ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ № 1 1999
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 519.1

А. А. ЧЕРНЯК

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ СЛОЖНОСТЬ ГРАФОВЫХ ЗАДАЧ НАДЕЖНОСТИ

1. Введение. Вероятностным графом будем называть ненаправленный граф без петель и кратных ребер, вершины (ребра) которого абсолютно надежны. в то время как ребра (вершины) могут отказывать независимо друг от друга с заданными вероятностями $1 - p_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ (n — число ребер (вершин) графа). Вероятностный граф назовем однородным, если $p_1 = p_2 = \dots = p_n$. Классическими показателями надежности вероятностных графов являются: олтерминальная (all-terminal) надежность $h_E(G, \bar{p})$ для графов G с абсолютно надежными вершинами; остаточная (residual) надежность $h_V(G, \bar{p})$ — для графов G с абсолютно надежными ребрами (здесь $\bar{p} = (p_1, \dots, p_n)$). Оба показателя надежности равны вероятности связности графа G. Задачи определения олтерминальной надежности (ЗТН) и остаточной надежности (ЗОН) являются $\#P$-полными в классе однородных планарных графов [1 – 2]. Для деревьев и последовательно-параллельных графов ЗТН и ЗОН полиномиально разрешимы [3 – 5].

Апология поведения этих задач не сохраняется на множестве полных графов. Так, из общего результата об $\#P$-полноте ЗТН в классе однородных графов [6] следует $\#P$-полнота этой задачи в классе неоднородных полных графов, в то время как остаточная надежность этих графов определяется тривиально [5]. Отметим, что ЗТН в классе полных однородных графов также полиномиально разрешима [7].

"Параллельность" полученных до сих пор результатов по алгоритмической сложности ЗТН и ЗОН оказалась нарушенной для однородных двудольных и расщепляемых графов: в [2] доказано, что для этих классов графов ЗОН является $\#P$-полной, соответствующие проблемы для олтерминальной надежности оставались открытыми.

В данной статье доказывается $\#P$-полнота ЗТН в классе однородных двудольных графов с регулярной долей степени 2, имеющих произвольный фиксированный обхват (т.е. длину наименьшего простого цикла). Как следствие, получен результат о $\#P$-полноте ЗОН в классе однородных расщепляемых графов с регулярной долей степени 2.

2. Основной результат Вначале, следуя [8 – 10], дадим несколько неформальных определений, касающихся алгоритмической сложности перечислительных задач. Класс $\#P$ определяется как множество рациональных функций f, которые могут быть вычислены за полиномиальное время считающей машиной Тьюринга (т.е. недетерминированной машиной Тьюринга с дополнительным выходным устройством для получения числа $f(z)$ принимающих вычислений, индуцированных входным словом z). Функция f полиномиально сводима к функции g, если существует алгоритм, вычисляющий $f(z)$ для любого входа z с помощью некоторого количества вычислений функции g и элементарных операций, при этом суммарное их число должно полиномиально зависеть от длины входного слова z. Функция g называется $\#P$-полной, если $g \in \#P$, и каждая функция из $\#P$ полиномиально сводима к g. В дальнейшем не делается различий между функциями и соответствующими перечислительными задачами.

Лемма 1 [8]. *Если значения полинома* $g(x) = \sum_{i=0}^{n} g_i(1-x)^i x^{n-i}$ *с рациональными коэффициентами известны в* $n+1$ *рациональных точках* $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, *то все коэффициенты* g_i *могут быть вычислены за время, полиномиально зависящее от* n *и максимального из чисел* $\{\log x_k, \log g(x_k) \colon k = 0, 1, \ldots, n\}$.

Скажем, что двудольный граф G с долями U, W имеет регулярную долю W степени 2, если степени всех вершин из W равны 2.

Лемма 2. *Пусть* G *— двудольный граф с долей* U *и регулярной долей* W *степени* 2. *Если в* G *длины всех циклов кратны* 4, *то существует разбиение* $U = U_1 \cup U_2$ *такое, что каждая вершина из* W *смежна с вершинами из разных множеств этого разбиения.*

Доказательство. Зафиксируем вершину $v \in U$ и обозначим через U_1 множество всех вершин из U (включая v), находящихся на расстоянии от v, кратном 4. Положим $U_2 = U \backslash U_1$. Тогда $U_1 \cup U_2$ — искомое разбиение. Действительно, если в G имеется путь v_1, w, v_2, где $v_1, v_2 \in U_2$, $w \in W$, то объединение геодезических от v к v_1 и от v к v_2 вместе с v_1, w, v_2 содержит цикл, длина которого не кратна 4. Лемма доказана.

