ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

№ 5

Мінск
Выдавецтва «Навука і тэхніка»
1978

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 5 1978
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

МАТЭМАТЫКА

УДК 519.1

Р. И. ТЫШКЕВИЧ, А. А. ЧЕРНЯК

УНИГРАФЫ. I

Все рассматриваемые здесь графы конечные, неориентированные, без петель и кратных ребер.

Невозрастающая последовательность

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \tag{1}$$

целых чисел называется графической, если существует p-вершинный граф G, для которого (1) — степени вершин; G называется реализацией последовательности (1). Графическая последовательность называется униграфической, если все ее реализации изоморфны. Реализация униграфической последовательности называется униграфом.

Пара невозрастающих последовательностей

$$(\beta_1, \ldots, \beta_q), \ (\gamma_1, \ldots, \gamma_r) \tag{2}$$

целых чисел называется графической, если существует двудольный граф G, для которого q — число вершин одной доли, $\beta_1, \ldots, \beta_q$ — степени этих вершин, r и $\gamma, \ldots, \gamma_r$ — аналогичные числа для второй доли; G называется реализацией пары (2). Если для любых двух реализаций графической пары (2) существует их изоморфизм, переводящий доли друг в друга, то эта пара называется униграфической, а ее реализация — двудольным униграфом. Если «быть униграфом» — действительно графовое свойство, то «быть двудольным униграфом» не есть свойство графов. Это бинарный предикат, зависящий от двудольного графа и от разбиения множества его вершин на доли: единственная реализация одной графической пары может оказаться одной из нескольких реализаций другой пары (§ 2).

Проблема изучения униграфов имеет два аспекта — описание вида униграфических последовательностей или процедуры испытания последовательности «на униграфичность» и описание униграфов. Первый аспект рассматривался в [4—6]. В [6] приведен алгоритм испытания последовательности (1) со сложностью $O(p^2)$. В [5] описаны униграфические последовательности (1), в которых $\alpha_2 = \ldots = \alpha_p$, а проверка на «униграфичность» произвольной последовательности сведена к аналогичной задаче для пары последовательностей. В [4] описаны униграфические пары (2) с условием $\beta_1 = \beta_q$ и приведена процедура испытания на «униграфичность» любой пары. Оценок сложности в [4] и [5] нет. Второй аспект рассматривался в [3], где описаны регулярные и несвязные униграфы, изучение же произвольных униграфов частично сведено к аналогичной задаче для униграфов, не имеющих точек сочленения.

Настоящая работа относится ко второму аспекту: в ней приводятся характеризации униграфов и двудольных униграфов. Вначале описываются двудольные униграфы. На множестве двудольных графов определяются простые операции, относительно которых класс двудольных униграфов является алгеброй; указана очень простая система образующих этой алгебры. Далее строится ряд $G=G^0\supset G^1\supset\ldots\supset G^l$ произвольного графа G (G^{i+1} — подграф в G, порожденный всеми вершинами равных степеней), который обрывается на регулярном графе. Свойство графа быть униграфом оказывается наследственным по отношению ко всем его рядам, что дает возможность реконструировать все униграфы исходя из регулярных и двудольных униграфов. Вводится новый инвариант графа — его ступень (максимальная длина рядов) и доказывается, что ступень униграфа не выше 3, так что эта реконструкция не очень далекая. Все униграфы классифицируются по их ступеням. Результаты [4, 5] не используются.

Из этой работы могут быть выведены все теоремы, анонсированные в [1].

Работа состоит из трех частей. В первой подготавливается соответствующий аппарат.

§ 1. Обозначения, терминология, аппарат. G—граф с множеством вершин V, $\bar{G}$ — дополнительный граф; $\deg v$ — степень вершины v, vw — ребро, соединяющее вершины v и w; для $W\subseteq V$ $G<W>$ — порожденный подграф.

$K<V>$ — полный граф с множеством вершин V; K_p и O_p— полный и пустой p-вершинные графы соответственно; если A и B — множества, то $K_{A,B}$ — полный двудольный граф с долями A и B; $K_{m,n}$— полный двудольный граф, доли которого состоят из m и из n элементов соответственно; $|M|$ — мощность множества M.

Для a $b\in V$ будем писать $a\sim b$, если a и b смежны, $a\not\sim b$ в противном случае. Для $a\in V$, $B\subseteq V$ $a\sim B$ ($a\not\sim B$) означает, что для любого $b\in B$ $a\sim b$ (a~|~b). Для A, $B\subseteq V$ $A\sim B$ (A~|~B) означает, что для любого $a\in A$ $a\sim B$ (a~|~B).

