**А. А. Черняк, Ж. А. Черняк,
Ю. М. Метельский, С. А. Богданович**

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ: ТЕОРИЯ И АЛГОРИТМЫ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ АКАДЕМИЧЕСКОГО БАКАЛАВРИАТА

2-е издание, исправленное и дополненное

Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по инженерно-техническим направлениям

Допущено Министерством образования Республики Беларусь в качестве учебного пособия для студентов экономических специальностей учреждений, обеспечивающих получение высшего образования

Москва ▪ Юрайт ▪ 2019

УДК 519.85(075.8)
ББК 22.18я73
Ч-49

***Авторы*:**

Черняк Аркадий Александрович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и методики преподавания математики Белорусского государственного педагогического университета имени М. Танка;

Черняк Жанна Альбертовна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники;

Метельский Юрий Михайлович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и методики преподавания математики Белорусского государственного педагогического университета имени М. Танка;

Богданович Сергей Адамович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и методики преподавания математики Белорусского государственного педагогического университета имени М. Танка.

***Рецензенты*:**

кафедра прикладной математики и экономической кибернетики Белорусского государственного экономического университета;

Берник В. И. — доктор физико-математических наук, профессор, старший научный сотрудник Института математики Национальной академии наук Беларуси.

Черняк, А. А.

Ч-49 Методы оптимизации: теория и алгоритмы : учеб. пособие для академического бакалавриата / А. А. Черняк, Ж. А. Черняк, Ю. М. Метельский, С. А. Богданович. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 357 с. — Серия : Бакалавр. Академический курс.

ISBN 978-5-534-04103-3

В учебном пособии рассмотрены различные вопросы дисциплины «Математическое программирование». Помимо традиционных разделов в книге представлены современные: фундаментальный алгоритм полиномиального решения задач линейной оптимизации, регуляризация неустойчивых задач оптимизации, введение в теорию полиномиальной сводимости и NP-полноты. В пособии содержатся строгие доказательства достаточно сложных теорем математического программирования, а в изложении ряда разделов, уже ставших традиционными, предложены новые подходы. В каждой главе материал излагается на двух уровнях, разных по сложности.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования.

Учебное пособие предназначено студентам высших учебных заведений, аспирантам и преподавателям, а также всем интересующимся.

УДК 519.85(075.8)
ББК 22.18я73

ISBN 978-5-534-04103-3

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Существующие учебники по математическому программированию можно условно разделить на три группы. Книги первой группы, написанные для студентов инженерно-экономических специальностей, характеризуются стандартным подбором и традиционным изложением материала. Они отражают приверженность их авторов к тем канонам в преподавании, которые были заложены еще в 70–80 годах XX в. Вторую группу составляют книги, ориентированные на применение программных пакетов. Они учитывают современный прогресс в информационных технологиях, однако по актуальности и глубине излагаемой в них теории уступают книгам первой группы. К третьей группе можно отнести книги, предназначенные студентам математических факультетов университетов. Эти книги в силу своей специфики имеют высокий уровень абстракции и являются узкопрофильными (например, по «выпуклому программированию», «дискретной оптимизации» и т.д.).

Остановимся на характерных особенностях предлагаемой книги.

Во-первых, учитывая и уважая возможности потенциальных читателей, авторы варьируют степень подробности и глубину изучения предмета. В каждой главе материал излагается на двух уровнях, которые можно условно назвать «беллетризованным» и «академическим». Первый уровень готовит читателя к последующему, математически строгому, изложению и потому не отягощен терминологией, насыщен наглядными примерами и не требует для понимания значительных математических усилий. Второй уровень предполагает глубокое постижение теории и содержит доказательства утверждений, которые вынесены в отдельные главы. В зависимости от содержания главы либо эти два уровня перемежаются друг с другом (параллельное изложение), либо первый предваряет второй (последовательное изложение).

В то же время, сохраняя традиционные разделы, оговоренные рамками государственных образовательных стандартов, авторы постарались придать книге современное звучание, адаптировав ряд ключевых результатов последних десятилетий (многие из которых были отражены только в специализированных научных изданиях) для студентов инженерно-экономических специальностей вузов. Среди них: фундаментальный алгоритм полиномиального решения задач линейной оптимизации, принципиально отличающийся от симплексных процедур не только своей эффективностью, но и самой природой используемого подхода; регуляризация неустойчивых задач оптимизации, позволяющая преодолевать разрыв между реальными явлениями и их математическими моделями; введение в теорию полиномиальной сводимости и NP-полноты (эти понятия стали символом трудностей, с которыми сталкиваются разработчики алгоритмов по мере увеличения размерности и усложнения структуры оптимизационных задач).

