

Аркадий Черняк, Василий Новиков,
Олег Мельников, Альберт Кузнецов

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ НА БАЗЕ **Mathcad**

Санкт-Петербург

«БХВ-Петербург»

2003

УДК 681.3.06
ББК 32.973.26-018.2
Ч-49

Черняк А. А., Новиков В. А., Мельников О. И., Кузнецов А. В.

К-49 Математика для экономистов на базе Mathcad. — СПб.: БХВ-Петербург, 2003. - 496 с: ил.

ISBN 5-94157-282-4

Учебное пособие охватывает следующие разделы: основы компьютерного пакета Mathcad, линейную алгебру, математическое программирование, исследование операций, экономико-математические модели, математическую статистику, корреляционный и регрессионный анализ. Содержание теоретического материала соответствует государственным образовательным стандартам, а структура ориентирована на нетривиальное использование пакетов компьютерной математики. Многие задачи снабжены подробными решениями или демонстрационными примерами.

Книга может служить в качестве учебно-методического комплекса по циклу математических дисциплин в экономических и технических высших учебных заведениях.

Для студентов экономических и технических специальностей вузов

УДК 681.3.06
ББК 32.973.26-018.2

Допущено Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов экономических и технических
специальностей высших учебных заведений

Группа подготовки издания:

Главный редактор	<i>Екатерина Кондукова</i>
Зам. главного редактора	<i>Анатолий Адаменко</i>
Зав. редакцией	<i>Григорий Добин</i>
Редактор	<i>Анатолий Хрипов</i>
Компьютерная верстка	<i>Татьяны Оляновой</i>
Корректор	<i>Вера Александрова</i>
Дизайн обложки	<i>Игоря Цырульникова</i>
Зав. производством	<i>Николай Тверских</i>

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 05.05.03.

Формат 70×100^{1/8}. Печать офсетная. Усл. печ. л. **39,99**.

Тираж 3000 экз. Заказ № 4223

“БХВ-Петербург”, 198005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

Гигиеническое заключение на продукцию, товар № **77.99.02.953.Д.001537.03.02**
от 13.03.2002 г. выдано Департаментом ГСЭН Минздрава России.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в Академической типографии “Наука” РАН
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, **12**.

ISBN 5-94157-282-4

О Черняк А. А., Новиков В. А., Мельников О. И.,
Кузнецов А. В., 2003
С Оформление, издательство “БХВ-Петербург”, 2003

Содержание

Предисловие	1
ЧАСТЬ I. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ЛИНЕЙНЫЕ ЭКОНОМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ	5
Глава 1. n-мерное векторное пространство действительных чисел	7
Компьютерный раздел.....	8
Задачи для самостоятельного решения.....	9
Общая формулировка задач К1.1—К1.11.....	10
Ответы, указания, решения.....	10
Глава 2. Линейно независимые системы векторов	13
Задачи для самостоятельного решения.....	15
Ответы, указания, решения.....	15
Глава 3. Матрицы: общие понятия	16
Компьютерный раздел.....	18
Задачи для самостоятельного решения.....	19
Общая формулировка задач П3.1 —П3.21.....	20
Общая формулировка задач К3.1— К3.11.....	22
Ответы, указания, решения.....	25
Глава 4. Метод Гаусса	29
Компьютерный раздел.....	32
Задачи для самостоятельного решения.....	33
Общая формулировка задач К4.1-К4.6.....	35
Общая формулировка задач К4.7— К4.12.....	36
Ответы, указания, решения.....	37

Глава 5. Следствия метода Гаусса	39
Задачи для самостоятельного решения.....	42
Ответы, указания, решения.....	44
Глава 6. Обратные матрицы	47
Задачи для самостоятельного решения.....	48
Ответы, указания, решения.....	50
Глава 7. Определители	52
Задачи для самостоятельного решения.....	55
Ответы, указания, решения.....	56
Глава 8. Метод наименьших квадратов	59
Задачи для самостоятельного решения.....	60
Ответы, указания, решения.....	62
Глава 9. Собственные значения неотрицательных матриц	63
Задачи для самостоятельного решения.....	66
Ответы, указания, решения.....	67
Глава 10. Балансовые модели многоотраслевой экономики	71
Компьютерный раздел.....	73
Задачи для самостоятельного решения.....	74
Ответы, указания, решения.....	76
Общий алгоритм решения задач K10.1—K10.10 с помощью Mathcad.....	77
Глава 11. Модели международной торговли	78
Задачи для самостоятельного решения.....	79
Ответы, указания, решения.....	81
Общий алгоритм решения задач K11.1—K11.10 с помощью Mathcad.....	81
ЧАСТЬ II. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ	83
Глава 12. Прямые и плоскости в n-мерном точечном пространстве	85
Задачи для самостоятельного решения.....	86
Ответы, указания, решения.....	87
Глава 13. Плоскости и прямые в двумерном и трехмерном точечных пространствах	89
Задачи для самостоятельного решения.....	90
Ответы, указания, решения.....	91

