На основе оценки (18), положив в ней $X = H_0$, величину ε можно выразить через входные данные замкнутой системы (1), (2).

Матрица обратной связи C имеет вид

$$C(t) = [R^T(t)\alpha + \beta(t)]\, H^{-1}(t)\, \Phi^{-1}(t), \tag{21}$$

где матрица H определяется выражением (20),

$$\alpha = \left(\int_0^\omega S^{-1}(\tau,\ \lambda)\, M(\tau)\, d\tau\right)^{-1} \left[S^{-1}(\omega,\ \lambda) - E - \int_0^\omega S^{-1}(\tau,\ \lambda)\, R(\tau)\, \beta(\tau)\, d\tau\right].$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия (19).*

Тогда всегда можно сделать асимптотическую устойчивость системы (1) выбором управления (2); мультипликаторы замкнутой системы равны $\exp(-\lambda\omega)$.

Справедливость этой теоремы очевидна, поскольку множество матриц обратной связи задается формулой (21), где матричная функция $\beta(t) \not\equiv 0$ достаточно мала по норме.

Замечание. Матрицу C можно искать в виде

$$C = [R^T(t)\alpha + \beta(t)]\, \Phi^{-1}(t). \tag{22}$$

Несложный анализ представлений (21), (22) показывает, что представление (22) позволяет выявить более широкие классы стабилизируемых систем. Однако при этом усложняются соответствующие алгоритмы построения матриц C, H.

Summary

A suitable choice of the automatic system of direct control allows the effective conditions of stabilization of controllable oscillations to be obtained. The constructive method of designing the stabilizing control is worked out.

Литература

1. Зубов В. И. Лекции по теории управления. М., 1975. 496 с.
2. Зубов В. И. Аналитическая динамика гироскопических систем. Л., 1970. 318 с.
3. Калман Р. Е., Арбиб М., Фалб П. Очерки по математической теории систем. М., 1971. 400 с.
4. Войтенко С. С., Смирнов Е. Я. // ДУ. 1975. Т. 11, № 6. С. 1131—1132.
5. Смирнов Е. Я. Некоторые задачи математической теории управления. Л., 1981. 198 с.
6. Забелло Л. Е. // Докл. АН БССР. 1980. Т. 24, № 6. С. 497—499.
7. Brunovsky P. // J. of Diff. Equations. 1969. Vol. 6, N 2. P. 296—313.
8. Kano H., Nishimura T. // IEEE Trans. Autom. Contr. 1985. Vol. 30, N 1. P. 1129—1131.
9. Kabamba B. T. // Proc. 24th IEEE Conf. Decis and Contr. New York, 1985. P. 177—178.

Могилевское отделение
Института физики АН БССР

Поступила в редакцию
12.05.87

УДК 519.1

А. А. ЧЕРНЯК

ПСЕВДОДОМИНАНТНО-ПОРОГОВЫЕ ГРАФЫ. II

Настоящая заметка — продолжение статьи [1], где была описана структура наследственных псевдодоминантно-пороговых графов (сокращенно ПДП-графы) в виде композиции неразложимых компонент и в терминах минимальных запрещенных индуцированных подграфов. Здесь на основе результатов из [1] наследственные ПДП-графы классифицируются и перечисляются.

Сохраняем определения и терминологию, использованные в [1]. Обозначим через T_1, T_2 4-вершинную и 5-вершинную цепи соответственно. Изоморфные триады (графы) связываем знаком равенства.

Теорема 1. *(i) $G\in\mathcal{L}$, если и только если существует разложение*

$$G = G_1\circ \ldots \circ G_m \circ H,\ m \geqslant 0, \tag{1}$$

где $G_i = (X_i,\ A_i,\ B_i) \in \{Q_2,\ Q_1,\ O_1,\ P_4\}$, $i=\overline{1,\ m}$, $H \in \mathcal{M} \cup \{T_1,\ T_2\}$.

(ii) Если

$$G = L_1\circ \ldots \circ L_n \circ H',\ n \geqslant 0, \tag{2}$$

где $L_i = (Y_i,\ C_i,\ D_i) \in \{Q_2,\ Q_1,\ O_1,\ P_4\}$, $i=\overline{1,\ n}$, $H' \in \mathcal{M} \cup \{T_1,\ T_2\}$, то либо разложение (2) получается из (1) (с точностью до изоморфизма триад) последовательными перестановками рядом стоящих триад с пустой нижней долей, либо $m=n+1$, $|VH| = |VH'| = 1$, $G_m = O_1$, $G_{m-1} = Q_1$, $L_n = Q_2$ и разложение $L_1\circ\ldots\circ L_{m-2}$ получается из $G_1\circ\ldots\circ G_{m-2}$ последовательными перестановками рядом стоящих триад с пустой нижней долей.

