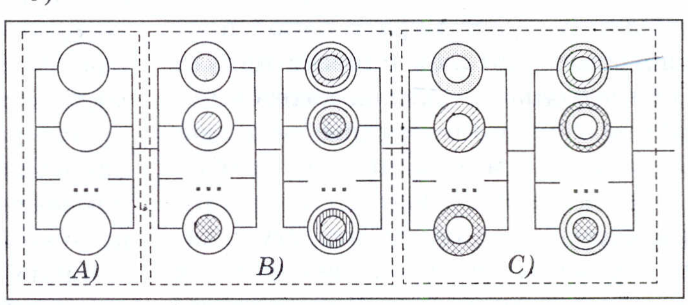


Рисунок 5:

а — типы взаимного расположения задач; *б* — модель структуры подсистемы задач, направленной на овладение действием, соответствующим базисной задаче конструкции, состоящей из куба и правильного тетраэдра, рёбрами которого служат диагонали граней куба.

Для организации исследовательской работы учащихся полезно включать *задачи исследовательского характера*. Примером исследовательской задачи является задача «Из всех ортогональных проекций правильного тетраэдра на различные плоскости найдите ту, которая имеет наибольшую площадь», которая может быть решена с использованием той же опорной геометрической конструкции.

Итак, в *систему задач* для развития деятельности по конструированию способов решения учебных геометрических задач к отдельной теме школьного курса геометрии должны войти подсистемы задач для:

- овладения действиями, соответствующими базисным задачам, и выявления типовых задач;
- овладения алгоритмами действий, соответствующими типовым задачам, и выявления опорных задач;
- формирования умения решать задачи с использованием опорных задач, и выявления приёмов поиска решения задач;
- формирования умения применять приёмы и методы поиска решения задач в незнакомой ситуации.

Если последовательно соединить эти подсистемы, то состав полученной системы задач и их взаимное расположение обеспечат выполнение системой функции развития деятельности по конструированию способов решения учебных геометрических задач. На рисунке 6 показано, как путём постепенного овладения действиями, соответствующими базисным задачам, алгоритмами решения типовых задач, методами и результатами решения опорных задач, приёмами и методами поиска решения задач, формируется умение конструировать способы решения задач школьного курса геометрии.

Кроме того, такая система будет выполнять функцию индивидуализации и дифференциации, обеспечивая возможность дифференцированного обучения геометрии с учётом индивидуальных особенностей учащихся, но полученная система не будет удовлетворять принципу минимальной достаточности, поэтому важно найти способы её оптимизации.

Построение пересекающихся окрестностей задач как способ оптимизации системы задач. Оптимизировать систему задач можно за счёт способа соединения задач в системе. Выясним, как соединены задачи в образуемой ими системе, то есть за счёт чего систему задач можно рассматривать как единый, целостный объект.

Соединение объектов возможно, если они: 1) имеют какое-либо общее свойство, обеспечивающее связь между ними;

