

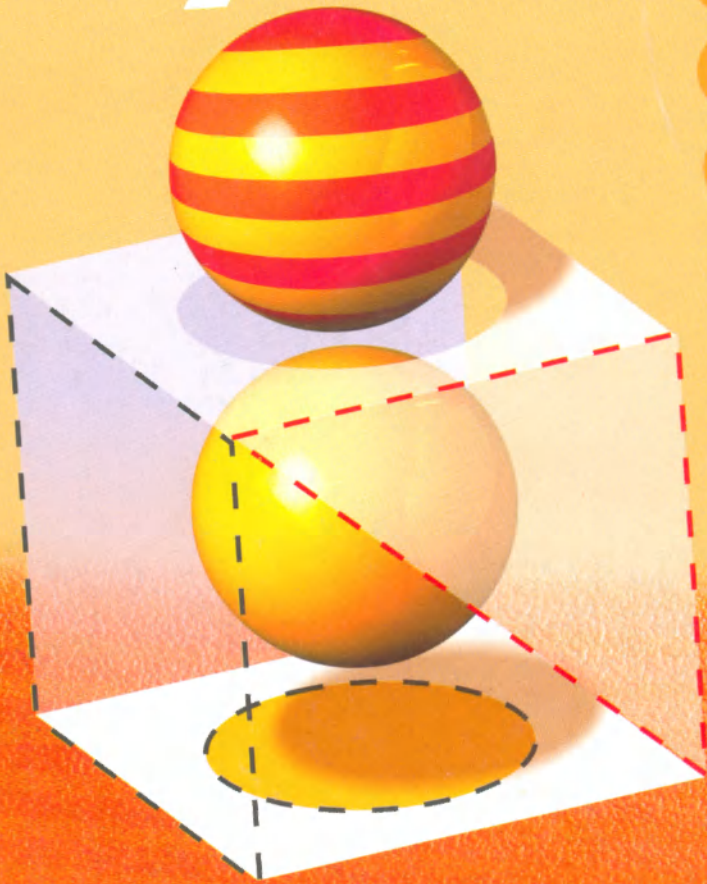
битупиентам, учащимся

514  
Ц-498

А. А. Черняк, Ж. А. Черняк

# Геометрия

## за 9 уроков



- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7
- 8
- 9

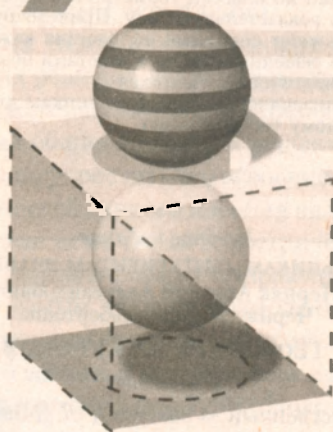
АВЕРСЭВ

514  
У 498

Школьникам, абитуриентам, учащимся

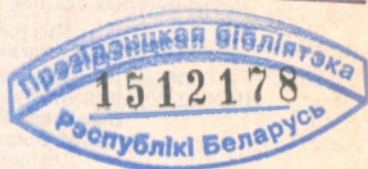
А. А. Черняк, Ж. А. Черняк

# Геометрия за 9 уроков



2-е издание

Ф.К.



Минск • АЗЕРСЭБ • 2009

Президентская библиотека  
Республики Беларусь



2 009000 062559



УДК 514(075.3)  
ББК 22.151я721  
Ч-49

Серия основана в 1999 году

Рецензент  
преподаватель математики УОУ «Лицей БГУ» Т. П. Бахтина

Ч-49  
Черняк, А. А.

Геометрия за 9 уроков / А. А. Черняк, Ж. А. Черняк. — 2-е изд. — Минск : Аверсэв, 2009. — 223 с. : ил. — (Школьникам, абитуриентам, учащимся).

ISBN 978-985-509-970-4.

Теоретический и практический материал пособия разбит на 9 уроков и систематизирован по классам геометрических формул и теорем, опирающихся на единую доказательную базу. Приведенные решения демонстрационных задач отражают основные положения каждого урока, а задачи для самостоятельного решения и тесты с ответами позволяют определить уровень геометрической подготовки учащихся.

Пособие предназначено старшеклассникам для подготовки к экзаменам и централизованному тестированию.

УДК 514(075.3)  
ББК 22.151я72

Учебное издание  
ШКОЛЬНИКАМ, АБИТУРИЕНТАМ, УЧАЩИМСЯ  
Черняк Аркадий Александрович  
Черняк Жанна Альбертовна  
ГЕОМЕТРИЯ ЗА 9 УРОКОВ  
2-е издание

Ответственный за выпуск Д. Л. Дембовский

Подписано в печать с готовых диапозитивов 18.03.2009.  
Формат 60×84 1/4. Бумага типографская. Гарнитура «Petersburg».  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 13,02. Уч.-изд. л. 11,39. Тираж 3100 экз. Зак. 2121.