Если a, b, c, $d\in V$, $a\sim c$, a~|~d, b~|~c, $b\sim d$, то говорят, что G допускает замену $(abcd)=t$ (все четыре вершины a, b, c, d предполагаются различными). Граф tG имеет то же множество вершин V и получается из G в результате замены пары ребер ac, bd парой ad, bc [2].

Очевидны следующие свойства замены:

1) замена не меняет степеней вершин;

2) $(abcd)=(badc)=(cdab)=(dcba)$;

3) если G допускает замену $(abcd)$, то $\bar{G}$ допускает $(abdc)$.

Известна

Лемма 1 [2]. *G является униграфом тогда и лишь тогда, когда он изоморфен каждому tG, где t — замена, допускаемая G.*

Построим индуктивно последовательность

$$G^0\supseteq G^1\supseteq\ldots\supseteq G^i\supseteq\ldots \tag{3}$$

графов G^i с множествами вершин V^i соответственно. С этой целью положим $V^0=V$, $G^0=G$. Далее пусть уже определены $V^0\supseteq\ldots\supseteq V^i$ и $G^0\supseteq\ldots\supseteq G^i$. Для $a\in V^i$ обозначим V^i_a и назовем звеном графа G^i множество тех его вершин, степени которых в каждом G^j, $j\leqslant i$, равны степени a в G^j. В качестве V^{i+1} возьмем звено или объединение нескольких звеньев графа G^i и положим $G^{i+1}=G<V^{i+1}>$.

Заменив в (3) каждый из G^i графом $\bar{G}^i$, получим аналогичную последовательность $\bar{G}^0\supseteq\bar{G}^1\supseteq\ldots\supseteq\bar{G}^i\supseteq\ldots$ для $\bar{G}$.

В следующих леммах 2—5 G — униграф, для которого фиксирована последовательность (3).

Лемма 2. *Если для некоторого i F — граф с множеством вершин V^i, причем степени каждой вершины в F и в G^i совпадают, то $F\cong G^i$, $F<V^{i+1}>\cong G^{i+1}$.*

Доказательство. Если $i>0$, то дополним F до F^0 теми же вершинами и ребрами, какими G^i дополняется до G. Если же $i=0$, то положим $F^0=F$. В обоих случаях $F^0 \cong G$. Если $\alpha : G \to F^0$ — изоморфизм графов, то α сохраняет все звенья и потому $\alpha(V^i)=V^i$. Ограничение α на V^i — изоморфизм графов G^i и $F^0 \langle V^i \rangle = F$, сохраняющий все звенья, поэтому $\alpha(V^{i+1})=V^{i+1}$.

Из предыдущей леммы вытекает

Теорема 1. *Если G — униграф, то все члены последовательности (3) также являются униграфами.*

Для $v \in V^i$ обозначим v^i степень вершины v в G^i.

Лемма 3. *Если a, $b \in V^{i+1}$, $a^i = b^i$, то $|a^{i+1} - b^{i+1}| \leqslant 1$.*

Доказательство. Пусть $a^{i+1} > b^{i+1}$. Тогда существуют такие $c \in V^{i+1}$, $d \in V^i \setminus V^{i+1}$, что $c \sim a$, $c \not\sim b$, $d \not\sim a$, $d \sim b$, G^i допускает замену $t=(abcd)$. Положим $tG^i = F$, $F \langle V^{i+1} \rangle = F^{i+1}$. По лемме 2 $F^{i+1} \cong G^{i+1}$. Но F^{i+1} получается из G^{i+1} в результате замены ребра ac ребром bc. Если α и β — степени вершин a и b соответственно в F^{i+1}, то $\alpha = a^{i+1} - 1$, $\beta = b^{i+1} + 1$, $a^{i+1} = \beta = b^{i+1} + 1$.

Будем писать $a \overset{i}{\sim} b$, если a и b принадлежат одному звену графа G^i.