Во-вторых, в книге содержатся строгие доказательства достаточно сложных теорем математического программирования, а в изложении ряда разделов, уже ставших традиционными, предложены новые подходы. Так, преодолено разделение общей задачи линейного программирования на вырожденный и невырожденный случаи; приведена простая реализация симплекс-метода для преодоления «зацикливания», параллельно решающая проблему нахождения начального базисного плана; дана обобщенная сетевая модель, включающая в качестве частных случаев различные оптимизационные задачи, связанные с потоковыми алгоритмами; транспортные задачи и задачи динамического программирования решаются с помощью методов теории графов, обеспечивающих наглядность в обосновании сопутствующих алгоритмов; компактно изложены теория Куна–Таккера и метод возможных направлений — традиционно сложные для усвоения разделы нелинейного программирования.

В-третьих, данная книга реализует главный принцип, отраженный в ее названии: критерием значимости любого результата является его алгоритмическая эффективность, а описание самих алгоритмов должно представлять собой оптимальную теоретическую основу для будущих программных реализаций. При этом авторы полностью отказались от многочисленных адаптаций к «ручному» счету трудоемких вычислительных процедур благодаря существованию программных пакетов, успешно справляющихся с проблемами подобного рода.

Хотя пособие и является самодостаточным, в нем активно используются сведения из общего курса высшей математики. Во всех подобных случаях авторы, хотя и делают ссылки на один из современных учебников, тем не менее оставляют за читателем право выбора подходящего учебного пособия.

Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе

Выработка и принятие решений являются важным звеном процесса управления и личной функцией руководителей и специалистов в практической области. Для повышения эффективности управленческих решений требуется глубокое изучение производственных процессов различными методами. Целью курса является изучение студентами методов математического программирования, а также современных информационных технологий для нахождения оптимальных решений практических задач, выработка навыков экономико-математического моделирования реальных процессов.

Основные задачи курса:

- изучение постановок и содержания практических задач, подлежащих математическому моделированию;
- изучение методов и алгоритмов решения оптимизационных задач;
- приобретение практических навыков решения оптимизационных задач методами математического программирования;
- приобретение практических навыков в обосновании оптимальных решений с использованием ЭВМ;
- привитие навыков научных исследований производственных процессов с применением математических методов оптимальных решений и ЭВМ.

В результате изучения дисциплины обучаемый должен:

знать

- эффективные алгоритмы решения задач линейной оптимизации;
- принцип двойственности в линейном программировании;
- устойчивые и неустойчивые задачи оптимизации;
- полиномиальные алгоритмы на графах и матроидах;

уметь

- строить сетевые модели прикладных задач;
- решать задачи линейной оптимизации симплекс-методом;
- применять теорию Куна–Таккера и метод Лагранжа для решения нелинейных задач оптимизации;
- доказывать эффективность и алгоритмическую труднорешаемость оптимизационных задач;

владеть

- графовыми методами для решения транспортных задач и задач динамического программирования;
- навыками проведения научных исследований производственных процессов;
- методами ветвей и границ.

Место курса «Математическое программирование» среди других дисциплин определяется его важностью для обогащения практической науки точными методами количественного анализа, способствующими ее переходу на новую, более высокую ступень, а также необходимостью ее применения как мощного инструментария в математическом моделировании экономических и производственных процессов.

1

МНОГОГРАННИКИ И ПОЛИЭДРЫ

Рассмотрим две точки $B=(0;1)$ и $D=(3;0)$ на координатной плоскости x_1Ox_2 (рис. 1.1). Любая точка N отрезка BD может быть представлена в виде $N=\lambda B+(1-\lambda)D$, где λ – некоторое число между нулем и единицей. Так как $\lambda+(1-\lambda)=1$, то, обозначив через λ_1 и λ_2 коэффициенты λ и $1-\lambda$ в сумме $N=\lambda B+(1-\lambda)D$, получим: $N=\lambda_1 B+\lambda_2 D$, где $\lambda_1+\lambda_2=1$, $\lambda_1\geq 0$, $\lambda_2\geq 0$. Такое представление точки N называется выпуклой линейной комбинацией точек B и D. При этом говорят, что отрезок BD порождается точками B и D.

Пусть $A=(0;0)$. Возьмем произвольную точку K треугольника ABD. Продолжим отрезок AK до пересечения с BD в точке M. Поскольку точка M принадлежит отрезку BD, то $M=\mu_1 B+\mu_2 D$, где $\mu_1+\mu_2=1$, $\mu_1\geq 0$, $\mu_2\geq 0$. Аналогичное представление возможно и для точки K, принадлежащей отрезку AM: $K=\beta_1 A+\beta_2 M$, где $\beta_1+\beta_2=1$, $\beta_1\geq 0$, $\beta_2\geq 0$. Отсюда $K=\beta_1 A+\beta_2(\mu_1 B+\mu_2 D)=$ $=\beta_1 A+\beta_2\mu_1 B+\beta_2\mu_2 D$.