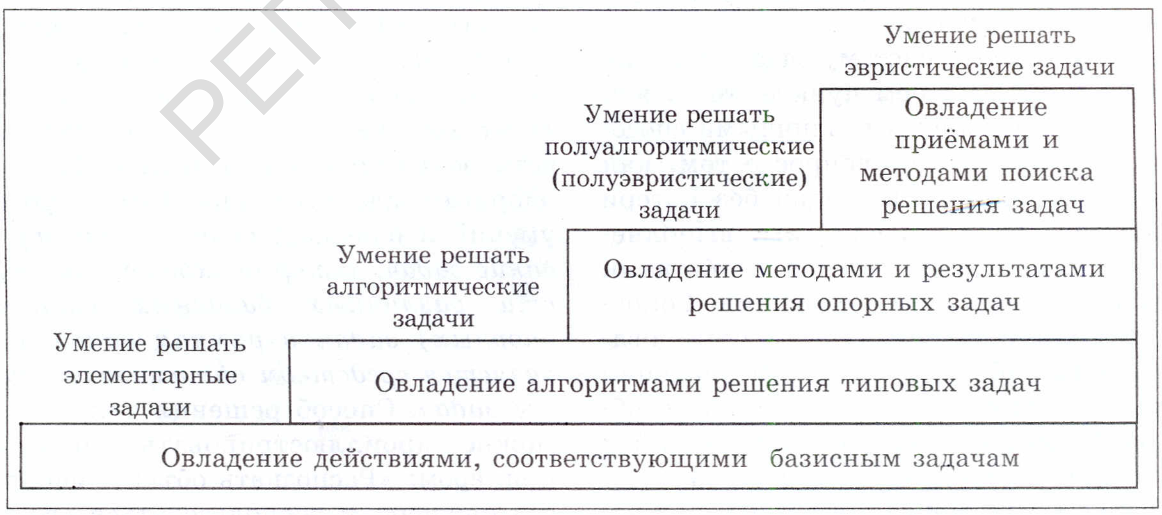


Рисунок 6 — Этапы овладения умением конструировать способы решения задач

2) у них есть свойства, позволяющие дополнять друг друга по какому-либо признаку; либо таких свойств нет, но есть объект, который дополняет каждый из них по каким-либо признакам. Эти признаки определяют способы соединения. В словарях понятие «дополнять» поясняется как «сделать более полным, прибавив к чему-нибудь, восполнить недостающее в чём-нибудь» [10, с. 175]. Например, различные задачи по одной теме, отличающиеся формой предъявления информации (словесной, графической, символической), дополняют друг друга в выполнении функции активизации различных механизмов восприятия. Поэтому их можно рассматривать как единый, целостный объект.

Задачи могут дополнять друг друга по дидактическому назначению, вместе выполняя обучающую функцию; по содержательному наполнению, обеспечивая обогащение понятийного опыта и выполнение образовательной функции; по форме предъявления, активизируя различные механизмы восприятия и мышления; по методам и способам решения, расширяя предметное содержание деятельности по конструированию способов решения задач и обогащая умственный опыт, позволяющий регулировать интеллектуальную деятельность; по уровню сложности решения, обеспечивая индивидуальный подход и дифференциацию обучения; по количеству, обеспечивая возможность формирования навыков; и т. д.

Если построить систему задач так, как описано в предыдущем пункте, то задачи в ней будут соединены различными способами. Нас интересует вопрос о том, как уменьшить количество задач без потери какой-либо функции системы, выполнение которой обеспечивается свойствами задач и способами их соединения. Сокращение количества задач на формирование какого-либо умения путём удаления этих задач из системы приведёт к ослаблению функций формирования умений и навыков и индивидуального подхода.

Один из выходов состоит в использовании предшествующих базисных (типовых, опорных) задач в качестве вложенных в задачи, акцентирующие внимание на последующих базисных (типовых, опорных) задачах. За счёт этого можно уменьшить количество задач на применение предшествующих базисных (типовых, опорных) задач. Результатом такого конструирования будут задачи, связанные с различными базисными (типовыми, опорными) задачами способом решения.

Совокупность различных задач, обладающих тем же свойством, что и данная задача, называют *окрестностью этой задачи*. Как отмечает Г. В. Дорофеев, «каждая конкретная задача имеет определённый набор связанных с ней задач, определённую *окрестность* — по содержанию, методам рассуждений, кругу используемых понятий. Каждая задача входит в некоторый букет окрестностей, связанных с той или иной её особенностью, а выбор одной из многих окрестностей задачи для построения цикла определяется конкретной ситуацией преподавания. Разнообразие букета окрестностей задачи предопределяет широту её использования и является ... важным критерием её дидактической ценности» [31].

Задачи, для решения которых используется какая-либо базисная (типовая, опорная) задача, образуют её окрестность по способу решения. Задачи, для решения которых используется несколько базисных (типовых, опорных) задач, входят в окрестности каждой из этих задач, то есть в пересечение этих окрестностей, дополняя каждую из окрестностей по дидактическому назначению и количеству, то есть объединяя эти базисные (типовые, опорные) задачи функцией формирования умений и навыков; *поэтому конструирование задач, которые входят в окрестности различных базисных (типовых, опорных) задач в рамках одной темы, является средством оптимизации системы задач.* Способ решения такой задачи можно проиллюстрировать следующим примером: «Распознать объект, используя его признак, и воспользоваться его свойством, чтобы, используя определение, доказать, что другой объект является объектом определённого вида». Понятно, что размещать в системе такие задачи нужно с учётом уровня их сложности.

На практике редко удаётся сконструировать задачи, включающие более двух типовых или опорных задач из одной темы. На рисунке 7 представлена модель процесса конструирования задач, которые входят в окрестности разных задач по одной теме. В ней буквами *Б*, *Т*, *О*, *Э* обозначены соответственно базисные, типовые, опорные и эвристические задачи. Эту модель можно использовать в качестве средства наглядности для организации деятельности учащихся по конструированию задач.