Глава 14. Многогранники и полиэдры	94
Задачи для самостоятельного решения.....	97
Ответы, указания, решения.....	97
Глава 15. Общая задача условной оптимизации	99
Задачи для самостоятельного решения.....	101
Ответы, указания, решения.....	102
Глава 16. Строение множества планов задачи линейного программирования	103
Компьютерный раздел.....	107
Задачи для самостоятельного решения.....	110
Общая формулировка задач К 16.1—К16.11.....	111
Ответы, указания, решения.....	112
Общий алгоритм решения задач К 16.1—К16.11 с помощью Mathcad.....	113
Глава 17. Симплекс-метод	115
Компьютерный раздел.....	122
Задачи для самостоятельного решения.....	122
Общая формулировка задач П 17.1—П 17.20 в буквенных обозначениях.....	123
Общая формулировка задач К 17.1—К17.10.....	127
Ответы, указания, решения.....	129
Глава 18. Понятие двойственности в линейном программировании	133
Задачи для самостоятельного решения.....	135
Ответы, указания, решения.....	136
Глава 19. Основные теоремы двойственности и их экономический смысл	139
Задачи для самостоятельного решения.....	142
Ответы, указания, решения.....	143
Глава 20. Некоторые понятия и теоремы теории графов	146
Задачи для самостоятельного решения.....	151
Ответы, указания, решения.....	151
Глава 21. Транспортные задачи по критериям стоимости и времени: общая постановка	153
Задачи для самостоятельного решения.....	155
Ответы, указания, решения.....	155

Глава 22. Опорные планы транспортных задач	157
Задачи для самостоятельного решения.....	159
Ответы, указания, решения.....	160
Глава 23. Оптимальные планы транспортных задач по критерию стоимости	161
Компьютерный раздел.....	164
Задачи для самостоятельного решения.....	165
Общая формулировка задач П23.1 - П23.10 в буквенных обозначениях.....	165
Общая формулировка задач П23.11—П23.22 в буквенных обозначениях.....	167
Общая формулировка задач К23.1 - К23.10.....	169
Ответы, указания, решения.....	172
Глава 24. Оптимальные планы транспортных задач по критерию времени	180
Компьютерный раздел.....	182
Задачи для самостоятельного решения.....	183
Общая формулировка задач К24.1 - 24.10.....	183
Ответы, указания, решения.....	185
Общий алгоритм решения задачи К24.1 1 с помощью Mathcad.....	185
Глава 25. Поток в орграфах	187
Задачи для самостоятельного решения.....	189
Ответы, указания, решения.....	189
Глава 26. Алгоритм определения максимальных потоков	190
Задачи для самостоятельного решения.....	195
Общая формулировка задач П26.1—П26.21.....	196
Ответы, указания, решения.....	198
Глава 27. Модели сетевого планирования и управления	202
Задачи для самостоятельного решения.....	205
Общая формулировка задач П27.1—П27.21 в буквенных обозначениях.....	205
Ответы, указания, решения.....	211
Общие указания к решению задач К27.1 - К27.10 с помощью Mathcad.....	213
Глава 28. Динамическое программирование	214
Компьютерный раздел.....	218
Задачи для самостоятельного решения.....	219
Общая формулировка задач П28.1—П28.20 и К28.1 в буквенных обозначениях.....	219
Ответы, указания, решения.....	224

Глава 29. Матричные игры	227
Задачи для самостоятельного решения.....	232
Ответы, указания, решения.....	232
Глава 30. Игры с природой	234
Задачи для самостоятельного решения.....	237
Общая формулировка задач П30.1—П30.10 в буквенных обозначениях.....	237
Общая формулировка задач П30.11—П30.20 в буквенных обозначениях.....	238
Общая формулировка задач К30.1—К30.10 в буквенных обозначениях.....	239
Ответы, указания, решения.....	241
Глава 31. Метод ветвей и границ в задачах дискретного программирования	244
Компьютерный раздел.....	249
Задачи для самостоятельного решения.....	250
Ответы, указания, решения.....	253
Глава 32. Общая задача нелинейного программирования	258
Задачи для самостоятельного решения.....	259
Ответы, указания, решения.....	261
Глава 33. Метод множителей Лагранжа	263
Задачи для самостоятельного решения.....	266
Общая формулировка задач П33.11—П33.20 в буквенных обозначениях.....	267
Глава 34. Понятие о градиентных методах	268
Задачи для самостоятельного решения.....	270
Общая формулировка задач К34.1—К34.10.....	271
Ответы, указания, решения.....	272
Глава 35. Градиентные методы в двумерном пространстве	273
Компьютерный раздел.....	276
Задачи для самостоятельного решения.....	277
Общая формулировка задач П35.1—П35.10 в буквенных обозначениях.....	277
Общая формулировка задач П35.11—П35.22 в буквенных обозначениях.....	279
Ответы, указания, решения.....	281
ЧАСТЬ III. МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ И СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ	289
Глава 36. Экономический смысл определенного интеграла	291
Задачи для самостоятельного решения.....	292
Ответы, указания, решения.....	292