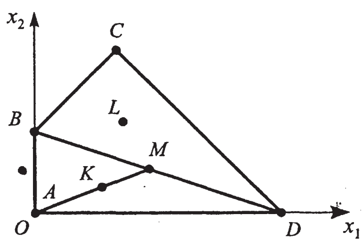

Рис. 1.1. Многогранник *ABCD*

Поскольку $\beta_1+\beta_2\mu_1+$ $+\beta_2\mu_2=\beta_1+\beta_2(\mu_1+\mu_2)=\beta_1+\beta_2=1$, то, обозначив коэффициенты β_1, $\beta_2\mu_1$, $\beta_2\mu_2$ соответственно через λ_1, λ_2, λ_3, получим: $K=\lambda_1 A+\lambda_2 B+\lambda_3 D$, где $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$, $\lambda_1\geq 0$, $\lambda_2\geq 0$, $\lambda_3\geq 0$. Такое представление точки K называется выпуклой линейной комбинацией точек A, B, D. При этом говорят, что треугольник ABD порождается точками A, B, D.

Если теперь рассмотреть четырехугольник $ABCD$, где $C=(1;2)$, то любая его точка L будет выпуклой линейной комбинацией четырех точек: A, B, C, D. Действительно, $ABCD$ можно разбить на два треугольника, и точка L окажется в одном из них, например в треугольнике BCD. Но тогда, как показано выше, $L=\lambda_1 B+\lambda_2 C+\lambda_3 D$, где $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$, $\lambda_1\geq 0$, $\lambda_2\geq 0$, $\lambda_3\geq 0$. Отсюда $L=\lambda_1 B+\lambda_2 C+\lambda_3 D+\lambda_4 A$, где $\lambda_4=0$, $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=1$. Таким образом, четырехугольник $ABCD$ порождается точками A, B, C, D.

Итак, четырехугольник $ABCD$ состоит из всех выпуклых линейных комбинаций точек A, B, C, D. Подобные структуры называются многогранниками. Очевидно, что многогранниками являются также рассмотренные ранее отрезок BD и треугольник ABD.

Рассмотрим теперь n-мерные точки в n-мерном точечном пространстве Af^n, определенном в работе [11, гл. 1].

Пусть дана конечная система точек $T=\{A_1,\ldots,A_k\}$ пространства Af^n. Говорят, что точка $A\in Af^n$ есть *выпуклая линейная комбинация* точек из T, если $A=\lambda_1 A_1+\ldots+\lambda_k A_k$, где $\lambda_1+\ldots+\lambda_k=1$, $\lambda_i\geq 0$, $i=1,\ldots,k$.

Многогранником, порожденным конечной системой точек T из Af^n, называется множество всех выпуклых линейных комбинаций точек из T. Очевидно, что множество, состоящее из одной точки A, является многогранником: $A=1\cdot A$.

Вернемся теперь к четырехугольнику $ABCD$ (рис. 1.1). Он является выпуклым многоугольником: какие бы две его точки ни взять, соединяющий их отрезок будет целиком содержаться в $ABCD$. В то же время четырехугольник на рис. 1.2 выпуклым не является.

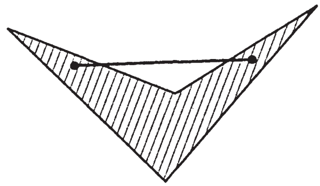

Рис. 1.2. Невыпуклый четырехугольник

Точки A, B, C, D обладают уникальным для выпуклого четырехугольника $ABCD$ свойством: при удалении любой из них оставшаяся часть сохраняет выпуклость. Именно в силу этого свойства точки A, B, C, D называются вершинами множества $ABCD$. Никакие другие точки четырехугольника $ABCD$ подобным свойством не обладают и поэтому не могут называться его вершинами.

В общем случае n-мерного пространства Af^n многогранник, порожденный системой из двух точек, называется *отрезком.* Множество точек, содержащее вместе с любыми двумя своими точками и отрезок, их соединяющий, называется *выпуклым. Вершиной* выпуклого множества $\mathfrak{F}$ называется точка, удаление которой из $\mathfrak{F}$ приводит к пустому или выпуклому множеству. Таким образом, одноточечное множество $\mathfrak{F}=\{A\}$ всегда выпукло и A – вершина $\mathfrak{F}$.

Следующая теорема утверждает, что вершины многогранника могут быть только среди точек, его порождающих.

Теорема 1.1. *Пусть многогранник $\mathfrak{M}$ порожден системой точек $T=\{A_1,\ldots,A_k\}$. Тогда любая его вершина принадлежит T.* (Доказательство дано в задаче Т1.1.)

Теорема 1.2. *Любой многогранник $\mathfrak{M}$ порождается множеством своих вершин.* (Доказательство дано в задаче Т1.4.)