Задачи, которые входят в окрестности разных базисных, типовых и опорных стереометрических задач, так же, как и задачи конструктивного характера, являются многофункциональными задачами, соответствующими назначению проектируемой системы. Действительно, они выполняют функции формирования конструктивных умений и навыков, характерных для деятельности по конструированию способов решения задач, обогащения опыта этой деятельности, регуляции процесса её развития, диагностики. Они выполняют образовательную, развивающую, воспитательную, контролирующую и методологическую функции, а также *интегрирующую функцию*, состоящую в совмещении в себе свойств, необходимых для организации обучения геометрии, направленного на развитие конструктивной деятельности учащихся. Кроме того, они выполняют функцию *оптимизации* системы задач, состоящую в сокращении количества задач системы при сохранении всех её функций, и *коммуникативную* функцию, соединяя задачи системы.

Структура системы задач для развития конструктивной деятельности учащихся при обучении геометрии. Рассмотрим модель структуры проектируемой нами системы задач с учётом необходимости обеспечения организации всех этапов обучения (рис. 8).

В системе задач, имеющей такую структуру, после задачи, обеспечивающей мотивацию учебной деятельности (блок *A*), размещаются задачи на усвоение объёма и содержания вводимых понятий, выявление их свойств и признаков, а также геометрических закономерностей (блок *B*). Эти задачи располагаются в системе задач последовательно с учётом принципа мини-