Глава 37. Статические модели управления запасами без дефицита	293
Компьютерный раздел.....	295
Задачи для самостоятельного решения.....	298
Общая формулировка задач К37.1—К37.13 в буквенных обозначениях.....	298
Ответы, указания, решения.....	299
Глава 38. Статические модели управления запасами с дефицитом	301
Задачи для самостоятельного решения.....	302
Общая формулировка задач К38.1—К38.12 в буквенных обозначениях.....	302
Ответы, указания, решения.....	303
Глава 39. Простейшие потоки событий	304
Задачи для самостоятельного решения.....	307
Ответы, указания, решения.....	307
Глава 40. Замкнутые системы массового обслуживания	309
Компьютерный раздел.....	311
Задачи для самостоятельного решения.....	316
Общая формулировка задач К40.1—К40.12 в буквенных обозначениях.....	316
Ответы, указания, решения.....	317
Общий алгоритм решения задач К40.1—К40.12 с помощью Mathcad.....	317
Глава 41. Открытые системы массового обслуживания	319
Задачи для самостоятельного решения.....	321
Общая формулировка задач К41.1—К41.12 в буквенных обозначениях.....	321
Ответы, указания, решения.....	322
Общий алгоритм решения задач К41.1—К41.12 с помощью Mathcad.....	322
ЧАСТЬ IV. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА И КОРРЕЛЯЦИОННО-РЕГРЕССИВНЫЕ МОДЕЛИ	325
Глава 42. Двумерные случайные величины	327
Компьютерный раздел.....	330
Задачи для самостоятельного решения.....	332
Общая формулировка задач К42.1—К42.11.....	332
Ответы, указания, решения.....	333
Глава 43. Условные распределения и их числовые характеристики	337
Компьютерный раздел.....	341
Задачи для самостоятельного решения.....	342
Общая формулировка задач К43. <i>i</i> , где $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$	342
Ответы, указания, решения.....	343

Глава 44. Двумерный нормальный закон распределения.....	347
Задачи для самостоятельного решения.....	349
Ответы, указания, решения.....	349
Глава 45. Законы распределения некоторых функций нормальных случайных величин.....	351
Компьютерный раздел.....	353
Задачи для самостоятельного решения.....	354
Общая формулировка задач К45.1 - К45.10.....	354
Ответы, указания, решения.....	354
Глава 46. Точечные и интервальные оценки параметров генеральной совокупности.....	356
Задачи для самостоятельного решения.....	361
Ответы, указания, решения.....	364
Глава 47. Проверка статистических гипотез.....	368
Задачи для самостоятельного решения.....	372
Ответы, указания, решения.....	376
Глава 48. Двумерная модель корреляционного анализа.....	379
Компьютерный раздел.....	383
Задачи для самостоятельного решения.....	384
Ответы, указания решения.....	388
Общий алгоритм решения задач К48.1—К48.12 с помощью Mathcad.....	388
Глава 49. Модели парной регрессии.....	390
Компьютерный раздел.....	392
Задачи для самостоятельного решения.....	393
Ответы, указания, решения.....	396
Общий алгоритм решения задач К49.1—К49.10 с помощью Mathcad.....	396
Глава 50. Линейные модели множественной регрессии.....	398
Задачи для самостоятельного решения.....	400
Общая формулировка задач К50.1—К50.13.....	400
Ответы, указания, решения.....	404
Общий алгоритм решения задач К50.1—К50.13 с помощью Mathcad.....	404
ПРИЛОЖЕНИЕ. ОСНОВНОЙ ИНСТРУМЕНТАРИЙ MATHCAD.....	407
Приложение 1. Окно редактирования и панели инструментов.....	409
Окно редактирования.....	409
Панели инструментов.....	410

Панель инструментов Стандартная.....	411
Панель инструментов Форматирование.....	412
Панель инструментов Математика.....	413
Приложение 2. Константы, переменные, выражения.....	417
Формулы с константами.....	417
Переменные и формулы с переменными.....	421
Собственные функции пользователя.....	424
Формулы с векторами и матрицами.....	425
Обработка формул в символьном виде.....	431
Задание формул и функций с использованием программных модулей.....	436
Приложение 3. Редактирование и форматирование формул.....	443
Приложение 4. Команды меню.....	454
Пункт меню Файл.....	454
Пункт меню Правка.....	456
Пункт меню Вид.....	460
Пункт меню Вставка.....	461
Пункт меню Формат.....	471
Пункт меню Математика.....	477
Пункты меню Символика, Окно, Помощь.....	479
Предметный указатель.....	482

Когда дует ветер перемен, надо строить не щитот ветра,
а ветряные мельницы.