Таким образом, наиболее «экономной» системой точек, порождающей многогранник, является множество его вершин. Из теорем 1.1, 1.2 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.1. *Любой многогранник имеет по меньшей мере одну вершину, и число его вершин всегда конечно.*

Существуют выпуклые множества с бесконечным числом вершин. Так, любая точка границы круга является его вершиной. Кроме того, каждая точка круга есть выпуклая линейная комбинация некоторых его вершин (например, концов диаметра, проведенного через эту точку), и каждая выпуклая ком-

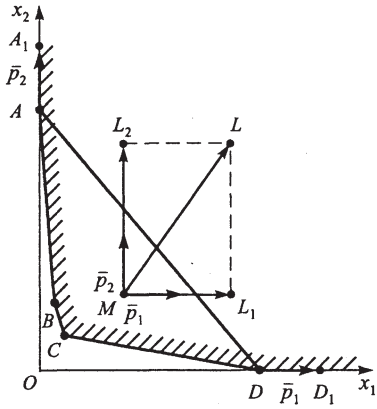

Рис. 1.3. Многогранная область

бинация его вершин $A_1,\ldots,A_n$ содержится в круге (многогранник $A_1\ldots A_n$ является вписанным n-угольником и поэтому целиком содержится в круге). Другими словами, круг также совпадает с множеством всех выпуклых линейных комбинаций своих вершин.

Многогранник является ограниченным выпуклым множеством с конечным числом вершин. Однако существуют неограниченные выпуклые множества с конечным числом вершин, включающие и многогранники, порожденные их вершинами. Рассмотрим изображенную на рис. 1.3 область, ограниченную лучами Dx_1, Ax_2 координатных осей Ox_1, Ox_2 и ломаной $ABCD$. Ее вершинами являются точки $A=(0;25)$, $B=(20/7;75/7)$, $C=(3;8)$, $D=(20;0)$, и она содержит многогранник $ABCD$.

Зафиксируем теперь два вектора: $\bar{p}_1=\overline{DD_1}=(1;0)$, $\bar{p}_2=\overline{AA_1}=(0;1)$. Возьмем произвольную точку L, принадлежащую области x_2ABCDx_1. Очевидно, что $L=M+\overline{ML}$, где M – некоторая точка многогранника $ABCD$. В свою очередь, вектор $\overline{ML}$ разложим (по правилу параллелограмма) в сумму векторов $\overline{ML_1}+\overline{ML_2}=\alpha_1\bar{p}_1+\alpha_2\bar{p}_2$, где α_1,α_2 – неотрицательные числа. Эта сумма называется неотрицательной линейной комбинацией векторов $\bar{p}_1$ и $\bar{p}_2$. Таким образом, область x_2ABCDx_1 – это выпуклое множество с конечным числом вершин, состоящее из всех сумм вида $M+\bar{p}$, где M – выпуклая линейная комбинация вершин; $\bar{p}$ – неотрицательная линейная комбинация фиксированной системы векторов $\{\bar{p}_1, \bar{p}_2\}$. Подобные структуры называются многогранными областями.

Рассмотрим общий случай n-мерных пространств. Пусть дана конечная система векторов $V=\{\bar{p}_1,\ldots,\bar{p}_r\}$ n-мерного векторного пространства $\mathbb{R}^n$ [11, гл. 31]. Говорят, что вектор $\bar{p}\in\mathbb{R}^n$ есть *неотрицательная линейная комбинация* векторов из V, если $\bar{p}=\alpha_1\bar{p}_1+\ldots+\alpha_r\bar{p}_r$, $\alpha_i\geq 0$, $i=1,\ldots,r$. *Многогранной областью*, порожденной конечной системой точек T из Af^n и конечной системой векторов V из $\mathbb{R}^n$, называется множество всех точек, которые представимы в виде $M+\bar{p}$, где M – выпуклая линейная комбинация точек из T; $\bar{p}$ – неотрицательная линейная комбинация векторов из V. Из этих определений ясно, что любой многогранник – это многогранная область, порожденная конечной системой точек T и нулевым вектором $\bar{0}$.

Утверждение 1.1. *Ограниченные многогранные области, и только они, являются многогранниками.* (Доказательство дано в задаче Т1.5.)

Утверждение 1.2. *Многогранная область является выпуклым множеством.* (Доказательство дано в задаче Т1.6.)