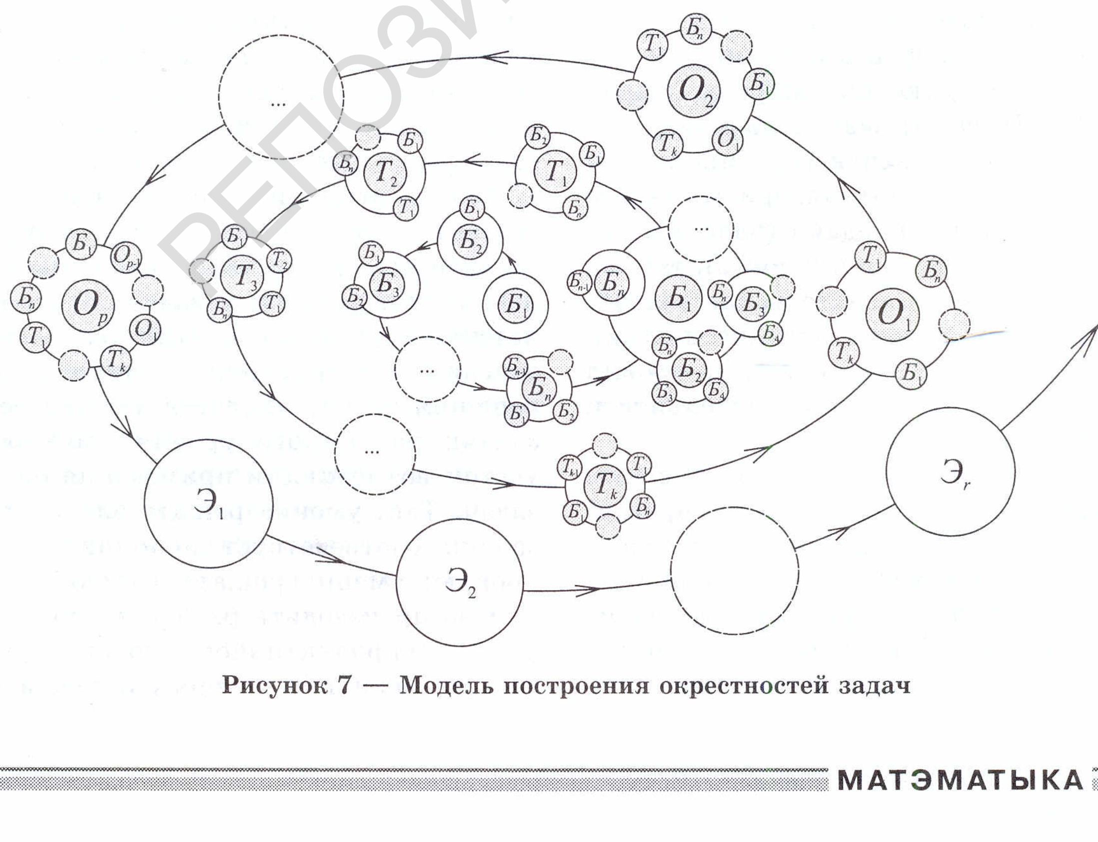


Рисунок 7 — Модель построения окрестностей задач

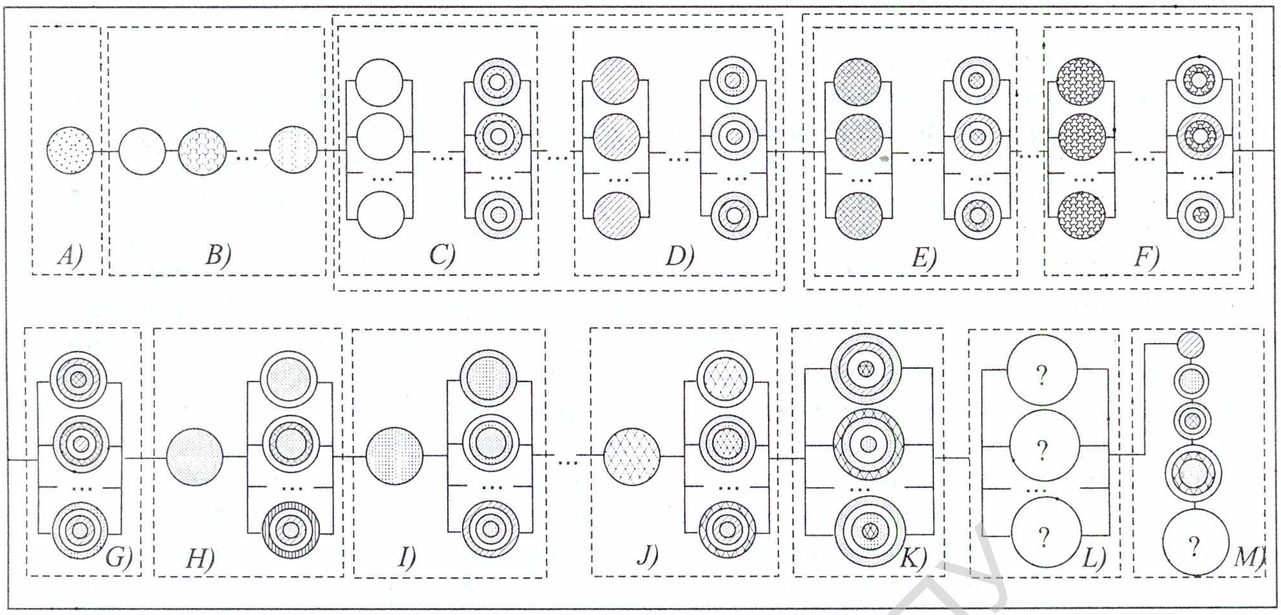


Рисунок 8 — Модель структуры системы задач

мальной достаточности. Далее последовательно предлагаются серии задач, направленные на овладение действиями, соответствующими базисным задачам, и выявление типовых задач (блоки C—D).

Затем следуют серии задач, направленные на овладение алгоритмами действий, соответствующими типовым задачам (блоки E—F). Далее включаются задачи, направленные на выявление опорных задач (блок G). Затем следуют серии задач, направленные на формирование умения применять каждую из опорных задач (блоки H—J); затем задачи на комплексное применение базисных, типовых и опорных задач — полуалгоритмические (полуэвристические) задачи (блок K); далее эвристические задачи (блок L), там же располагаются исследовательские задачи; в заключение — задачи для диагностики усвоения учебного материала и уровня развития конструктивной деятельности (блок M).

Если тема насыщена теоретическим материалом, то задачи, сформулированные на основании одного теоретического факта, можно разместить в одной подсистеме; задачи, направленные на выявление опорных задач, — разместить в блоках, соответствующих типовым задачам.

В системе задач, построенной на основании предложенной модели, удобно определять (выявлять) назначение каждой задачи, осуществлять выбор задач с учётом возможностей учащихся. Последовательное наращивание и варьирование базисных и опорных задач в составе целевых задач при условии достаточного количества задач одного уровня сложности, представленности в них различных геометрических конструкций позволяет организовать деятельность по овладению умением осуществлять поиск решения геометрических задач различного уровня сложности, минуя шаблонные задачи.

Способ решения любой задачи такой системы можно представить как последовательность действий по решению базисных и (или) опорных задач, поэтому показателем уровня развития деятельности, связанной с конструированием способов решения задач, является умение решать задачи различного уровня сложности с учётом возможности применения опорных задач. Так, умение решать элементарные задачи соответствует исполнительскому уровню; умение решать типовые задачи или воспроизводить решения опорных задач — репродуктивному уровню; умение решать задачи, в которых описана изменённая геометрическая ситуация, корректно применяя базисные, типовые и опорные задачи, — прикладному уровню; умение решать задачи, в которых описана незнакомая геометрическая ситуация, или знакомые задачи новым, не известным ранее способом — творческому уровню.