Удостоверение № 08-33-0.294872  
о государственной гигиенической регистрации продукта от 05.09.2006.

Общество с дополнительной ответственностью «Аверсэв»  
ЛИ № 02330/0494066 от 03.02.2009. Контактный телефон (017) 210-18-98.  
E-mail: info@aversev.com; www.aversev.com  
Ул. М. Богдановича, 129а, 220123, Минск.  
Для писем: а/я 135, 220123, Минск.

УПП «Витебская областная типография»  
Ул. Щербакова-Набережная, 4, 210015, Витебск.

Искусство решать геометрические задачи  
чем-то напоминает трюки иллюзионистов —  
иногда, даже зная решение задачи, трудно понять,  
как можно было до него додуматься

## Предисловие

В последнее время основной формой проведения вступительных экзаменов по математике становится централизованное тестирование, обеспечивающее, по нашему мнению, более объективную оценку знаний абитуриентов. Такая форма оценки знаний требует новых методов подготовки к этим серьезным испытаниям.

Обилие различных типов геометрических задач и многообразие приемов и методов их решения делают геометрию наиболее трудным разделом школьной математики. Систематизация теоретического материала, выявляющая общие подходы к решению геометрических задач, может значительно упростить его освоение.

Одной из особенностей данного пособия является то, что материал в нем систематизирован не по типам геометрических фигур, а по наборам геометрических теорем и формул, опирающихся на единую доказательную базу и тем самым дающих возможность применять их для решения соответствующих блоков задач, приведенных в книге.

Книга состоит из 9 уроков. В каждом уроке в виде опорных сигналов приводятся основные теоремы и формулы (блоки «Учим наизусть»), определения тех геометрических объектов, которые школьники обычно либо забывают, либо путают (блоки «Вспоминаем определения»). Далее приводится разбор решений демонстрационных задач, использующих теоремы и формулы данного урока (блок «Решаем вместе»). Затем следуют представительный список задач для самостоятельного решения (блок «Решаем сами»), указания к их решению (блок «Подсказываем идею решения») и ответы к ним (блок «Сверяем ответы»). Урок завершается списком задач различной сложности для самопроверки (с ответами), оцененных в баллах (блок «Тестируем себя»). Разбиение на баллы условно: 1–2 балла — легкие задачи, 3–5 баллов — задачи средней сложности, 6–7 баллов — повышенной сложности.

ISBN 978-985-509-970-4

© Черняк А. А., Черняк Ж. А., 2006  
© Оформление. ОДО «Аверсэв», 2009

Предисловие

Таким образом, если Вы желаете:

- подготовиться к централизованному тестированию,
- поднять свои знания по геометрии на иной методический уровень,
- развить геометрическое мышление и интуицию,
- понять внутреннюю логику школьной геометрии,
- освежить в памяти формальные, но необходимые истины,
- протестировать себя и определить свой уровень геометрической подготовки,
- за короткий срок всему сказанному выше научить других,

и если при этом Вы не желаете:

- зубрить неприменяемые на практике утверждения и теоремы,
- загромождать свою память интуитивно понятными и наглядными определениями и свойствами,
- погрязнуть в чтении многостраничных изданий учебной литературы по геометрии,

то эта книга — для Вас.

*Авторы:*

доктор физико-математических наук, профессор

Черняк Аркадий Александрович,

кандидат физико-математических наук, доцент

Черняк Жанна Альбертовна.

## Используемые обозначения

$\triangle ABC$  — треугольник  $ABC$ ;

$\angle A$  — угол  $A$ ;

$\sim$  — знак подобия;

$\parallel$  — знак параллельности;

$\perp$  — знак перпендикулярности;

$S_{\Phi}$  — площадь плоской фигуры  $\Phi$ ;

$\cup AB$  — дуга некоторой окружности.



# Содержание

Предисловие .....	3
Используемые обозначения .....	4

## УРОК 1. Метрические соотношения в плоских фигурах

Метрические соотношения в треугольниках .....	5
<i>Учим наизусть!</i> .....	5
<i>Решаем вместе</i> .....	7
<i>Вспоминаем определения и простейшие свойства</i> .....	13
Метрические соотношения в четырехугольниках .....	14
<i>Учим наизусть!</i> .....	14
<i>Решаем вместе</i> .....	14
<i>Вспоминаем определения и простейшие свойства</i> .....	16
Метрические соотношения, связанные с окружностями .....	17
<i>Учим наизусть!</i> .....	17
<i>Решаем вместе</i> .....	18
<i>Решаем сами</i> .....	23
<i>Подсказываем идею решения</i> .....	26
<i>Сверяем ответы</i> .....	29
<i>Тестируем себя сами</i> .....	30
<i>Сверяем ответы</i> .....	34