Восточная мудрость

Предисловие

Преподавание математики в настоящее время переживает четвертый этап революционных перемен, связанных с появлением мощных компьютерных пакетов: Mathcad, Mathematica, Matlab, Derive, Theorist и т. д. (первые три этапа этой революции в свое время знаменовались соответственно появлением счетной доски, бухгалтерских счетов и микрокалькулятора). Поэтому главный побудительный мотив написания данной книги — синтезировать традиционные принципы преподавания математики на экономических факультетах вузов с новейшими достижениями компьютерной математики. Следует сказать, что эта идея не нова и даже стала уже рутинной. Однако в данной книге она реализована так, чтобы удовлетворять следующим трем постулатам.

1. Компьютерная математика — это всего лишь инструмент, позволяющий сосредоточить внимание студента на понятиях и логике методов и алгоритмов, освобождая его от необходимости освоения громоздких, незапоминающихся и потому бесполезных вычислительных процедур и трюков. И использование этого инструмента только в качестве иллюстративного средства с целью "уберечь" студента от "скучной" математики, сведя ее постижение к нажатию кнопок мыши и клавиш клавиатуры, сродни комиксам, низводящим классические произведения литературы до уровня примитивных мультяшек.
2. Несмотря на всепроникающий прогресс компьютерных технологий, постижение теоретических основ математики невозможно без таких давнишних изобретений человечества, как классная доска, мел, ручка и лист бумаги.
3. В основе преподавания должен лежать компьютерный пакет, обладающий наглядным интерфейсом и универсальными возможностями.

Первый постулат повлиял на содержание и структуру теоретического материала. Книга разбита на части: I — "Линейная алгебра и линейные экономические модели", II — "Математическое программирование", III — "Модели управления запасами и системы массового обслуживания", IV — "Математическая статистика и корреляционно-регрессионные модели"; имеется приложение — "Основной инструментарий Mathcad". Части состоят из глав, а главы разбиты на разделы: раздел теории, компьютерный раздел, блоки задач для самостоятельного решения, раздел решений и ответов.

Содержание теоретических разделов соответствует государственным образовательным стандартам, а их структура ориентирована на нетривиальное использование любых пакетов компьютерной математики. Эти разделы написаны на основании оригинальных методических разработок, что позволило традиционно сложные для усвоения понятия, методы, алгоритмы и теоремы сделать более *доступными*, не нанося ущерба их математической строгости.

Второй постулат предопределил подборку практического материала. Разделы "Задачи для самостоятельного решения" состоят из блоков обучающих задач трех видов: "Т" — теоретических, "П" — практических, "К" — компьютерных. Задачи типа "Т" ориентированы на углубленное постижение теории; во многих случаях они дополняют содержание глав, давая возможность студенту творчески осмыслить материал с помощью самостоятельных выводов и доказательств, сверив их затем с приводимыми в разделах "Ответы, указания, решения". Задачи типа "П" предназначены для приобретения практических навыков в освоении алгоритмов и методов, доступных для "ручного" счета и обработки. При этом каждый блок таких задач содержит ровно по 20 однотипных примеров, в обязательном порядке сопровождаемых демонстрационными задачами с подробными решениями (что позволяет использовать их в качестве практикума для студентов-заочников). Задачи типа "К", недоступные для "ручной" обработки, ориентированы исключительно на использование пакета компьютерной математики. Каждый блок таких задач содержит по 10 однотипных примеров, в обязательном порядке сопровождаемых алгоритмом решения с помощью операторов и функций Mathcad.

И наконец, третий постулат предопределил компьютерную основу данной книги — это Mathcad. Mathcad выгодно отличается от других пакетов возможностью свободно компоновать рабочий лист и относительной легкостью изучения. Так же, как с карандашом в руке решается задача на листе бумаги, в принципе, можно оформить и соответствующий Mathcad-документ. Если некоторое время не возникает необходимости работать с Mathcad, то впоследствии навыки пользования пакетом легко восстанавливаются. В других же пакетах компьютерной математики используется очень сложный синтаксис, который быстро забывается, если не работать с этим пакетом постоянно. Кроме того, Mathcad — это универсальная, а не специализированная математическая среда.