Таким образом, система задач, построенная на основании предложенной модели структуры в соответствии с последовательностью рассмотренных действий, заведомо обладает функциональными свойствами, требуемыми для развития конструктивной деятельности учащихся, которыми не обладают в отдельности задачи конструктивного характера. Действительно, эта система выполняет функцию обучения геометрии, так как обеспечивает организацию всех этапов процесса обучения геометрии; формирование геометрических знаний, умений и навыков, соответствующих программе предмета «математика» (это обеспечивается за счёт того, что базисные задачи формулируются на основе теоретического содержания, регламентированного программой). Она обеспечивает планомерное обогащение предметного содержания и опыта деятельности по конструированию способов решения учебных геометрических задач, а также регуляцию процесса её развития и диагностику. Выясним, какое место занимают задачи конструктивного характера в проектируемой системе задач.

Задачи конструктивного характера в системе задач для развития конструктивной деятельности учащихся при обучении геометрии. Для того чтобы выяснить место задач, связанных с конструированием геометрических фигур и их моделей, в системе стереометрических задач, построенной предложенным способом, выявим базисные и типовые задачи по теме «Аксиомы стереометрии и следствия из них».

Первые базисные и типовые задачи курса стереометрии основываются на аксиомах стереометрии. Для их формулировки необходимо проанализировать задачный материал по всему курсу и выявить действия, которые можно выполнить на основании аксиом стереометрии, необходимые при решении задач по различным темам курса. Проведённый анализ учебных пособий по геометрии показывает, что учащиеся должны уметь строить точку пересечения прямой и плоскости и прямую пересечения двух плоскостей.

Решение этих задач предполагает выполнение нескольких действий, новых для учащихся. Например, для решения задачи на построение точки пересечения прямой и плоскости требуется выполнить следующие действия: 1) найти плоскость, проходящую через данную прямую и пересекающую данную плоскость (стереометрическая задача); 2) найти прямую пересечения двух плоскостей (также стереометрическая задача); 3) построить точку пересечения найденной прямой и данной прямой, которая является искомой (планиметрическая задача). Значит, задачи «Построить точку пересечения прямой и плоскости» и «Построить прямую пересечения двух плоскостей» не являются базисными, их можно отнести к типовым задачам.

Если конкретизировать эти задачи для определённой геометрической конструкции, то полученные задачи не будут элементарными, а значит, начинать решение задач по теме «Аксиомы стереометрии» с таких задач нельзя, так как нарушатся принципы доступности и постепенного нарастания сложности. Следовательно, необходимо выделить задачи, которые, будучи конкретизированными, станут элементарными, то есть задачами в одно действие. К их числу относятся задачи: «Найти плоскость, в которой лежит данная прямая», «Найти плоскость, пересекающую данную плоскость», «Найти прямую пересечения двух данных плоскостей». С их использованием можно конструировать способы решения типовых стереометрических задач на построение, наиболее часто встречающихся на практике.

Формальное отношение к решению элементарных задач является одной из причин трудностей усвоения систематического курса стереометрии. Чтобы мотивировать учащихся к их решению, можно использовать предложенную выше задачу практического характера по теме «Аксиомы стереометрии», акцентируя внимание на том, что для её успешного решения нужно уметь выполнять действия, соответствующие базисным стереометрическим задачам.

По мере продвижения по курсу стереометрии система базисных задач дополняется задачами на распознавание параллельных и перпендикулярных прямых, прямой и плоскости и т. д., на доказательство принадлежности геометрических фигур определённому виду, на исследование их свойств и т. д. Система типовых задач дополняется задачами на построение изучаемых геометрических фигур (например, прямой, параллельной данной прямой и проходящей через точку, не лежащую на этой прямой), а также задачами на вычисление и (или) доказательство. Система опорных задач формируется из задач на построение, иллюстрирующих различные методы построения геометрических фигур; на доказательство полезных формул, позволяющих оперативно устанавливать метрические связи и выявлять метрические характеристики геометрических фигур; на вычисление и доказательство, в которых используется конструктивный метод решения задач, и другие методы. Таким образом, задачи конструктивного характера входят в число базисных, типовых и опорных задач, а значит, будут использоваться для конструирования задач, которые входят в окрестности различных задач. Кроме того, эти задачи можно использовать для мотивации изучения нового материала, организации деятельности по усвоению объёма и содержания вводимых понятий путём конструирования примеров и контрпримеров.