Лемма 4. *Если G^i допускает замену $(abcd)$, то выполняется какое-либо из условий*

$$a \overset{i}{\sim} b, \quad c \overset{i}{\sim} d. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть G^i допускает замену $(abcd) = t$. Вначале докажем, что выполняется какое-либо из условий

$$b \overset{i}{\sim} a, \quad b \overset{i}{\sim} c, \quad d \overset{i}{\sim} a, \quad d \overset{i}{\sim} c. \tag{5}$$

Положим

$$tG^i = F, \quad F \langle V_a^i \cup V_c^i \rangle = F^{i+1}, \quad G \langle V_a^i \cup V_c^i \rangle = \bar{G}^{i+1}. \tag{6}$$

Если ни одно из условий (5) не верно, то F^{i+1} получается из $\bar{G}^{i+1}$ удалением ребра ac, что противоречит лемме 2. Взяв в (6) d вместо c, получим, что выполняется какое-либо из условий

$$b \overset{i}{\sim} a, \quad b \overset{i}{\sim} d, \quad c \overset{i}{\sim} a, \quad c \overset{i}{\sim} d. \tag{7}$$

Сопоставляя (5) и (7), заметим, что выполняется какое-либо из условий (4).

Пусть $a \in V$, $B \subseteq V$. Максимальное подмножество C в B со свойством $a \sim C$ называется окружением a в B.

Лемма 5. *Если G^i допускает замену $(abcd)$ и*

$$a \overset{i}{\sim} b, \tag{8}$$

то окружения в $V \setminus V^i$ вершин из V_a^i совпадают.

Доказательство. Вначале сравним окружения вершин a и b. Пусть существует $e \in V \setminus V^i$, $e \sim b$, $e \not\sim a$ и пусть j — максимальный индекс, такой, что $e \in V^j$. G^j допускает замену $t=(abce)$. Положим $tG^j = F$. Согласно лемме 2

$$G^{j+1} \cong F \langle V^{j+1} \rangle. \tag{9}$$

С другой стороны, один из этих графов получается из другого путем замены ребра ac ребром bc, что противоречит совокупности условий (8) и (9). Доказано, что окружение вершины b в $V \setminus V^i$ содержится в окружении вершины a. Из соображений симметрии теперь следует, что эти окружения совпадают.

Пусть $b_1 \in V_a^i$, $b_1 \neq b$ и существует $e \in V \setminus V^i$, $e \sim b_1$, $e \not\sim a$. Выберем индекс j такой же, как в начале доказательства, и рассмотрим отдельно две возможности: $b_1\sim|\sim c$, $b_1\sim c$. В первом случае G^i допускает замену (ab_1ce), во втором—существует $f\in V^i$, $f\sim b$, $f\sim|\sim b_1$. Кроме того, $b\sim|\sim e$, ибо $a\sim|\sim e$. G^i допускает замену (efb_1b). В обоих случаях, как и в начале доказательства, получим противоречие с леммой 2. Доказано, что окружение вершины b_1 в $V\setminus V^i$ содержится в окружении вершины a.

Пусть, наконец, существует $e\in V\setminus V^i$, $e\sim a$, $e\sim|\sim b_1$. Тогда G^i допускает замену $(abdc)$ и в G $e\sim|\sim a$, $e\sim b_1$. Как уже доказано, последнее невозможно.

Если на каждом шаге последовательности (3) V^{i+1} является звеном графа G^i, то она стабилизируется на регулярном графе, т. е. имеем

$$G^0\supset G^1\supset\ldots\supset G^l, \tag{10}$$

G^l регулярен, G^i, $i<l$, не регулярны. Назовем (10) рядом графа G, l—длиной ряда (10), максимальную среди длин рядов—ступенью $s(G)$ графа G.

Равенство ступени нулю означает регулярность графа.

Пусть G — граф, для множества вершин V которого существует такое разбиение

$$V=A\cup B, \tag{11}$$

что $G\langle A\rangle$ полный, $G\langle B\rangle$ пустой. Назовем G полярным графом, (11) — полярным разбиением.

Один из слоев разбиения (11) может быть пустым, так что пустой и полный графы являются полярными.

Лемма 6. *Пусть G и (11) — полярные граф и разбиение. Тогда:*

1) не более чем одно звено графа G пересекается и с A, и с B;

2) если звено C пересекается и с A, и с B, то окружения в $V\setminus C$ всех вершин из C совпадают с $A\setminus C$ и верно одно из двух:

(i) $G\langle C\rangle$ пустой, C содержит только одну вершину из A.

(ii) $G\langle C\rangle$ полный, C содержит только одну вершину из B.