Доказательство. Утверждение (i) автоматически следует из теоремы 1 [1].

(ii) Если $m=n=0$, то все доказано. Если $m\cdot n=0$, $m+n>0$, то один из графов H, H', скажем H $(m=0)$, разложим на уровне (2.1), т. е. $H\in\{T_1,\ T_2\}$. Но существуют единственные разложения графов T_1, T_2 на уровне (2, 1):

$$T_1 = R_3\circ H'',\ T_2 = R_4\circ H'',\ |VH''| = 1,$$

что противоречит виду (2).

Пусть $m>0$, $n>0$. Предположим, что утверждение верно для графов с меньшим, чем у G, числом вершин, и $|VG|\geqslant 4$ (при $|VG|\leqslant 3$ непосредственная проверка). Если $\{G_1,\ L_1\}\cap\{P_4,\ O_1\}\neq\varnothing$, то из определения операции $\circ$ и сопоставления степеней вершин в разложениях (1)—(2) следует, что $G_1=L_1$. Дальше индукция.

Предположим, что $\{G_1,\ L_1\}\subseteq\{Q_1,\ Q_2\}$. Без ограничения общности считаем, что $G_1=Q_2$, $L_1=Q_1$. Обозначим через i наибольшее такое r, что $G_1, \ldots, G_r\in\{Q_1,\ Q_2\}$. Если среди триад $G_1, \ldots, G_i$ найдется Q_1, то утверждение следует из индуктивного предположения. Иначе, доминирующая вершина v, где $v\in VL_1$, принадлежит подграфу $G_{i+1}\circ\ldots\circ H$. Последнее возможно только при $i=m$, $|VH|=\{v\}$, $m\geqslant 2$. Но тогда $n\geqslant 2$ и в G степени вершин превосходят 2, откуда $L_2=Q_2$. Дальше индукция.

Следствие 1. *Существует алгоритм, который за $O(|VG|+|EG|)$ элементарных операций устанавливает принадлежность графа G множеству $\mathcal{L}$.*

Пусть

$$\pi = (d_1,\ \ldots,\ d_m),\ d_1 \geqslant \ldots \geqslant d_m \geqslant 0$$

—последовательность целых чисел. Скажем, что π допускает сокращение, если имеет место одна из следующих ситуаций:

$$1)\ d_1 = m-1,\ d_m\geqslant 1;\quad 2)\ d_m=0;\quad 3)\ d_1=d_2=m-2,\ d_m\geqslant 2;$$

$$4)\ d_1=d_2=m-2,\ d_m=d_{m-1}=1,\ m\geqslant 4;\quad 5)\ d_1=d_m=m-3,\ m\geqslant 3.$$

В результате сокращения получается в ситуации 1) последовательность $(d_2-1, \ldots, d_m-1)$, в ситуации 2) — $(d_1, \ldots, d_{m-1})$, в ситуации 3) — $d_3-2, \ldots, d_m-2)$, в ситуации 4) — $(d_3-2, \ldots, d_{m-2}-2)$ (при $m=4$ получается пустая последовательность ( )), в ситуации 5) — пустая последовательность ( ). Скажем, что π исчерпывается, если в результате сокращений получается пустая последовательность или (2, 2, 2, 1, 1).

Следствие 2. *Невозрастающая последовательность целых чисел является последовательностью степеней вершин некоторого графа из $\mathcal{L}$, если и только если существует исчерпывающая ее цепочка сокращений.*

Доказательство. Из леммы 3 [1] следует, что если граф H из $\mathscr{M}$ содержит вершины степени $|VH|-2$, то существует граф F с той же последовательностью степеней вершин, который представим в виде $F=Q_2\circ F'$. Дальше теорема 1.

Следствие 3. *Если u_n — число n-вершинных графов из $\mathscr{L}$, t_n — число n-вершинных графов из $\mathscr{M}$, то*

$$u(x) = \frac{t(x) + x^4 + x^5 - x^3}{-x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 1}, \tag{3}$$

где

$$t(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x^n, \quad u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n.$$

Доказательство. Из теоремы 1 сразу следует, что для $n\geqslant 4$

$$\begin{gathered} u_n = t_n' + 2u_{n-1} + u_{n-2} - u_{n-3} + u_{n-4}, \\ u_1 = 1,\ u_2 = 2,\ u_3 = 4,\ t_1 = 1,\ t_2 = t_3 = 0, \end{gathered} \tag{4}$$

где

$$u_0 = 0, \quad t_n' = \begin{cases} t_n, & \text{если } n \neq 4{,}5; \\ t_n + 1, & \text{если } n = 4{,}5. \end{cases}$$

Но соотношение (3) равносильно (4). Следствие доказано.