Особую роль играют задачи на конструирование геометрических фигур и их моделей при изучении темы «Введение в стереометрию». Как отмечается в работах Г. Д. Глейзера, Н. В. Литвиненко, И. Ф. Шарыгина и других учёных, конструирование пространственных фигур, соответствующих определённым условиям, их моделей, развёрток поверхностей многогранников способствует формированию пространственных представлений, развитию пространственного мышления и воображения учащихся, мотивации их учебной деятельности, а также повторению курса планиметрии. Для формирования умения выполнять построение графических моделей многогранников можно выделить базисные (типовые, опорные) задачи на изображение геометрических фигур, расположенных в пространстве.

Таким образом, решение задач конструктивного характера не требует дополнительных затрат времени, их введение в систему задач продиктовано спецификой учебного материала в курсе стереометрии. Выполнение функции регуляции процесса развития конструктивной деятельности, связанной с построением геометрических фигур и их моделей, можно обеспечить путём последовательного усложнения классических задач на построение и использования задач, отличающихся характером действия выбора элементов конструкции.

Последовательность построения системы задач для развития конструктивной деятельности учащихся и приёмы, используемые при построении. С учётом роли и места задач конструктивного характера в системе задач для развития конструктивной деятельности учащихся при обучении стереометрии её построение предполагает выполнение следующих действий:

1) формулировка базисных и типовых задач, разработка ориентировочной основы действий, соответствующих базисным задачам, алгоритмов решения типовых задач;

2) выбор опорных задач, создание библиотеки опорных геометрических конструкций;

3) формулировка элементарных задач, соответствующих базисным задачам, разработка библиотеки базисных геометрических конструкций; конструирование подсистемы задач, направленной на овладение действиями, соответствующими базисным задачам;

4) разработка подсистемы задач для овладения алгоритмами, соответствующими типовым задачам; создание библиотеки типовых геометрических конструкций;

5) конструирование задач, направленных на выявление опорных задач; построение подсистем задач для формирования умения применять каждую из опорных задач; разработка библиотеки приёмов и методов поиска решения задач;

6) конструирование задач для комплексного применения базисных, типовых и опорных задач; разработка (выбор) задач, решение которых требует использования приёмов и методов поиска решения задач в незнакомой ситуации;

7) выбор или конструирование задачи для мотивации изучения нового материала; построение подсистемы задач для усвоения объёма и содержания вводимых понятий, выявления их свойств и признаков, а также геометрических закономерностей;

8) разработка подсистемы задач для диагностики усвоения учебного материала и уровня развития конструктивной деятельности;

9) упорядочение и соединение задач в систему в соответствии с моделью структуры системы задач; выбор формы предъявления каждой из задач или серии задач.

В ходе конструирования системы задач применяются следующие *приёмы:*

✓ *интеграции функций системы задач*:
- использование конструктивных задач в качестве многофункциональных элементов системы;
- конструирование задач, которые входят в окрестности различных задач в качестве многофункциональных элементов системы, а также средства соединения задач в систему и оптимизации системы задач;

✓ *выбора элементов системы:*
- конструирование задач на основании выделенных базисных, типовых и опорных задач;
- использование различных типов задач конструктивного характера;

✓ *варьирования задач:*
- изменение геометрической конструкции, форм предъявления задачи, её требования;
- перефразировка задачи, усложнение геометрической конструкции, обобщение задачи, формулировка обратной задачи, использование задач с практическим содержанием;

✓ *расположения задач:*
- последовательно, параллельно, концентрически, последовательно-концентрически, параллельно-концентрически;
- задачи, имеющие одинаковое целевое назначение, располагаются параллельно;

✓ *соединения задач:*
- конструирование окрестностей базисных, типовых и опорных задач;
- выявление пересечений окрестностей;

✓ *оптимизации системы задач:*
- сокращение количества задач за счёт задач, которые входят в окрестности различных базисных задач одной темы;
- разработка общих блоков задач для овладения действиями, сформулированными на основании одного теоретического факта.

Используемые приёмы должны обеспечить выполнение проектируемой нами системой задач функции оптимизации процесса обучения геометрии, что должно быть проверено экспериментально.