Доказательство. Пусть $|A|=m$. Для $a\in A$, $b\in B$ $\deg a\geqslant m-1$, $\deg b\leqslant m$. Если C—звено, $a_0\in A\cap C$, $b_0\in B\cap C$, то возможно одно из двух:

$$\deg a_0=\deg b_0=m-1,\quad \deg a_0=\deg b_0=m. \tag{12}$$

В первом случае для любых $a\in A\cap C$, $b\in B\cap C$, $a\sim|\sim B$, $b\sim(A\setminus\{a_0\})$, поэтому $a=a_0$, $G\langle C\rangle$ пустой, окружения в $V\setminus C$ вершин из C совпадают с $A\setminus\{a_0\}$; во втором—аналогично: $G\langle C\rangle$ полный, b_0—единственная в C вершина из B, акружения в $V\setminus C$ вершин из C совпадают с $A\setminus C$.

Следствие 1. Каждое звено полярного графа порождает пустой или полный подграф. Ступень полярного графа, отличного от пустого и полного, равна 1.

Пусть G и (11) — полярные граф и разбиение. Если каждое звено графа G целиком содержится в A или в B, то разбиение (11) назовем стандартным.

Следствие 2. Для любого полярного графа существует стандартное разбиение.

Доказательство. Пусть (11)—полярное разбиение для графа G, не являющееся стандартным, C—такое звено, как в лемме 6. Если верно первое из условий (12), то положим $A_1=A\setminus\{a_0\}$, $B_1=B\cup\{a_0\}$, если второе—$A_1=A\cup\{b_0\}$, $B_1=B\setminus\{b_0\}$. Тогда $V=A_1\cup B_1$—стандартное разбиение.

Всякий двудольный граф мы рассматриваем здесь вместе с фиксированным разбиением множества его вершин на доли, т. е. двудольный граф — это упорядоченная тройка

$$\Gamma=(G,\ A,\ B), \tag{13}$$

где G—граф,

$$V=A\cup B \tag{14}$$

— разбиение множества его вершин, $G\langle A\rangle$ и $G\langle B\rangle$ — пустые подграфы. Один из слоев разбиения (14) может быть пустым (тогда G пустой).

Для двудольного графа (13) дополнительный двудольный граф $\bar{\Gamma}$ определяется условием: $\bar{\Gamma}=(\bar{G}, A, B)$, $\bar{G}\langle A\rangle$ и $\bar{G}\langle B\rangle$ пустые, $ab\,(a\in A,\ b\in B)$ является ребром в $\bar{G}$ тогда и лишь тогда, когда оно не есть ребро в G.

Пустой двудольный граф — тройка (13), где G — пустой граф, (14) — произвольное разбиение.

Между двудольными и полярными графами есть простая связь: (13) — двудольный граф тогда и лишь тогда, когда $G\cup K\langle A\rangle$ — полярный граф и (14) — полярное разбиение.

Двудольный граф (13) назовем стандартным, если (14)—стандартное разбиение для полярного графа $G\cup K\langle A\rangle$.

Пусть (13)—двудольный граф, $A_1\subseteq A$, $B_1\subseteq B$. Порожденный двудольный граф $\Gamma\langle A_1, B_1\rangle=(G\langle A_1\cup B_1\rangle, A_1, B_1)$.

Пусть $\Gamma_i=(G_i, A_i, B_i)$, $i=1, 2$, —двудольные графы. Отображение $f: A_1\cup B_1\to A_2\cup B_2$ назовем изоморфизмом двудольных графов, если оно удовлетворяет следующим двум условиям:

1) f — изоморфизм графов G_1 и G_2;

2) $f(A_1)=A_2$, $f(B_1)=B_2$.

Если существует изоморфизм f, то Γ_1 и Γ_2 называются изоморфными.

Пусть

$$(\beta_1, \ldots, \beta_q),\quad (\gamma_1, \ldots, \gamma_r) \tag{15}$$

— графическая пара последовательностей. Реализацией этой пары назовем такой двудольный граф (G, A, B), что $|A|=q$, $|B|=r$, $\beta_1, \ldots, \beta_q$ и $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$— степени вершин из A и из B соответственно. Если все реализации пары (15) изоморфны, то она называется униграфической парой, а ее реализация — двудольным униграфом.

Занумеровав вершины двудольного графа (13) так, чтобы каждая вершина из A предшествовала каждой вершине из B, запишем матрицу смежности M графа G в виде

$$M=\begin{bmatrix} 0_q & X \\ X^T & 0_r \end{bmatrix},\quad q=|A|,\quad r=|B|,$$

где X — $q\times r$-матрица.