Выполняющим набором z для булевой функции F, существенно зависящей от k булевых переменных $x_1, \ldots, x_k$, назовем (0,1) k-вектор $z = (z_1, \ldots, z_k)$ такой, что $F(z) = 1$. Ленточной конъюнкцией длины n назовем конъюнкцию вида $L_n = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge \ldots \wedge (x_n \vee x_{n+1})$. Выполняющий набор z ленточной конъюнкции L_n называется замкнутым (полузамкнутым; открытым) набором для L_n, если $z_1 = z_{n+1} = 1$ $(z_1 = 1,\ z_{n+1} = 0;\ z_1 = z_{n+1} = 0)$. Обозначим через a_n, b_n, c_n соответственно число замкнутых, полузамкнутых и открытых наборов для L_n.

Лемма 3. *Числа* a_n, b_n, c_n *могут быть вычислены за время* $O(n)$, *причем эти числа попарно взаимно простые для каждого* $n \geqslant 3$.

Доказательство. Очевидно, $c_3 = 1$, $b_3 = 2$, $a_3 = 3$. Кроме того,

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1}, \quad b_n = a_{n-1}, \quad c_n = b_{n-1}. \tag{1}$$

Докажем, например, первое равенство в (1). Пусть z — замкнутый набор для L_n. Тогда $z_1 = z_{n+1} = 1$. Если $z_n = 1$, то $(z_1, \ldots, z_n)$ — замкнутый набор для L_{n-1}. Если $z_n = 0$, то необходимо $z_{n-1} = 1$. Следовательно, $(z_1, \ldots, z_n)$ — полузамкнутый набор для L_{n-1}. При этом разные замкнутые наборы для L_n индуцируют несовпадающие замкнутые (полузамкнутые) наборы для L_{n-1}. Отсюда $a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$. Аналогично доказываются другие соотношения в (1).

Если числа $a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}$ попарно взаимно простые, то ввиду (1), это же верно для чисел a_n, b_n, c_n. Дальше — индукция. Лемма доказана.

Разрезом графа G называется множество его ребер, удаление которых из G приводит к несвязному графу. Для вершин u, w графа G (u, w)-разрезом называется множество ребер в G, удаление которых из G приводит к графу, содержащему вершины u и w в разных компонентах связности.

Пусть G — двудольный граф с долями U и W. Дольно-доминирующим множеством в G называется множество $S \subseteq U$ такое, что любая вершина из W смежна с некоторой вершиной из S. При этом количество дольно-доминирующих множеств называется плотностью доминирования доли W в G и обозначается $\rho(G, W)$.

Окружением $R(w)$ вершины w называется множество ребер, смежных с w, $\deg w = |R(w)|$.

Теорема 1. *Задача определения олтерминальной надежности* $h_E(G, p)$ *является* $\#P$-*полной в классе однородных двудольных графов* G *с регулярной долей степени* 2.

Доказательство. Известна [8] следующая $\#P$-полная задача, называемая задачей монотонной 2-выполнимости (2МВЗ):

Вход: множество $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ булевых переменных и конъюнкция $F = c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m$ двухэлементных дизъюнкций $c_e = x_p \vee x_q$, существенно зависящая от каждой переменной из X.

Выход: число выполняющих наборов для F.

Зададим новую функцию F_r, индуцированную функцией F так: F_r является конъюнкцией mr ленточных конъюнкций $L_i^e = (x_p \vee y_{i1}^e) \wedge (y_{i1}^e \vee y_{i2}^e) \wedge \ldots \wedge (y_{i,k}^e \vee x_q)$, где $i = 1, 2, \ldots, r$; $e =$

$1, 2, \ldots, m$ и все переменные множества $Y = \{y_{ij}^e\}$ различны. Обозначим через Z_{uv} множество (0,1) n-векторов $z = (z_1, \ldots, z_n)$, доставляющих значение 1 ровно для $u + v$ дизъюнкций в F, причем точно в u дизъюнкциях обе содержащиеся в них переменные принимают значение 1. Каждый вектор $z \in Z_{uv}$ индуцирует множество $\mathcal{L}(z)$ выполняющих наборов для функции F_r. Определим мощность множества $\mathcal{L}(z)$. Если $z_p = z_q = 1$, то z индуцирует замкнутый набор для ленточной конъюнкции L_i^e. Если число таких наборов a_k, то общее число выполняющих наборов для функции

$$L_1^e \wedge L_2^e \wedge \ldots \wedge L_r^e \tag{2}$$

равно a_k^r. Если $z_p = 1$, $z_q = 0$ (или наоборот), то z индуцирует полузамкнутый набор для L_i^e. Если таких наборов b_k, то в этом случае общее число выполняющих наборов для (2) будет b_k^r. Если $z_p = z_q = 0$, то z индуцирует открытый набор для L_i^e. Если таких наборов c_k, то число выполняющих наборов для (2) будет c_k^r.