Рассмотрим теперь четырехугольник, изображенный на рис. 1.1, с иной точки зрения. Вспомним, что любая прямая $ax_1+bx_2=c$ делит координатную плоскость x_1Ox_2 на две полуплоскости, множества точек которых задаются неравенствами $ax_1+bx_2\leq c$ и $ax_1+bx_2\geq c$ соответственно. Отрезки AB, BC, CD, AD принадлежат прямым $x_1=0$, $x_2-x_1=1$, $x_1+x_2=3$, $x_2=0$ соответственно. Поэтому неравенства $x_1\geq 0$, $x_2-x_1\leq 1$, $x_1+x_2\leq 3$, $x_2\geq 0$ задают полуплоскости, отмеченные на рис. 1.4 зубцами. Следовательно, пересечение этих полуплоскостей (а им как раз и является четырехугольник $ABCD$) совпадает с множеством всех решений системы неравенств

$$\begin{cases} x_2 - x_1 \le 1, \\ x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

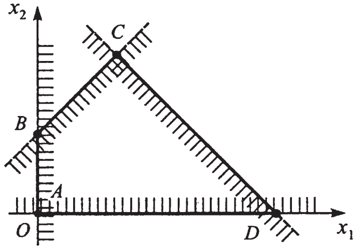

Рис. 1.4. Множество решений системы (1.1)

Аналогична структура и многогранной области, изображенной на рис. 1.3: она совпадает с множеством всех решений системы неравенств

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 \ge 25, \\ 19x_1 + x_2 \ge 65, \\ 8x_1 + 17x_2 \ge 160, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

поскольку лучи Ax_2, Dx_1 и отрезки AB, BC, CD принадлежат прямым $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $5x_1 + x_2 = 25$, $19x_1 + x_2 = 65$, $8x_1 + 17x_2 = 160$ соответственно. Оказывается, что совпадение с множествами решений систем линейных неравенств является характеристическим свойством многогранных областей (см. теорему 1.3).

Известно (см. [11, гл. 39]), что линейное уравнение $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$, в котором не все коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ равны нулю, определяет гиперплоскость пространства Af^n. Множество всех точек $(x_1, \ldots, x_n)$ из Af^n, удовлетворяющих неравенству $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \ge b$, называется *полупространством* в Af^n. Пересечение конечного числа полупространств в Af^n называется *полиэдром*.

Следующая теорема, которая приводится без доказательства, является фундаментальным утверждением теории полиэдров.

Теорема 1.3. *Многогранная область – это полиэдр, и каждый полиэдр – это многогранная область. Многогранник – это ограниченный полиэдр, и каждый ограниченный полиэдр – многогранник.*

Теорема 1.3 раскрывает геометрию множества решений системы линейных неравенств. Следующая теорема при более общих предположениях означает, что любую точку вне заданного выпуклого множества можно отделить от этого множества гиперплоскостью.

Теорема 1.4. *Пусть даны произвольное выпуклое замкнутое множество* $\mathfrak{N} \subseteq Af^n$ *и точка* $V \in Af^n$, *не являющаяся его внутренней точкой. Тогда существует такая гиперплоскость* $a_1x_1+\ldots+a_nx_n=\lambda$, *содержащая точку* V, *что* $a_1x_1+\ldots+a_nx_n \leq \lambda$ *для любой точки* $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathfrak{N}$. (Доказательство дано в задаче Т1.16.)

Гиперплоскость, о которой идет речь в теореме 1.4, называется *опорной* для множества $\mathfrak{N}$ в точке V.

Теоретические задачи

Т1.1. Доказать теорему 1.1.

$\triangleright$* Возьмем произвольную точку $M \in \mathfrak{M}$. Тогда

$$M=\lambda_1 A_1+\ldots+\lambda_k A_k,\ \ \lambda_i \geq 0,\ \ i=1,\ldots,k,\ \ \lambda_1+\ldots+\lambda_k=1.$$

Предположим вначале, что среди коэффициентов $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ найдется хотя бы один, например λ_1, не равный 0 и 1. Тогда

$$M=\lambda_1 A_1+(1-\lambda_1)B,$$

где $B=\dfrac{\lambda_2}{1-\lambda_1}A_2+\ldots+\dfrac{\lambda_k}{1-\lambda_1}A_k$.

Так как

$$\frac{\lambda_2}{1-\lambda_1}+\ldots+\frac{\lambda_k}{1-\lambda_1}=\frac{\lambda_2+\ldots+\lambda_k}{1-\lambda_1}=\frac{1-\lambda_1}{1-\lambda_1}=1,$$

то точка B есть выпуклая линейная комбинация точек из T, т.е. $B \in \mathfrak{M}$. Таким образом, точка M принадлежит отрезку, соединяющему две другие точки многогранника $\mathfrak{M}$ – точки A_1 и B. Поэтому M не может быть вершиной по определению.

Если среди коэффициентов $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ нет отличных от 0 и 1, то ввиду $\lambda_1+\ldots+\lambda_k=1$ только один из них, например λ_i, равен 1,

* Знак $\triangleright$ обозначает начало доказательства либо решения.

остальные – нули. Отсюда $M=\lambda_i A_i = A_i$. Это означает, что вершины многогранника $\mathfrak{M}$ могут находиться только среди точек порождающего множества T. Теорема доказана.