Всякая (0, 1)-матрица X размеров $q\times r$ определяет два вектора $S_X=(s_1, \ldots, s_q)$, $T_X=(t_1, \ldots, t_r)$, где s_i и t_j—соответственно число единиц в i-й строке и j-м столбце. Скажем, что X удовлетворяет U-условию, если любая (0, 1)-матрица Y тех же размеров, такая, что с точностью до перестановок координат

$$S_Y=S_X,\quad T_Y=T_X \tag{16}$$

получается из X в результате перестановок строк и столбцов.

Теорема 2. *Для двудольного графа (13) с матрицей смежности M следующие утверждения эквивалентны:*

1) Γ — *двудольный униграф;*

2) X *удовлетворяет U-условию;*

3) Γ *изоморфен всякому двудольному графу вида (tG, A, B), где*

$$t=(a_1\, a_2\, b_1\, b_2),\quad a_i\in A,\ b_i\in B, \tag{17}$$

— *замена, допускаемая графом G;*

4) *полярный граф $G'=G\cup K\langle A\rangle$ является униграфом.*

Доказательство. Γ является двудольным униграфом, если и только если он изоморфен каждому двудольному графу $\Gamma_1=(G_1, A, B)$, где G_1 имеет матрицу смежности

$$\begin{bmatrix} 0_q & Y \\ Y^T & 0_r \end{bmatrix},$$

такую, что верны равенства (16). Изоморфизм Γ и Γ_1 означает, что Y получается из X в результате перестановок строк и столбцов. Доказана эквивалентность утверждений 1 и 2.

В [7] доказано, что равенства (16) верны тогда и лишь тогда, когда Y получается из X в результате конечной последовательности замен субматриц вида

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

друг другом. Всякая такая замена, примененная к X, равносильна применению к графу G замены (17).

Далее, согласно лемме 1, G' является униграфом, если и только если он изоморфен всякому tG', где t — замена, которую допускает G'. Все замены, допускаемые G', имеют вид (17).

С другой стороны, пусть $f: G' \to tG'$ — изоморфизм и $f(A) \neq A$. Тогда существует звено C графа G', пересекающееся и с A, и с B. В силу леммы 6 любая перестановка φ на C есть автоморфизм графа G'. При подходящем выборе φ получим изоморфизм $f\varphi: G' \to tG'$, фиксирующий каждую вершину из C и действующий как f на других звеньях. Итак, существует такой изоморфизм $f: G' \to tG'$, относительно которого инварианты A и B; f — изоморфизм двудольных графов (G, A, B) и (tG, A, B).

Для двудольного графа (13) определим индуктивно последовательность

$$\Gamma^0 = (G^0, A^0, B^0) \supseteq \Gamma^1 = (G^1, A^1, B^1) \supseteq \ldots \supseteq \Gamma^i = (G^i, A^i, B^i) \supseteq \ldots \quad (18)$$

С этой целью положим $\Gamma^0 = \Gamma$. Далее, если построены $\Gamma^0, \ldots, \Gamma^i$, то пусть $a \in A^i$. Назовем звеном в A графа G^i множество всех тех $v \in A^i$, степени которых в каждом G^j, $j \leqslant i$, равны степени a в G^j. Аналогично определяются звенья графа G^i в B. В качестве V^{i+1} возьмем одно или объединение нескольких звеньев графа G^i (в A, или в B, или в A и в B). Положим $A^{i+1} = V^{i+1} \cap A$, $B^{i+1} = V^{i+1} \cap B$, $G^{i+1} = G\langle V^{i+1} \rangle$, $\Gamma^{i+1} = (G^{i+1}, A^{i+1}, B^{i+1})$.

Заменив каждый член Γ^i последовательности (18) дополнительным двудольным графом $\bar{\Gamma}^i$, получим аналогичную последовательность для $\bar{\Gamma}$.