В итоге имеем: $|\mathcal{L}(z)| = (a_k^r)^u (b_k^r)^v (c_k^r)^{m-u-v}$.

Если теперь $t_{uv} = |Z_{uv}|$, то число f_r всех выполняющих наборов для F_r равно

$$f_r = \sum_{0 \leqslant u+v \leqslant m} t_{uv} (a_k^u b_k^v c_k^{m-u-v})^r. \tag{3}$$

Пусть $f_0 = \sum t_{uv}$. Очевидно, $f_0 = 2^n$ — число всех (0,1) n-векторов. Тогда, положив в (3) $r = 0, 1, \ldots, (m+1)(m+2)/2 - 1$, будем иметь систему линейных уравнений с квадратной матрицей Вандермонда $\left[(a_k^u b_k^v c_k^{m-u-v})^r \right]$. В силу леммы 3 эта матрица невырожденная для любого $k \geqslant 3$. Но тогда, согласно [10], система (3) при известных значениях f_r может быть решена за время, полиномиально зависящее от m. Отсюда за полиномиальное время определяется и величина $\sum_{u+v=n} t_{uv}$, равная числу выполняющих наборов для F.

С функцией F_r свяжем теперь двудольный граф G_r с долями $X \cup Y$ и C_r, где C_r — множество всех двухэлементных дизъюнкций в F_r, причем любая пара вершин $v \in X \cup Y$, $c \in C_r$ смежна, если и только если переменная v содержится в c. Очевидно, что f_r равно плотности доминирования доли C_r в G_r. Кроме того, C_r — регулярная доля степени 2, и длина любого простого цикла в G_r кратна $2k$.

Таким образом, доказана полиномиальная сводимость 2МВЗ к следующей перечислительной задаче:

Вход: число $k \geqslant 3$ и двудольный граф T с регулярной долей W степени 2, длина любого простого цикла которого кратна $2k$.

Выход: плотность доминирования доли W в T.

Докажем теперь, что эта задача полиномиально сводима к задаче, сформулированной в условиях теоремы 1.

Если положить k четным, то по лемме 2 существует разбиение $U \cup V$ доли графа T такое, что каждая вершина из W смежна с вершинами из различных множеств этого разбиения. Положим: $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$, $V = \{v_1, \ldots, v_s\}$, $W = \{w_1, \ldots, w_q\}$.

Добавим к T множества вершин

$$\{u_{ij} \colon i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, \deg u_i\}, \quad \{v_{ij} \colon i = 1, \ldots, s,\ j = 1, \ldots, \deg v_i\}, \quad \{u_0, v_0, w_0\}$$

и множества ребер

$$\{u_0 w_0, v_0 w_0\}, \quad \{u_{ij} \colon i = 0, 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, \deg u_i\}, \quad \{v_{ij} \colon i = 0, 1, \ldots, s,\ j = 1, \ldots, \deg v_i\}.$$

Полученный граф обозначим через G, а граф, полученный из G удалением вершины w_0, обозначим F. Пусть также $g_r(f_r)$ — число разрезов мощности r графа G (графа F), n — число ребер в G. Тогда по определению олтерминальной надежности

$$1 - h_E(G, p) = \sum_{r=0}^{n} g_r (1-p)^r p^{n-r}, \quad 1 - h_E(F, p) = \sum_{r=0}^{n-2} f_r (1-p)^r p^{n-2-r} \tag{4}$$

(предполагается, что все ребра в G имеют одинаковую вероятность отказа $1-p$). Отсюда полиномиальная разрешимость ЗТН в классе однородных двудольных графов с регулярной долей степени 2 (а именно таковыми и являются графы G и F) означала бы возможность за полиномиальное время определить значения многочленов (4) в $n+1$ различных точках p. В соответствии с леммой 1 это бы повлекло существование полиномиального алгоритма определения всех коэфициентов f_r и g_r в (4). Остается доказать, что плотность $\rho(T,W)$ полиномиально вычисляется с помощью коэффициентов многочленов (4).