Т1.2. Доказать следующее утверждение: точка выпуклого множества $\mathfrak{I}$ не является его вершиной, если и только если она является внутренней точкой некоторого отрезка, принадлежащего $\mathfrak{I}$.

Указание. Воспользоваться определением вершины множества $\mathfrak{I}$.

Т1.3. Пусть многогранник $\mathfrak{M}$ порожден системой точек $T=\{A_1,\ldots,A_k\}$. Известно, что точка A_k есть выпуклая линейная комбинация точек $A_1,\ldots,A_{k-1}$. Доказать, что любая точка из $\mathfrak{M}$ есть выпуклая линейная комбинация точек $A_1,\ldots,A_{k-1}$.

$\triangleright$ Пусть M – произвольная точка многогранника $\mathfrak{M}$. Тогда

$$\begin{cases} M=\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i A_i,\ \lambda_1+\ldots+\lambda_k=1,\ \lambda_i\ge 0,\ i=1,\ldots,k, \\ A_k=\sum\limits_{i=1}^{k-1}\mu_i A_i,\ \mu_1+\ldots+\mu_{k-1}=1,\ \mu_i\ge 0,\ i=1,\ldots,k-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M=\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i A_i+\lambda_k\sum_{i=1}^{k-1}\mu_i A_i=\sum_{i=1}^{k-1}(\lambda_i+\lambda_k\mu_i)A_i,$$

причем

$$\sum_{i=1}^{k-1}(\lambda_i+\lambda_k\mu_i)=\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i+\lambda_k\sum_{i=1}^{k-1}\mu_i=\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i+\lambda_k=1.$$

Это означает, что M – выпуклая линейная комбинация точек $A_1,\ldots,A_{k-1}$.

Т1.4. Доказать теорему 1.2.

$\triangleright$ Воспользуемся индукцией по числу точек в системе T, порождающей многогранник $\mathfrak{M}$. Если T состоит из единственной точки A, то множество всех выпуклых линейных комбинаций этой точки состоит из одной точки A и, следовательно, $\mathfrak{M}$ состоит из одной точки A, которая и является его вершиной по определению. Теорема в этом случае доказана.

Предположим, что утверждение теоремы верно для всех многогранников, порожденных системами, содержащими менее k точек. Рассмотрим многогранник $\mathfrak{M}$, порожденный системой точек

$T=\{A_1,\ldots,A_k\}$. Если все точки из T — вершины в $\mathfrak{M}$, то теорема доказана.

Предположим теперь, что среди точек T есть по меньшей мере одна, например A_k, не являющаяся вершиной в $\mathfrak{M}$. Тогда A_k — внутренняя точка некоторого отрезка BC в $\mathfrak{M}$ (см. задачу Т1.2): $A_k=\alpha B+(1-\alpha)C$, $0<\alpha<1$, где $B=\lambda_1 A_1+\ldots+\lambda_k A_k$, $C=\mu_1 A_1+\ldots+\mu_k A_k$, $\lambda_i\geq 0$, $\mu_i\geq 0$, $i=1,\ldots,k$, $\lambda_1+\ldots+\lambda_k=\mu_1+\ldots+\mu_k=1$, $\lambda_k\neq 1$, $\mu_k\neq 1$. Отсюда

$$A_k=\alpha(\lambda_1 A_1+\ldots+\lambda_k A_k)+(1-\alpha)(\mu_1 A_1+\ldots+\mu_k A_k)=$$

$$=(\alpha\lambda_1+(1-\alpha)\mu_1)A_1+\ldots+(\alpha\lambda_k+(1-\alpha)\mu_k)A_k.$$

Так как $\alpha\lambda_k+(1-\alpha)\mu_k<\alpha+(1-\alpha)=1$, то $\beta=1-(\alpha\lambda_k+(1-\alpha)\mu_k)\neq 0$. Следовательно,

$$A_k=\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\alpha\lambda_i+(1-\alpha)\mu_i}{\beta}A_i,$$

причем

$$\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\alpha\lambda_i+(1-\alpha)\mu_i}{\beta}=\frac{\alpha(\lambda_1+\ldots+\lambda_{k-1})+(1-\alpha)(\mu_1+\ldots+\mu_{k-1})}{\beta}=$$

$$=\frac{\alpha(1-\lambda_k)+(1-\alpha)(1-\mu_k)}{\beta}=\frac{\beta}{\beta}=1.$$

Это означает, что точка A_k есть выпуклая линейная комбинация точек из $T'=\{A_1,\ldots,A_{k-1}\}$. Но тогда любая точка из $\mathfrak{M}$ есть выпуклая линейная комбинация точек из T' (см. задачу Т1.3), т.е. $\mathfrak{M}$ порождается системой точек T'. Остальное следует из индуктивного предположения.

Т1.5. Доказать утверждение 1.1.