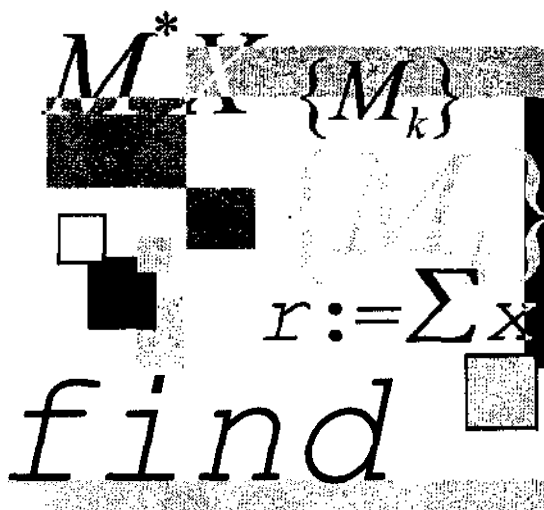
В книге элементы, функции и процедуры Mathcad с иллюстрациями и примерами описываются в компьютерных разделах соответствующих глав, а их возможности демонстрируются на примере алгоритмов решения компьютерных задач из этих глав. При этом из многовариантных возможностей Mathcad выбраны наиболее оптимальные способы использования элементов этого пакета. Благодаря компьютерным разделам изъятые громоздкие вычислительные процедуры, неизменно сопутствующие методам и алгоритмам математического программирования. В тексте в качестве разделителя дроби используется точка в соответствии со спецификацией программы Mathcad.

Теперь несколько слов о структуре учебника. Нумерация глав сквозная. Теоремы, утверждения, леммы, следствия, рисунки, формулы и задачи нумеруются двумя числами: первое из них — это номер главы, второе — их порядковый номер в самой главе. Та или иная процедура, функция, оператор Mathcad подробно описываются в компьютерном разделе именно той главы, где они впервые встречаются. Поэтому освоение пакета Mathcad идет параллельно с математической теорией. В приложении, дополняющем компьютерные разделы в главах, дается обзор панелей инструментов, описание основных команд меню и способы редактирования формул.

При подготовке книги работа между авторами была распределена следующим образом: главы 8, 9, 12—14, 28, 32—33, 39—50 написаны А. А. Черняком, глава 20 — О. И. Мельниковым, главы 10, 11, 36—38 — совместно А. А. Черняком и Д. А. Черняк, главы 1-7, 15-19, 21—27, 29, 31, 34 написаны совместно А. А. Черняком и О. И. Мельниковым, главы 30, 35 — совместно А. А. Черняком и А. В. Кузнецовым, приложение — совместно А. А. Черняком и В. А. Новиковым, задачи типа "П" для глав 17, 19, 23, 28, 30, 35, 46, 47 составлены А. В. Кузнецовым, компьютерный набор и редактирование текста осуществлен В. А. Новиковым.

Авторы также признательны студентке Д. А. Черняк выпускного курса факультета "Business Administration" Нью-Йоркского государственного университета за помощь в написании глав 10, 11, 36—38.

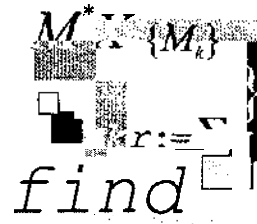
Авторы: доктор физико-математических наук, профессор, лауреат премии Академии наук Беларуси А. А. Черняк, кандидат технических наук, доцент В. А. Новиков, кандидат физико-математических наук, доцент, лауреат Государственной премии Беларуси О. И. Мельников, кандидат технических наук, профессор А. В. Кузнецов.



Часть I

**Линейная алгебра и линейные
экономические модели**

Глава 1



n -мерное векторное пространство действительных чисел

Вектором \vec{a} размерности n называется упорядоченная последовательность n действительных чисел (a_1, a_2, \dots, a_n) . Числа a_1, \dots, a_n называются координатами вектора \vec{a} . Два вектора $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$ одинаковой размерности называются равными, если они равны по координатам: $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$. Вектор $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$ называется нулевым. Длиной $|\vec{a}|$ вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ называется число $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$.

Операции над векторами:

- сложение векторов одинаковой размерности: суммой двух векторов $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ называется вектор $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$.
- умножение вектора на скаляр: произведением вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ на действительное число α называется вектор $\alpha \vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n)$.
- скалярное произведение двух векторов одинаковой размерности: число $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$ называется скалярным произведением двух векторов $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ и будет обозначаться $[\vec{a} \cdot \vec{b}]$. Векторы \vec{a} и \vec{b} называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю.

Теорема 1.1 (основные свойства операций над векторами).

1. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$;
2. $|\vec{a}|^2 = [\vec{a} \cdot \vec{a}]$;
3. $|\alpha\vec{a}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$;
4. $[\vec{a} \cdot \vec{b}] = [\vec{b} \cdot \vec{a}]$;
5. $\alpha[\vec{a} \cdot \vec{b}] = [\alpha\vec{a} \cdot \vec{b}] = [\vec{a} \cdot \alpha\vec{b}]$;
6. $[(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}] = [\vec{a} \cdot \vec{c}] + [\vec{b} \cdot \vec{c}]$;
7. $[(\alpha\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d})] = [\alpha\vec{a} \cdot \vec{c}] + [\vec{a} \cdot \vec{d}] + [\vec{b} \cdot \vec{c}] + [\vec{b} \cdot \vec{d}]$.

Доказательство теоремы дано в задаче Т1.2.

Теорема 1.2.

$$-1 \leq \frac{[\vec{a} \cdot \vec{b}]}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \leq 1$$

Доказательство теоремы дано в задаче Т1.6.

Именно ввиду теоремы 1.2 величину $\frac{[\vec{a} \cdot \vec{b}]}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ называют косинусом угла между векторами \vec{a} и \vec{b} , тем более что на плоскости это понятие тождественно тригонометрическому определению угла между двумя векторами.


Определение




Множество всех векторов размерности n , в котором заданы операции сложения векторов и умножения векторов на скаляры, называется n -мерным векторным пространством действительных чисел и обозначается R^n .

Компьютерный раздел

Координаты векторов вводятся на рабочем листе **Mathcad-документа** следующим образом. Пусть, к примеру, надо ввести вектор $vect1 = (3, 2, 5.6, -8)$. Разместите курсор (красный крестик) в нужном месте рабочего листа. Введите имя вектора $vect1$. Клавишей $\langle : \rangle$ введите знак присваивания $:=$. Комбинацией клавиш $\langle \text{Ctrl} \rangle + \langle \text{M} \rangle$ выведите диалоговое окно **Вставить матрицу (Insert Matrix)**, изображенное на рис. 1.1. В поле **Строк (Rows)** этого окна задайте размерность вектора 4 $vect1$. В поле **Колонок (Columns)** задайте 1. Щелкните на кнопке ОК. Справа от знака присваивания (на месте метки, выделенной синим курсором ввода) появится шаблон вектора с метками для ввода его координат:

$$vect1 := \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$$

Некоторые операции над векторами производятся с помощью подпанели инструментов **Матрица (Matrix)**, для вызова которой надо щелкнуть на кнопке  панели инструментов **Математика (Math)**, показанной на рис. 1.2.

Как видно из рис. 1.3, подпанель **Матрица (Matrix)** содержит 12 кнопок. Щелкнув на кнопке  скалярного произведения, можно вывести шаблон  и на месте меток ввести векторы, участвующие в скалярном произведении. Кнопка  задает шаблон \sum для определения суммы координат вектора, имя которого следует задать на месте метки.

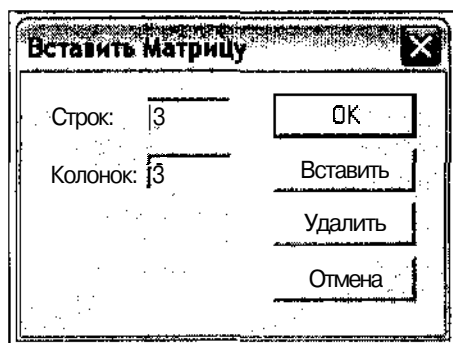


Рис. 1.1. Диалоговое окно Вставить Матрицу

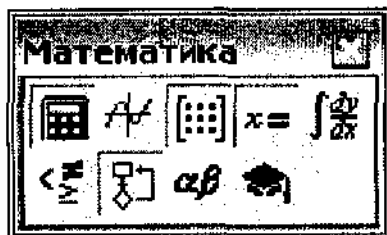


Рис. 1.2. Панель Математика

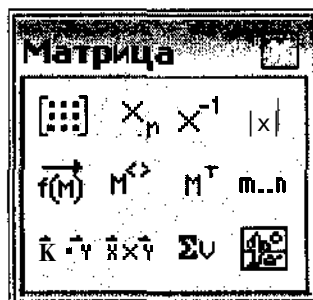


Рис. 1.3. Подпанель Матрица

Задачи

для самостоятельного решения

Т1. Доказать, что длина любого вектора неотрицательна, причем она равна нулю, если и только если этот вектор нулевой.

Т1.2. Доказать все свойства, сформулированные в теореме 1.1.

Т1.3. Доказать, что косинус угла между векторами \vec{a} и \vec{b} равен 1, если один из них равен другому, умноженному на некоторое положительное число.

Т1.4. Доказать, что косинус угла между векторами \vec{a} и \vec{b} равен -1, если один из них равен другому, умноженному на некоторое отрицательное число.

Т1.5. Даны два вектора \vec{a} и \vec{b} из пространства R^n . Переставить координаты вектора \vec{b} так, чтобы косинус угла между векторами \vec{a} и \vec{b} был максимальным.