Объявим вершину u_0 истоком, а вершину v_0 — стоком. Пропускные способности всех ребер в F положим равными 1. Зададим ориентацию ребер графа F так, чтобы любое ребро принадлежало ориентированному пути от u_0 к v_0. Очевидно, если положить $\varphi(e)=1$ для каждого ребра $e\in F$, то φ — поток полученного ориентированного графа, причем величина потока равна $\deg u_0=|W|=q$, т. е. φ — максимальный поток. Следовательно, по теореме Форда — Фалкерсона [11] мощность наименьшего (u_0,v_0)-разреза в F равна q. Множество всех таких (u_0,v_0)-разрезов обозначим $\mathcal{E}$.

Положим также $\mathcal{E}_i(w_0)$ — множество разрезов мощности q в графе G, содержащих ровно i ребер из множества $\{w_0u_0, w_0v_0\}$, $i=1,2$. Очевидно, $|\mathcal{E}_2(w_0)|=\binom{n-2}{q-2}$.

Из каждого разреза в $\mathcal{E}_1(w_0)$ удалим по ребру, смежному с w_0. Вновь полученное множество разрезов будет множеством разрезов мощности $q-1$ графа F. А так как ни одно из них не является (u_0,v_0)-разрезом в F, то $|\mathcal{E}_1(w_0)|=f_{q-1}$.

Итак, $\mathcal{E}_0(w_0)=g_q-f_{q-1}-\binom{n-2}{q-2}$. С другой стороны, $\mathcal{E}_0(w_0)$ совпадает с множеством всех разрезов мощности q в графе F, не являющихся (u_0,v_0)-разрезами. Действительно, любой такой разрез в F остается таковым и в G. Кроме того, любой (u_0,v_0)-разрез из $\mathcal{E}$ ввиду его минимальности приводит к образованию только двух компонент связности. Поэтому (u_0,v_0)-разрез мощности q в F вообще не может являться разрезом в G. Доказано, что

$$|\mathcal{E}|=f_q-|\mathcal{E}_0(w_0)|=f_q+f_{q-1}-g_q+\binom{n-2}{q-2}.$$

Пусть $\mathcal{L}$ — множество дольно-доминирующих множеств из $U\cup V$ графа T. Зададим отображение $\varphi\colon \mathcal{L}\to 2^{\mathcal{E}}$ следующим образом. Пусть $S\in\mathcal{L}$. Без ограничения общности считаем, что $S\cap V=\{v_1,\dots,v_p\}$, $S\cap U=\{u_1,\dots,u_r\}$, $W=W_1\cup W_2$, где W_1 — множество таких вершин из W, которые смежны только вершинам из S. Будем считать, что $E\in\varphi(S)$, если и только если

$$\begin{aligned}|E\cap R(u_{ij})|&=1,\ i=r+1,\dots,m,\ j=1\dots,\deg u_i;\\ |E\cap R(v_{ij})|&=1,\ i=p+1,\dots,s,\ j=1,\dots,\deg v_i;\end{aligned}\tag{5}$$

$$|E\cap R(w_l)|=1\quad \text{для каждого}\ \ w_l\in W_1.\tag{6}$$

Отображение φ задано корректно, ибо E — (u_0,v_0)-разрез и

$$|E|=\sum_{i=p+1}^{s}\deg v_i+\sum_{i=r+1}^{m}\deg u_i+|W_1|=|W_2|+|W_1|=q$$

(предпоследнее равенство в (6) следует из того факта, что каждая вершина из W_2 смежна ровно с одной вершиной из $(U\cup V)\backslash S$).

Из (5) следует, что $|\varphi(E)|=2^q$.

Покажем, что

$$\bigcup_{S\in\mathcal{L}}\varphi(S)=\mathcal{E}.\tag{7}$$

Пусть $E\in\mathcal{E}$. Ввиду минимальности E $|E\cap R(z)|\leqslant 1$ для любого $z=u_{ij}$ или $z=v_{ij}$. Без ограничения общности считаем, что все такие непустые пересечения перечислены в (5). Обозначим: $S=\{v_1,\dots,v_p;u_1,\dots,u_r\}$, W_1 — такое же, как и выше. Так как E является

(u_0, v_0)-разрезом в F, то верно (6). Отсюда имеем: $q = |E| \geqslant \sum_{i=p+1}^{s} \deg v_i + \sum_{i=r+1}^{m} \deg u_i + |W_1|$, или $q - |W_1| = |W \backslash W_1| \geqslant \sum_{i=p+1}^{s} \deg v_i + \sum_{i=r+1}^{m} \deg u_i$. Последнее возможно, только если каждая вершина из $W \backslash W_1$ смежна ровно с одной вершиной из $(U \cup V) \backslash S$, т. е. S — дольно-доминирующее множество в графе T.