$\triangleright$ Прежде всего докажем, что для любых двух векторов $\bar{a},\bar{b}\in\mathbb{R}^n$ верно соотношение $|\bar{a}+\bar{b}|\leq|\bar{a}|+|\bar{b}|$ (это неравенство с очевидностью распространяется на любую конечную сумму векторов). Итак,

$$|\bar{a}+\bar{b}|^2=(\bar{a}+\bar{b})^2=\bar{a}^2+2\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}^2\leq|\bar{a}^2|+2|\bar{a}\cdot\bar{b}|+|\bar{b}^2|=$$

$$=|\bar{a}|^2+2|\bar{a}\cdot\bar{b}|+|\bar{b}|^2\le|\bar{a}|^2+2|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|+|\bar{b}|^2=(|\bar{a}|+|\bar{b}|)^2,$$

причем последнее неравенство вытекает из неравенства $|\bar{a}\cdot\bar{b}|\le|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|$ (см. [11, гл. 31]). Обозначим через $O=(0;\ldots;0)$ нулевую точку в Af^n. Заметим, что $A=A-O=\overline{OA}$. Поэтому любую точку A из Af^n можно отождествить с вектором $\overline{OA}$. Рассмотрим произвольный многогранник $\mathfrak{M}$ с множеством вершин $S=\{B_1,\ldots,B_k\}$. Выберем в S вершину B_m такую, что длина вектора $\overline{OB_m}$ наибольшая. Рассмотрим произвольную точку C из $\mathfrak{M}$. Тогда

$$C=\lambda_1 B_1+\ldots+\lambda_k B_k,\ \ \lambda_i\ge0,\ \ i=1,\ldots,k,\ \ \sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1,$$

откуда $\overline{OC}=\lambda_1\overline{OB_1}+\ldots+\lambda_k\overline{OB_k}$. Следовательно,

$$|\overline{OC}|=|\lambda_1\overline{OB_1}+\ldots+\lambda_k\overline{OB_k}|\le\lambda_1|\overline{OB_1}|+\ldots+\lambda_k|\overline{OB_k}|\le$$

$$\le\lambda_1|\overline{OB_m}|+\ldots+\lambda_k|\overline{OB_m}|=(\lambda_1+\ldots+\lambda_k)|\overline{OB_m}|=|\overline{OB_m}|,$$

т.е. расстояние между точками O и C ограничено величиной $|\overline{OB_m}|$.

Итак, доказано, что любой многогранник является ограниченной многогранной областью.

Покажем теперь, что любая ограниченная многогранная область $\mathfrak{L}$ (порожденная системами точек T и векторов V) является многогранником. Выберем произвольную точку A из T и произвольный ненулевой вектор $\bar{p}$ из V. Тогда для любого $t\ge0$ имеем $A+t\bar{p}\in\mathfrak{L}$. Если i-я координата вектора $\bar{p}$ отлична от нуля, то всегда можно выбрать такое $t_1\ge0$, что модуль i-й координаты вектора $\overline{OA}+t_1\bar{p}$ будет больше любого заданного числа r, т.е. $|\overline{OA}+t_1\bar{p}|>r$. Последнее означает неограниченность множества $\mathfrak{L}$. Получено противоречие. Таким образом, система V может состоять только из нулевого вектора, и в этом случае $\mathfrak{L}$ – многогранник.

Т1.6. Доказать утверждение 1.2.

$\triangleright$ Пусть многогранная область $\mathfrak{L}$ порождена системами точек $T=\{A_1,\ldots,A_k\}$ и векторов $V=\{\overline{p}_1,\ldots,\overline{p}_r\}$. Возьмем две точки M и N в $\mathfrak{L}$ и покажем, что точка $\gamma M+(1-\gamma)N$ также принадлежит $\mathfrak{L}$ для любого $\gamma\in[0;1]$.

Поскольку точка M принадлежит $\mathfrak{L}$, то $M=M'+\overline{p}$, где M' – выпуклая линейная комбинация точек из T, а $\overline{p}$ – неотрицательная линейная комбинация векторов из V, т.е. $M'=x_1A_1+\ldots+x_kA_k$,

$x_i\geq 0,\ i=1,\ldots,k,\ \sum\limits_{i=1}^{k}x_i=1$, и $\overline{p}=\alpha_1\overline{p}_1+\ldots+\alpha_r\overline{p}_r,\ \alpha_i\geq 0,\ i=1,\ldots,r.$

Аналогично $N=N'+\overline{q}$, где $N'=y_1A_1+\ldots+y_kA_k,\ y_i\geq 0,\ i=1,\ldots,k,$

$\sum\limits_{i=1}^{k}y_i=1$, и $\overline{q}=\beta_1\overline{p}_1+\ldots+\beta_r\overline{p}_r,\ \beta_i\geq 0,\ i=1,\ldots,r.$