Т1.6. Доказать теорему Т1.2.

Общая формулировка задач К1.1 – К1.11

Даны векторы x и y одинаковой размерности, i -я координата вектора x — это размер в млн ден. ед. кредита, выданного банком i -й фирме, j -я координата вектора y — годовая процентная ставка этого кредита. Определить общую сумму кредита; прибыль, которую банк должен получить по истечении года за кредиты, выданные фирмам; процент прибыли от общей суммы кредитов.

К1.1. $x = (1.5, 5.2, 11, 0.7, 3.2, 33.5, 8.5, 6.3)$;

$y = (3.8, 4.5, 1.7, 6.4, 7, 12, 22.3, 17.3)$.

К1.2. $x = (5.5, 2.1, 21, 2.5, 6.2, 23.7, 9.6, 9.1, 34, 21.6, 33.2, 5.7)$;

$y = (2.6, 1.9, 5.1, 11.2, 6.8, 22.2, 2.7, 7.9, 13.5, 23.5, 8.3, 8.1)$.

К1.3. $x = (5.3, 1.4, 13.2, 2.7, 4.4, 13.4, 28.3, 4.2, 23.5, 6.3, 12.5)$;

$y = (8.8, 5.1, 3.8, 9.7, 13.7, 21.4, 12.5, 7.7, 8.1, 23.4, 4.6)$.

К1.4. $x = (16.5, 25.5, 1.1, 2.8, 18.2, 45.1, 13.6, 5.3, 55.1, 4.6, 2.6, 14.5, 45.2, 23.1)$;

$y = (7.8, 9.5, 7.7, 16, 4.8, 22, 32.4, 27.5, 1.1, 32.4, 6.3, 8.3, 11.1, 8.3)$.

К1.5. $x = (11.5, 25.2, 31, 3.7, 5.2, 23.5, 8.8, 3.3, 17.2, 8.2, 11.4, 34.1)$;

$y = (5.8, 14.5, 11.7, 16, 8.7, 32, 32.7, 27.3, 12.4, 23.1, 31.2, 44.6)$.

К1.6. $x = (7.6, 9.1, 12, 2.3, 13.2, 24.5, 18.5, 9.3, 42.1, 23.4)$;

$y = (6.8, 4.3, 6.7, 6.5, 14.7, 16.4, 32.5, 27.3, 11.7, 34.6)$.

К1.7. $x = (5.5, 15.4, 21.4, 3.7, 5.2, 13.5, 5.3, 13.5, 23.4, 21.2, 6.3)$;

$y = (6.3, 8.4, 6.7, 3.4, 9.3, 22.5, 2.3, 6.3, 21.6, 33.2, 12.8)$.

К1.8. $x = (33.5, 51.2, 19.3, 7.7, 8.2, 43.5, 28.4, 8.6, 31.3, 42.4, 35.2, 12.5, 3.4, 4.5, 42.1, 2.4, 11.4)$;

$y = (7.8, 6.4, 3.8, 9.4, 3.2, 22.3, 2.5, 7.3, 4.1, 23.2, 13.5, 24.2, 45.2, 5.6, 7.5, 21.2, 7.2)$.

К1.9. $x = (7.5, 25.1, 1.9, 4.7, 5.2, 23.1, 18.5, 16.3, 23.1, 24.5, 31.2, 41.2, 9.3, 1.2)$;

$y = (4.8, 6.5, 3.7, 7.6, 8.7, 32.2, 2.3, 7.5, 6.2, 8.2, 23.6, 42.2, 7.2, 8.1)$.

К1.10. $x = (4.2, 15.1, 21.3, 2.7, 4.4, 3.8, 18.3, 2.3, 17.3, 34.1)$;

$y = (4.8, 6.2, 11.7, 16.2, 8.7, 32.4, 2.3, 7.3, 9.1, 21.2)$.

К1.11. $x = (14, 81, 76, 300, 2.6, 2.7, 2.7, 12, 15.7, 121, 98, 123.5, 80, 0.5, 0.65, 14, 25, 258, 2.5, 2.5)$;

$y = (18, 16, 16, 12, 19, 19, 18, 18, 13, 13, 14, 12, 21, 22, 12.5, 12, 12.5, 10.5, 18, 18)$.

Ответы, указания, решения

П1.2. Докажем второе, пятое и шестое свойства. Пусть $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$.