## УРОК 2. Теоремы о площадях плоских фигур

Площадь треугольника .....	35
<i>Учим наизусть!</i> .....	35
<i>Решаем вместе</i> .....	36
Площади четырехугольников .....	39
<i>Учим наизусть!</i> .....	39
<i>Решаем вместе</i> .....	40
Площади круга и его частей .....	44
<i>Учим наизусть!</i> .....	44
<i>Решаем вместе</i> .....	44
<i>Решаем сами</i> .....	46
<i>Подсказываем идею решения</i> .....	49

<i>Сверяем ответы</i> .....	53
<i>Тестируем себя сами</i> .....	53
<i>Сверяем ответы</i> .....	57

### **УРОК 3. Угловые соотношения в плоских фигурах**

<i>Вспоминаем определения и простейшие свойства</i> .....	58
Угловые соотношения в плоских фигурах .....	60
<i>Учим наизусть!</i> .....	60
<i>Решаем вместе</i> .....	61
<i>Решаем сами</i> .....	68
<i>Подсказываем идею решения</i> .....	69
<i>Сверяем ответы</i> .....	71
<i>Тестируем себя сами</i> .....	71
<i>Сверяем ответы</i> .....	73

### **УРОК 4. Пропорциональные соотношения в плоских фигурах**

Пропорциональные соотношения в треугольнике .....	74
<i>Учим наизусть!</i> .....	74
Подобные треугольники .....	75
<i>Учим наизусть!</i> .....	75
<i>Решаем вместе</i> .....	76
<i>Решаем сами</i> .....	89
<i>Подсказываем идею решения</i> .....	93
<i>Сверяем ответы</i> .....	97
<i>Тестируем себя сами</i> .....	98
<i>Сверяем ответы</i> .....	103

### **УРОК 5. Параллельные и перпендикулярные прямые и плоскости в пространстве**

<i>Вспоминаем определения</i> .....	104
Перпендикулярность прямых и плоскостей .....	106
<i>Учим наизусть!</i> .....	106
<i>Решаем вместе</i> .....	107
Параллельность прямых и плоскостей .....	110
<i>Учим наизусть!</i> .....	110
<i>Решаем вместе</i> .....	111

<i>Решаем сами</i> .....	117
<i>Подсказываем идею решения</i> .....	119
<i>Сверяем ответы</i> .....	121
<i>Тестируем себя сами</i> .....	121
<i>Сверяем ответы</i> .....	125

## **УРОК 6. Площади поверхностей и объемы пространственных фигур**

<i>Вспоминаем определения</i> .....	126
Площади поверхностей .....	127
<i>Учим наизусть!</i> .....	127
<i>Решаем вместе</i> .....	129
Объемы фигур .....	134
<i>Учим наизусть!</i> .....	134
<i>Решаем вместе</i> .....	135
<i>Решаем сами</i> .....	144
<i>Подсказываем идею решения</i> .....	146
<i>Сверяем ответы</i> .....	147
<i>Тестируем себя сами</i> .....	148
<i>Сверяем ответы</i> .....	153

## **УРОК 7. Вписанные и описанные фигуры в пространстве**

Основные свойства вписанных и описанных фигур .....	154
<i>Учим наизусть!</i> .....	154
<i>Решаем вместе</i> .....	156
Многогранники и шары, касающиеся их ребер .....	165
<i>Учим наизусть!</i> .....	165
<i>Решаем вместе</i> .....	165
Шары и касающиеся их плоскости .....	170
<i>Учим наизусть!</i> .....	170
<i>Решаем вместе</i> .....	170
<i>Решаем сами</i> .....	175
<i>Подсказываем идею решения</i> .....	177
<i>Сверяем ответы</i> .....	181
<i>Тестируем себя сами</i> .....	181
<i>Сверяем ответы</i> .....	185



## УРОК 8. Ортогональные проекции в пространстве

Проекции и их свойства .....	186
<i>Учим наизусть!</i> .....	186
<i>Решаем вместе</i> .....	187
<i>Решаем сами</i> .....	192
<i>Подсказываем идею решения</i> .....	192
<i>Сверяем ответы</i> .....	193
<i>Тестируем себя сами</i> .....	193
<i>Сверяем ответы</i> .....	194

## УРОК 9. Прямоугольная декартова система координат на плоскости и в пространстве. Векторы

<i>Вспоминаем определения</i> .....	195
Простейшие соотношения между точками плоскости .....	196
<i>Учим наизусть!</i> .....	196
<i>Решаем вместе</i> .....	196
<i>Вспоминаем определения</i> .....	199
Операции над векторами с заданными координатами .....	200
<i>Учим наизусть!</i> .....	200
<i>Решаем вместе</i> .....	201
Простейшие соотношения между точками трехмерного пространства .....	205
<i>Учим наизусть!</i> .....	205
<i>Решаем вместе</i> .....	206
<i>Решаем сами</i> .....	210
<i>Подсказываем идею решения</i> .....	212
<i>Сверяем ответы</i> .....	215
<i>Тестируем себя сами</i> .....	216
<i>Сверяем ответы</i> .....	219