Лемма 7. *Пусть для стандартного двудольного униграфа (13) фиксирована последовательность (18). Тогда:*

1) *каждый член последовательности (18) — двудольный униграф;*

2) *если G^i допускает замену вида (17), то верно какое-либо из условий*

$$a_1 \overset{i}{\sim} a_2, \quad b_1 \overset{i}{\sim} b_2;$$

3) *если G^i допускает замену (17) и $a_1 \overset{i}{\sim} a_2$, то окружения в $V \setminus V^i$ вершин из звена G^i, содержащего a_1, совпадают;*

4) *если*

$$a_1 \overset{i}{\sim} a_2, \quad a_1, a_2 \in A^{i+1},$$

то

$$|a_1^{i+1} - a_2^{i+1}| \leqslant 1.$$

Аналогично для B.

Доказательство прямо вытекает из теоремы 1 и лемм 3—5, примененных к полярному графу $G \cup K\langle A \rangle$.

Двудольный граф (13) будем называть дольно-регулярным, если степени всех его вершин, входящих в одну долю (A или B), равны.

Пусть на каждом шаге последовательности (18) $V^{i+1} = A^i \cup B^i$ есть объединение двух звеньев графа G^i: A^i и B^i — звенья G^i в A и B соответственно. Тогда (18) стабилизируется на дольно-регулярном графе; имеем

$$\Gamma^0 \supset \ldots \supset \Gamma^l, \tag{19}$$

Γ^l дольно-регулярен, Γ^i с $i<l$ не являются дольно-регулярными. Назовем (19) полярным рядом двудольного графа (13), l — длиной ряда (19), максимальную среди длин полярных рядов — ступенью s (Г).

Лемма 8. *Пусть (19) — полярный ряд двудольного униграфа ступени выше нулевой. Тогда хотя бы одно из звеньев A^i, B^i остается звеном в G^{i+1}.*

Доказательство. Пусть, напротив, каждое из A^i, B^i распадается в G^{i+1} на звенья. Тогда в силу леммы 7 $A^i = C \cup D$, $B^i = E \cup F$, для $c \in C$, $d \in D$, $e \in E$, $f \in F$ $c^{i+1} = d^{i+1} + 1$, $e^{i+1} = f^{i+1} + 1$.

Рассмотрим отдельно три случая:

1) существуют $c \sim e$, $d \sim\!|\!\sim f$;

2) $C \sim\!|\!\sim E$;

3) $D \sim F$.

1. Существуют $a \in A^i \setminus A^{i+1}$, $b \in B^i \setminus B^{i+1}$, $a \sim f$, $a \sim\!|\!\sim e$, $b \sim d$, $b \sim\!|\!\sim c$. Если $a \sim b$, то G^i допускает замену $(caeb)$. Если $a \sim\!|\!\sim b$, то G^i допускает замену $(dabf)$. То и другое противоречит лемме 7, случай 1 невозможен.

2. Существуют $d \sim e$, $f \sim c$, $f \sim\!|\!\sim d$, G^{i+1} допускает замену $(cdfe)$, что противоречит лемме 7.

3. Перейдя к дополнительному двудольному графу, получим случай 2.

Summary

The paper specifies graphs and two-part graphs determined by degrees of their vertices up to isomorphism. A corresponding apparatus is constructed.

Литература

1. Тышкевич Р. И. ДАН БССР, **22**, № 7, 592, 1978.
2. Fulcerson D. R., Hoffman A. J., McAndrew M. H. Canad. J. Math., **17**, 1, 1965.
3. Johnson R. H. Pacif. J. Math., **66**, 1, 1975.
4. Koren M. J. Combin. Theory, **B21**, 3, 224, 1976.
5. Koren M. J. Combin. Theory, **B21**, 3, 235, 1976.
6. Li Shuo-Yen R. J. Combin. Theory, **B19**, 1, 1975.
7. Ryser H. J. Canad. J. Math., **9**, 1957.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина,
Институт проблем надежности и долговечности машин АН БССР

Поступила в редакцию 17.03.78

УДК 519.44

В. Г. СЕМЕНТОВСКИЙ

КЛАССЫ СОПРЯЖЕННЫХ АБНОРМАЛЬНЫХ $\mathfrak{F}$-ПРОЕКТОРОВ Σ-РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП I.

Данная работа посвящена решению следующей задачи, предложенной автору профессором Л. А. Шеметковым: доказать, что во всякой π-разрешимой группе для любого упорядочения φ множества всех простых чисел существуют абнормальные $\mathfrak{F}$-проекторы, где $\mathfrak{F}$ — формация всех φ-дисперсивных π-разложимых групп.

В процессе решения этой задачи возникла необходимость ввести понятия Σ-разрешимой и Σ-нильпотентных групп, а затем доказать