Тогда $|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = a_1 a_1 + a_2 a_2 + \dots + a_n a_n = [\vec{a} \cdot \vec{a}]$;

$\alpha[\vec{a} \cdot \vec{b}] = \alpha(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) = (\alpha a_1) b_1 + (\alpha a_2) b_2 + \dots + (\alpha a_n) b_n = [\alpha \vec{a} \cdot \vec{b}]$;

аналогично показывается, что $\alpha[\vec{a} \cdot \vec{b}] = [\vec{a} \cdot \alpha \vec{b}]$. Так как

$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$, то

$$\begin{aligned} [(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}] &= (a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2 + \dots + (a_n + b_n)c_n = \\ &= a_1 c_1 + b_1 c_1 + a_2 c_2 + b_2 c_2 + \dots + a_n c_n + b_n c_n = \\ &= (a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n) + (b_1 c_1 + b_2 c_2 + \dots + b_n c_n) = [\vec{a} \cdot \vec{c}] + [\vec{b} \cdot \vec{c}] \end{aligned}$$

Т1.3. Предположим, что $\vec{a} = a\vec{e}$ и $\alpha > 0$. Тогда $[\vec{a} \cdot \vec{b}] = [a\vec{e} \cdot \vec{b}] = \alpha[\vec{b} \cdot \vec{e}] = \alpha |\vec{b}|$,

$$|\vec{a}| = |\alpha \vec{e}| = |\alpha| \cdot |\vec{e}| = |\alpha| |\vec{b}|. \text{ Отсюда } \frac{[\vec{a} \cdot \vec{b}]}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a |\vec{b}|}{|\alpha| |\vec{b}| |\vec{b}|} = \frac{a}{|\alpha| |\vec{b}|}$$

Т1.5. Будем считать, что координаты вектора \vec{a} упорядочены в порядке неубывания: $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$. Предположим, что найдутся такие две координаты b_i, b_k вектора \vec{b} , что $b_i > b_k$ при $i < k$. Тогда $a_i b_i + a_k b_k < a_i b_k + a_k b_i$. Поэтому перестановка b_i и b_k не приведет к уменьшению скалярного произведения $[\vec{a} \cdot \vec{b}]$. Это означает, что величина $[\vec{a} \cdot \vec{b}]$ примет максимальное значение, если координаты вектора \vec{b} будут упорядочены по неубыванию. Но перестановка координат не изменяет длин векторов. Поэтому величина $\frac{[\vec{a} \cdot \vec{b}]}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ максимальна, если координаты вектора \vec{b} упорядочены по неубыванию.

Т1.6. Обозначим через α число $\frac{[\vec{a} \cdot \vec{b}]}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ и рассмотрим квадрат длины вектора $\vec{a} - \alpha \vec{b}$:

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \alpha \vec{b}|^2 &= [(\vec{a} - \alpha \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \alpha \vec{b})] = [a \cdot \vec{a}] + [(-\alpha \vec{b}) \cdot \vec{a}] + [a \cdot (-\alpha \vec{b})] + \\ &+ [(-\alpha \vec{b}) \cdot (-\alpha \vec{b})] = |\vec{a}|^2 - \alpha[\vec{a} \cdot \vec{b}] - \alpha[\vec{a} \cdot \vec{b}] + \alpha^2[\vec{b} \cdot \vec{b}] = |\vec{a}|^2 - 2\alpha[\vec{a} \cdot \vec{b}] + \alpha^2 |\vec{b}|^2 \end{aligned}$$

Вместо α подставим его значение, равное $\frac{[\vec{a} \cdot \vec{b}]}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$:

$$|\vec{a}|^2 - 2 \frac{[\vec{a} \cdot \vec{b}][\vec{a} \cdot \vec{b}]}{|\vec{a}| |\vec{b}|} + \frac{([\vec{a} \cdot \vec{b}])^2 |\vec{b}|^2}{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2} = |\vec{a}|^2 - \frac{([\vec{a} \cdot \vec{b}])^2}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

Последнее число, являясь квадратом длины вектора $\vec{a} - \alpha \vec{b}$, должно быть неотрицательным, т.е. $|\vec{a}|^2 - \frac{([\vec{a} \cdot \vec{b}])^2}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \geq 0$, $|\vec{a}|^2 |\vec{b}| \geq ([\vec{a} \cdot \vec{b}])^2$ отсюда $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$,

т.е. $|\vec{a}|^2 |\vec{b}| \geq ([\vec{a} \cdot \vec{b}])^2 \Rightarrow |\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$ Теорема доказана.

K1.11. Искомая прибыль будет равна скалярному произведению векторов x и y , деленному на 100. Поэтому для решения этой задачи с помощью Mathcad необходимо выполнить следующие действия. Ввести координаты векторов x и y . Определить суммарную величину кредита: $kr := \sum x$. Определить прибыль банка $pr := \frac{[x \cdot y]}{100}$.

Процент прибыли от общей суммы кредита будет равен $\frac{pr}{kr} \cdot 100$.

Ответы: 1232.35 млн ден. ед., 163.39млн ден. ед., 13.26%.