Обозначим: $p_i(n)$ — число разбиений числа n с частями, превосходящими $i-1$, $p(n)=p_1(n)$.

Лемма 1 [2]. *Для* $n\geqslant 11$ $p_2(n) = p(n) - p(n-1) \leqslant 2^{n-7}$.

Лемма 2. *Для* $n\geqslant 4$

$$p_3(n) = p(n) - p(n-1) - p(n-2) + p(n-3).$$

Доказательство. Число разбиений n, среди частей которых имеется 1, равно $p(n-1)$. Число разбиений n, среди частей которых нет 1, но имеется 2, равно $p_2(n-2)$. Из сказанного имеем:

$$p(n) = p_3(n) + p(n-1) + p_2(n-2) = p_3(n) + p(n-1) + p(n-2) - p(n-3).$$

Лемма 3. *Для* $n\geqslant 5$

$$t_n = \sum_{i=0}^{n} p_3(i)\cdot p_3(n-i), \tag{5}$$

где t_n — число n-вершинных графов из $\mathscr{M}$, $p_3(0) = 1$.

Доказательство. Обозначим $\mathscr{M}_n$ множество n-вершинных графов G таких, что $\bar{G}\in\mathscr{M}$. $\mathscr{P}_3(n)$ — множество разбиений числа n с частями, превосходящими 2 (полагаем $\mathscr{P}_3(0)=(0)$). В силу леммы 3 [1], $G\in\mathscr{M}_n$. ($n\geqslant 5$), если и только если G есть объединение простых циклов и цепей, причем порядки компонент связности в G превосходят 2. Зададим отображение

$$\varphi : \mathscr{M}_n \to \bigcup_{i=0}^{n} (\mathscr{P}_3(i) \times \mathscr{P}_3(n-i))$$

следующим образом: если

$$G = C_{m_1} \cup \ldots \cup C_{m_r} \cup T_{s_1} \cup \ldots \cup T_{s_l},$$

где C_i, T_i — i-вершинные простые цикл и цепь соответственно, $m_1 \geqslant \ldots \geqslant m_r > 0$, $s_1 \geqslant \ldots \geqslant s_l > 0$ (возможно также $m_1 = \ldots = m_r = 0$ или $s_1 = \ldots$

$\ldots = s_l = 0$), то полагаем $\varphi(G) = ((m_1, \ldots, m_r), (s_1, \ldots, s_l)) \in \mathcal{P}_3(m_1 + \ldots + m_r) \times \mathcal{P}_3(s_1 + \ldots + s_l)$ (если $m_1 = \ldots = m_r = 0$ или $s_1 = \ldots = s_l = 0$, то полагаем $\varphi(G) = ((0), (s_1, \ldots, s_l))$ или $\varphi(G) = ((m_1, \ldots, m_r), (0))$ соответственно). Очевидно, φ—биекция.

Лемма 4. *Для* $n \geqslant 11$ $t_n \leqslant (n+1)2^{n-8}$.

Доказательство. Очевидно, $p_3(n) \leqslant 2^{n-4}$ при $4 \leqslant n \leqslant 10$ (см. таблицу), $p_3(n) < p(n) - p(n-1) \leqslant 2^{n-7}$ при $n \geqslant 11$ (леммы 1—2). Тогда по лемме 3

$$t_n = 2p_3(n) + 2p_3(n-3) + \sum_{i=4}^{n-4} p_3(i)\, p_3(n-i) \leqslant 2\cdot 2^{n-7} + 2\cdot 2^{n-7} +$$

$$+ \sum_{i=4}^{n-4} 2^{i-4}\cdot 2^{n-i-4} = (n+1)\, 2^{n-8}.$$

Подсчет числа $p(n)$ можно, например, выполнить по формулам Гупта [3], так что для вычисления u_n по формулам (4)—(5) достаточно $O(n^3)$ элементарных операций, ибо $\log p(n) \sim c\sqrt{n}$ [4]. Значения t'_n, u_n, $p_3(n)$ для малых n приведены в следующем списке:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p_3(n)$	0	0	1	1	1	2	2	3	4	5
t'_n	1	0	0	2	3	5	6	9	14	19
u_n	1	2	4	11	28	70	167	396	931	2180