В итоге имеем $|\mathcal{E}| = \sum_{S \in \mathcal{L}} |\varphi(S)| = \sum_{S \in \mathcal{L}} 2^q = 2^q |\mathcal{L}|$, откуда $\rho(T, W) = |\mathcal{L}| = |\mathcal{E}|/2^q = \left(f_q + f_{q-1} - g_q + \binom{n-2}{q-2} \right) / 2^q$. Полиномиальная сводимость доказана. Принадлежность всех упомянутых в доказательстве перечислительных задач классу $\#P$ следует из полиномиальной распознаваемости перечисляемых в них комбинаторных объектов. Теорема доказана.

3. Следствия. Незначительная модификация доказательства теоремы 1 приводит к следующему следствию.

Следствие 1. *Задача определения олтерминальной надежности является $\#P$-полной в классе однородных двудольных графов сколь угодно большого обхвата.*

Следствие 2. *Задача определения $h_E(H, 1/2)$ является $\#P$-полной в классе однородных двудольных графов H с регулярной долей степени 2.*

Доказательство. Пусть G — произвольный связный двудольный граф с множеством ребер $\{e_1, \ldots, e_k\}$. Определим граф H_r следующим образом: для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$, удалим из G ребро $e_i = uv$ и добавим r новых вершин w_{ij} и $2r$ новых ребер uw_{ij}, vw_{ij}, $j = 1, 2, \ldots, r$.

Обозначим $e_{ij} = \{uw_{ij}, vw_{ij}\}$; $\mathcal{L}$ — множество подмножеств ребер графа H_r, каждое их которых содержит хотя бы одно множество e_{ij} для некоторых $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant r$. Очевидно, элементы $\mathcal{L}$ — разрезы графа H_r, причем $|\mathcal{L}| = 4^{kr} - 3^{kr}$.

Каждому разрезу E графа G поставим в соответствие множество разрезов $\varphi(E)$ графа H_r следующим образом: для $i = 1, \ldots, k$,

а) если $e_i \in E$, то каждый разрез из $\varphi(E)$ содержит ровно по одному ребру из e_{ij}, $j = 1, 2, \ldots, r$;

б) если $e_i \notin E$, то каждый разрез из $\varphi(E)$ содержит не более одного ребра из e_{ij}, $j = 1, 2, \ldots, r$, причем по крайней мере для одного $1 \leqslant j \leqslant r$ этот разрез не содержит ребер из e_{ij}.

Если теперь $\mathcal{E}_i$ — множество разрезов графа G мощности i, $g_i = |\mathcal{E}_i|$, то

$$\bigcup_{i=0}^{k} \varphi(\mathcal{E}_i) \cup \mathcal{L} \tag{8}$$

— разбиение множества всех разрезов графа H_r, причем $|\varphi(\mathcal{E}_i)| = g_i (2^r)^i (3^r - 2^r)^{k-i}$. Отсюда общее число d всех разрезов графа H_r равно

$$d = |\mathcal{L}| + \sum_{i=0}^{k} g_i 2^{ri} (3^r - 2^r)^{k-i}. \tag{9}$$

Но

$$1 - h_E(H_r, 1/2) = \sum_{i=0}^{2kr} f_i \left(1 - \frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{2kr-i} = \frac{d}{4^{kr}}, \tag{10}$$

где f_i — число разрезов мощности i в графе H_r.

С учетом (9) имеем систему линейных уравнений $\dfrac{3^{kr} - 4^{kr} h_E(H_r, 1/2)}{(3^r - 2^r)^k} = \sum_{i=0}^{k} g_i \left(\dfrac{2^r}{3^r - 2^r} \right)^i$, $r = 1, 2, \ldots, k+1$, с невырожденной матрицей Вандермонда, коэффициенты которой можно определить за время, полиномиально зависящее от k [10]. Утверждение теперь следует из теоремы 1.