Заключение

В данной работе изложена методика построения системы задач для развития конструктивной деятельности учащихся X—XI классов при обучении геометрии, разработанная с использованием конструктивного подхода. В соответствии с этим подходом выявлены функции проектируемой системы задач: пропедевтики конструктивной деятельности и обогащения её предметного содержания; обучения конструктивной деятельности и обогащения связанного с ней опыта; регуляции процесса её развития и диагностики; обучения геометрии; образования, интеллектуального развития и воспитания; индивидуализации и дифференциации; оптимизации процесса обучения геометрии. В качестве способа интеграции этих функций предлагается использовать многофункциональные задачи, к числу которых относятся задачи конструктивного характера.

В работе обоснована типология геометрических задач конструктивного характера, согласно которой выделены следующие типы задач: *на конструирование моделей* геометрических фигур (конструктивные геометрические, графические, практические задачи), *на вычисление и (или) доказательство конструктивным методом* (путём реконструирования опорной геометрической конструкции, доконструирования, переконструирования), *комбинированные* геометрические *задачи, связанные с применением конструирования*. Кроме того, обоснована типология конструктивных задач, позволяющая по *характеру действия выбора элементов конструкции* отличать задачи на реконструирование, доконструирование, переконструирование, конструирование нового по составу объекта. Раскрыты функции задач конструктивного характера, в частности их *интегрирующая функция*, которая состоит в совмещении свойств, необходимых для обучения учащихся геометрии, направленного на развитие их конструктивной деятельности.

В соответствии с функциями проектируемой системы задач выявлены её конструктивные свойства: состав, взаимное расположение задач, способы их соединения в систему; и структурные свойства: порядок предъявления задач и связи между ними. При этом установлено, что состав системы задач выявляется на основе *базисных*, *типовых* и *опорных* задач, которые определяют предметное содержание деятельности, связанной с конструированием способов решения задач. Под *базисной задачей* нами понимается сформулированная в общем виде задача, решение которой представляет собой описание действия, основанного на каком-либо теоретическом факте школьного курса геометрии. Систему задач составляют элементарные задачи, сформулированные на основе базисных задач, и более сложные задачи, направленные на овладение действиями, соответствующими базисным задачам; алгоритмами решения типовых задач; методами и результатами решения опорных задач; приёмами и методами поиска решения задач.

Задачи могут располагаться в системе последовательно, параллельно, концентрически, последовательно-концентрически, параллельно-концентрически в зависимости от назначения. Объединение задач в систему достигается за счёт дополнения ими друг друга по функциональному назначению. Для сокращения количества задач системы без ослабления функции формирования навыков предлагается конструировать задачи, которые входят в окрестности различных базисных задач, то есть в пересечение этих окрестностей. На основании конструктивных свойств проектируемой системы задач разработаны модель её структуры, последовательность построения системы и используемые при этом приёмы.

Изложенная в работе методика построения системы задач имеет следующие особенности: 1) она разработана на основе «*модели структуры конструктивной деятельности*» [1]; 2) *задачи*, составляющие систему, *конструируются в соответствии с функциями системы задач на основе базисных, типовых и опорных* задач школьного курса геометрии; 3) оптимизация системы задач обеспечивается за счёт построения *пересекающихся окрестностей базисных задач*.

Список цитированных источников

1. *Тухолко, Л. Л.* Теория развития конструктивной деятельности учащихся при обучении геометрии / Л. Л. Тухолко // Матэматыка: праблемы выкладання. — 2012. — № 3. — С. 9—32.

2. *Колягин, Ю. М.* Математические задачи как средство обучения и развития учащихся средней школы : автореф. дис. ... докт. пед. наук: 13.00.02 / Ю. М. Колягин. — М., 1977. — 56 с.

3. *Груденов, Я. И.* Совершенствование методики работы учителя математики / Я. И. Груденов. — М. : Просвещение, 1990. — 224 с.

4. *Саранцев, Г. И.* Упражнения в обучении математике / Г. И. Саранцев. — М. : Просвещение, 2005. — 256 с.

5. *Бевз, В. Г.* Методические основы построения системы стереометрических упражнений: автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / В. Г. Бевз. — Киев, 1990. — 15 с.

6. *Ковалёва, Г. И.* Методическая система обучения будущих учителей математики конструированию систем задач: автореф. дис. ... докт. пед. наук: 13.00.02 / Г. И. Ковалёва. — Волгоград, 2012. — 41 с.

7. *Кононенко, Н. В.* Система задач как средство формирования конструктивных умений учащихся в процессе изучения школьного курса планиметрии: автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Н. В. Кононенко. — Омск, 2002. — 20 с.

8. Теория систем и системный анализ в управлении организациями: Справочник: учеб. пособие / под. ред. В. Н. Волковой и А. А. Емельянова. — М. : Финансы и статистика, 2006. — 848 с.