Следствие 4. *Для* $n \geqslant 6$

$$(2{,}32)^{n-1} < u_n < (2{,}37)^{n-1}.$$

Доказательство. Положим $y = 2{,}32$, $x = 2{,}37$. Докажем, что для $n \geqslant 6$

$$y^{n-1} - y^{n-2} < u_n - u_{n-1} < x^{n-1} - x^{n-2}, \tag{6}$$

$$y^{n-1} < u_n < x^{n-1}. \tag{7}$$

Для $6 \leqslant n \leqslant 10$ непосредственная проверка. Дальше индукция по n. Из следствия 3, леммы 4 и индуктивного предположения имеем:

$$y^{n-1} - y^{n-2} < y^{n-2} + (y^{n-3} - y^{n-4}) + y^{n-5} < t'_n + u_{n-1} + (u_{n-2} - u_{n-3}) + u_{n-4} =$$

$$= u_n - u_{n-1} < (n+1)\cdot 2^{n-8} + x^{n-2} + (x^{n-3} - x^{n-4}) + x^{n-5} < x^{n-1} - x^{n-2}. \tag{8}$$

Крайние неравенства в (8) следуют из соотношений

$$0 < -y^4 + 2y^3 + y^2 - y + 1,$$

$$\left(\frac{11+1}{2^3}\right)\left(\frac{2}{x}\right)^{11-5} < x^4 - 2x^3 - x^2 + x - 1.$$

Таким образом, (6) доказано; (7) следует из (6) и соотношения вида (7) для u_{n-1}.

Интересно сопоставить оценки числа u_n в следствии 4 с числом d_n n-вершинных доминантно-пороговых графов. Так, из теоремы 3 [5] может быть получена формула:

$$d(x) = \sum_{i=1}^{\infty} d_n x^n = \frac{x - x^3}{x^3 - x^2 - 2x + 1},$$

из которой получается однородное линейное рекуррентное соотношение ($n \geqslant 4$)

$$d_n = 2d_{n-1} + d_{n-2} - d_{n-3}.$$

С помощью этого соотношения легко выводится асимптотика для d_n: $d_n \sim cr^n$, где r — наибольший по модулю корень кубического уравнения $x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$ ($r \simeq 2{,}24$).

Автор выражает благодарность кандидату физ.-мат. наук Ю. А. Зуеву за ценное замечание, приведшее к получению следствий 3—4.

Summary

This part of the article deals with the classification and enumeration of hereditary pseudodomishold graphs realized on the basis of results from [1]. The bounds of the number of n-vortex hereditary pseudodomishold graphs are defined.

Литература

1. Черняк А. А. Псевдодоминантно-пороговые графы. I // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1988. № 4. С. 37—43.
2. Тышкевич Р. И., Черняк А. А. Каноническое разложение графа, определяемого степенями его вершин // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1979. № 5. С. 14—26.
3. Риордан Д. Введение в комбинаторный анализ. М., 1963. С. 144.
4. Холл М. Комбинаторика. М., 1970. С. 60.
5. Тышкевич Р. И., Черняк А. А. Декомпозиция графов // Кибернетика. 1985. № 2. С. 67—74.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию 23.04.86

УДК 517.968

Г. А. РАСОЛЬКО

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА, СОДЕРЖАЩИЕ ИНТЕГРАЛЫ С КРАТНЫМИ ЯДРАМИ КОШИ

1. Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение (СИУ)

$$\frac{1}{\pi^3} \iiint\limits_{D^3} \frac{\varphi(t_1, t_2, t_3)}{(t_1 - x_1)(t_2 - x_2)(t_3 - x_3)} dt_1 dt_2 dt_3 +$$

$$+ \frac{\lambda}{\pi^3} \iiint\limits_{D^3} k(x_1, x_2, x_3, t_1, t_2, t_3)\, \varphi(t_1, t_2, t_3)\, dt_1 dt_2 dt_3 = f(x_1, x_2, x_3), \quad (1.1)$$

$$D^3 = [-1, 1]^3, \quad -1 < x_j < 1, \quad j = 1, 2, 3.$$

На таком уравнении просматриваются основные свойства n-мерного уравнения.

Как и в одномерном случае [1, с. 444, 2, с. 284] решение уравнения (1.1) зависит от класса функций, в котором оно разыскивается.

В настоящей работе рассматривается решение уравнения (1.1) в классе функций, ограниченных в замкнутом кубе $-1 \leqslant x_j \leqslant 1$ ($j = 1, 2, 3$), построен прямой метод приближенного решения уравнения, доказана его сходимость к точному решению в пространстве C.

Теорема 1.1. *Пусть $f(x_1, x_2, x_3) \in H$, $k(x_1, x_2, x_3, t_1, t_2, t_3) \in H$, решение уравнения (1.1) разыскивается в классе ограниченных функций и λ не является собственным значением ядра*

$$N(x_1, x_2, x_3, t_1, t_2, t_3) = -\sqrt{(1 - x_1^2)(1 - x_2^2)(1 - x_3^2)}\, \frac{1}{\pi^6} \times$$