Обозначим $H(U, V)$ — двудольный граф H с долями U и V; K_u — полный граф с множеством вершин U. Граф G называется расщепляемым с долями U и V, если существует разбиение $U \cup V$ такое, что V — независимое множество, а U индуцирует полный подграф. Другими словами, G представим в виде

$$G = H(U, V) \cup K_u. \quad (11)$$

Следствие 3. *Задача определения олтерминальной надежности $h_E(G, 1/2)$ является $\#P$-полной в классе однородных расщепляемых графов G с регулярной долей степени 2.*

Доказательство. Пусть $H(U, V)$ — произвольный двудольный граф с регулярной долей V степени 2 и с числом ребер n, а расщепляемый граф G представлен в виде (11), причем K_u состоит из ребер $e_1, e_2, \dots, e_k$. Определим граф G_r следующим образом: для каждого $i = 1, \dots, k$ добавим r новых вершин w_{ij} и $2r$ новых ребер uw_{ij}, vw_{ij}, $j = 1, \dots, r$, к ребру $e_i = uv$. Очевидно, G_r — расщепляемый граф с регулярной долей степени 2. Пусть e_{ij} и $\mathcal{L}$ определяются так же, как и в доказательстве следствия 2. Очевидно, элементы $\mathcal{L}$ — разрезы графа G_r, причем $|\mathcal{L}| = 2^{n+k}(4^{kr} - 3^{kr})$.

Обозначим через $\mathcal{E}_t$ множество разрезов в G, содержащих ровно t ребер подграфа K_u, $g_t = |\mathcal{E}_t|$. Каждому разрезу $E \in \mathcal{E}_t$ поставим в соответствие множество разрезов $\varphi(E)$ графа G_r следующим образом: для $i = 1, \dots, k$,

а) если $e_i \in E$, то каждый разрез из $\varphi(E)$ содержит ровно по одному ребру из e_{ij}, $j = 1, 2, \dots, r$;

б) если $e_i \notin E$, то каждый разрез из $\varphi(E)$ содержит не более одного ребра из e_{ij}, $j = 1, 2, \dots, r$.

Очевидно, (8) — разбиение множества всех разрезов графа G_r, причем $|\varphi(\mathcal{E}_t)| = g_t(2^r)^t \times (3^r)^{k-t}$. Отсюда общее число d всех разрезов графа G_r равно $d = |\mathcal{L}| + \sum\limits_{i=0}^{k} g_i 2^{ri} 3^{r(k-i)}$. По аналогии с (10) $1 - h_E(G_r, 1/2) = \dfrac{d}{2^m}$, где $m = n + k + 2kr$.

Итак, имеем систему линейных уравнений $\dfrac{2^m(1 - h_E(G_r, 1/2)) - |\mathcal{L}|}{3^{rk}} = \sum\limits_{i=0}^{k} g_i \left(\dfrac{2}{3}\right)^{ri}$, $r = 1, 2, \dots, k+1$, с невырожденной матрицей Вандермонда, которая разрешима за время, полиномиально зависящее от m [10]. Но g_k как раз равно числу всех разрезов двудольного графа H, причем $1 - h_E(H, 1/2) = g_k/2^n$. Утверждение теперь вытекает из следствия 2.

Summary

It is known that the problem of computing the all-terminal reliability is $\#P$-complete for planar graphs while being polynomially solvable for trees, series-parallel graphs and complete graphs. In this paper it is proved that the problem of computing all-terminal reliability is $\#P$-complete for bipartite graphs of arbitrary girth and for split graphs with the regular part of degree 2.

Литература

1. Vertigan D. The computational complexity of Tutte invariants for planar graphs // Preprint Oxford University, 1990.
2. Sutner K., Satyanarayana A., Suffel C. // SIAM J. Comput., 1991.
3. Colbourn C., Satyanarayana A., Suffel C., Sutner K. // Discrete Appl. Math. 1993. Vol. 44. P. 221 – 232.
4. Satyanarayana A., Wood R.K. // SIAM J. Comput. 1985. Vol. 14. P. 818 – 832.
5. Boesch F., Satyanarayana A., Suffel C. // Reliability of computer and communication networks, DIMACS. 1991. Vol. 5. P. 51 – 59.
6. Ball M.O., Provan J.S. // SIAM J. Comput. 1983. Vol. 12. P. 777 – 788.
7. Gilbert E.N. // Ann. Math. Stat. 1959. Vol. 30. P. 1141 – 1144.
8. Valiant L. // SIAM J. Comput. 1979. Vol. 8. P. 410 – 421.
9. Provan J.S. // SIAM J. Comput. 1986. Vol. 15. P. 694 – 702.
10. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М., 1982.
11. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы. М., 1984.

Белорусский государственный университет

Поступила в редакцию 18.04.97