9. *Уемов, А. И.* Системный подход и общая теория систем / А. И. Уемов. — М. : Мысль, 1978. — 272 с.

10. *Ожегов, С. И.* Толковый словарь русского языка: 80 000 слов и фразеологических выражений / С. И. Ожегов, Н. Ю. Шведова. — М. : Азбуковник, 1999. — 944 с.

11. *Ильина, Т. А.* Структурно-системный подход к организации обучения / Т. А. Ильина. — М. : Знание, 1972. — Вып. 1. — 72 с.

12. *Анохин, П. К.* Философские аспекты теории функциональной системы / П. К. Анохин. — М. : Наука, 1978. — 400 с.

13. *Меерович, М. И.* Формулы теории невероятности. Технология творческого мышления / М. И. Меерович. — Одесса : ПОЛИС, 1993. — 232 с.

14. *Сурмин, Ю. П.* Теория систем и системный анализ: учеб. пособие / Ю. П. Сурмин. — Киев : МАУП, 2003. — 368 с.

15. *Гельфман, Э. Г.* Психодидактика школьного учебника. Интеллектуальное воспитание учащихся / Э. Г. Гельфман, М. А. Холодная. — СПб. : Питер, 2006. — 384 с.

16. *Бабанский, Ю. К.* Оптимизация педагогического процесса (в вопросах и ответах) / Ю. К. Бабанский, М. М. Поташник. — Киев : Радяньска школа, 1983. — 287 с.

17. *Альтшуллер, Г. С.* Творчество как точная наука. Теория решения изобретательских задач / Г. С. Альтшуллер. — М. : Советское радио, 1979. — 184 с.

18. *Коровина, В.Г.* Развитие конструктивных умений и навыков учащихся IX—X классов средней школы в процессе решения геометрических задач: автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / В. Г. Коровина. — М., 1988. — 15 с.

19. *Тухолко, Л. Л.* Конструирование в стереометрии / Л. Л. Тухолко // Матэматыка: праблемы выкладання. — 2007. — № 6. — С. 43—53.

20. Психология решения учащимися производственно-технических задач / Акад. пед. наук. РСФСР; под ред. Н. А. Менчинской. — М. : Просвещение, 1965. — 255 с.

21. *Орлов, В. В.* Организация самостоятельного поиска решения стереометрических задач с помощью опорных конструкций: автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / В. В. Орлов. — Ленинград, 1990. — 19 с.

22. *Мищенко, Т. М.* Методика заключительного повторения курса планиметрии на основе базовых геометрических конфигураций: автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Т. М. Мищенко. — Москва, 1989. — 15 с.

23. *Лурия, А. Р.* Развитие конструктивной деятельности дошкольника / А. Р. Лурия // Вопросы психологии ребёнка дошкольного возраста / под ред. А. В. Леонтьева и А. В. Запорожца. — М., 1948. — С. 34—64.

24. *Балл, Г. А.* Теория учебных задач: психолого-педагогический аспект / Г. А. Балл. — М. : Педагогика, 1990. — 184 с.

25. *Аксёнов, А. А.* Теория обучения логическому поиску решения школьных математических задач: автореф. дис. ... докт. пед. наук: 13.00.02 / А. А. Аксёнов. — Нижний Новгород, 2010. — 44 с.

26. *Далингер, В. А.* Методика обучения учащихся доказательству математических предложений / В. А. Далингер. — М. : Просвещение, 2006. — 256 с.

27. *Мазуренко, О. А.* Минимальный базис в пространстве задач: решение задач по геометрии / О. А. Мазуренко // Математика в школе. — 2005. — № 8. — С. 44—50.

28. *Епишева, О. Б.* Учить школьников учиться математике: формирование приёмов учебной деятельности / О. Б. Епишева, В. И. Крупич. — М. : Просвещение, 1990. — 128 с.

29. *Шарыгин, И. Ф.* Учимся решать задачи по геометрии / И. Ф. Шарыгин // Математика в школе. — 1989. — № 2. — С. 87—101.

30. Методика преподавания математики в средней школе: общая методика / А. Я. Блох [и др.]; сост. Р. С. Черкасов, А. А. Столяр. — М. : Просвещение, 1985. — 336 с.

31. *Дорофеев, Г. В.* О составлении циклов взаимосвязанных задач / Г. В. Дорофеев // Математика в школе. — 1983. — № 6. — С. 34—39.

Поступила в редакцию 19.11.2012