Получаем:

$$\gamma M+(1-\gamma)N=\gamma(M'+\overline{p})+(1-\gamma)(N'+\overline{q})=$$
$$=[\gamma M'+(1-\gamma)N']+[\gamma\overline{p}+(1-\gamma)\overline{q}]=$$
$$=[\gamma(x_1A_1+\ldots+x_kA_k)+(1-\gamma)(y_1A_1+\ldots+y_kA_k)]+$$
$$+[\gamma(\alpha_1\overline{p}_1+\ldots+\alpha_r\overline{p}_r)+(1-\gamma)(\beta_1\overline{p}_1+\ldots+\beta_r\overline{p}_r)]=$$
$$=[(\gamma x_1+(1-\gamma)y_1)A_1+\ldots+(\gamma x_k+(1-\gamma)y_k)A_k]+$$
$$+[(\gamma\alpha_1+(1-\gamma)\beta_1)\overline{p}_1+\ldots+(\gamma\alpha_r+(1-\gamma)\beta_r)\overline{p}_r].$$

Выражение в первых квадратных скобках является выпуклой линейной комбинацией точек из T:

$$\sum_{i=1}^{k}(\gamma x_i+(1-\gamma)y_i)=\gamma\sum_{i=1}^{k}x_i+(1-\gamma)\sum_{i=1}^{k}y_i=\gamma+(1-\gamma)=1,$$

а во вторых скобках – неотрицательной линейной комбинацией векторов из V. Следовательно, $\gamma M+(1-\gamma)N\in\mathfrak{L}$.

Т1.7. Доказать утверждение 1.2, используя теорему 1.3.

$\triangleright$ В силу теоремы 1.3 достаточно показать выпуклость произвольного полиэдра $\mathfrak{P}$, задаваемого системой линейных неравенств. Пусть

$$a_1x_1+\ldots+a_nx_n\geq b \tag{1.3}$$

есть любое из этих неравенств и пусть $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ – произвольные точки полиэдра $\mathfrak{P}$, а $\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta$ – произвольная точка отрезка, соединяющего α и β. Тогда

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\alpha_i\geq b,\\ \sum\limits_{i=1}^{n}a_i\beta_i\geq b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda a_i\alpha_i\geq\lambda b,\\ \sum\limits_{i=1}^{n}(1-\lambda)a_i\beta_i\geq(1-\lambda)b\end{cases}\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}a_i(\lambda\alpha_i+(1-\lambda)\beta_i)\geq b,$$

т.е. точка $\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta$ принадлежит полупространству, задаваемому неравенством (1.3). Ввиду произвольности выбора неравенства (1.3) в системе, задающей $\mathfrak{P}$, точка $\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta$ принадлежит $\mathfrak{P}$, что доказывает выпуклость этого полиэдра.

Т1.8. Доказать, что отрезок, соединяющий точки A, B из Af^n, совпадает с множеством точек вида $A+\alpha\overline{AB}$, где $0\leq\alpha\leq1$.

▷ Пусть C – произвольная точка отрезка, соединяющего точки A и B. Тогда $C=(1-\lambda)A+\lambda B$ для некоторого $\lambda\in[0;1]$. Следовательно, $C=A+\lambda(B-A)=A+\lambda\overline{AB}$.

Обратно, для любого $\lambda\in[0;1]$ имеем: $A+\lambda\overline{AB}=A+\lambda(B-A)=$ $=(1-\lambda)A+\lambda B$.

Т1.9. Найти все вершины следующих множеств двухмерного пространства Af^2: полукруга, прямой, полуплоскости, интервала на прямой.

Ответ. Множество вершин полукруга – это в точности граница полукруга, исключая внутренние точки его диаметра. Прямая, полуплоскость и интервал вершин не имеют.

Т1.10. Доказать, что гиперплоскость является полиэдром.

▷ Утверждение следует из равносильности уравнения $a_1x_1+\ldots+a_nx_n=b$ и системы неравенств

$$\begin{cases}a_1x_1+\ldots+a_nx_n\geq b,\\ -a_1x_1-\ldots-a_nx_n\geq -b.\end{cases}$$

Т1.11. Полиэдр в Af^n называется *однородным*, если он является пересечением конечного числа полупространств вида $a_1x_1+\ldots+a_nx_n\geq 0$. Доказать, что однородный полиэдр не имеет вершин, кроме, быть может, нулевой точки.

$\triangleright$ Пусть A – произвольная ненулевая точка однородного полиэдра $\mathfrak{I}$. Тогда $B=2A\in\mathfrak{I}$. Очевидно также, что $\mathfrak{I}$ содержит нулевую точку $O=(0;\ldots;0)$, причем $A=\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}O$. Значит, A – внутренняя точка отрезка BO, принадлежащего $\mathfrak{I}$, и потому не может быть вершиной в $\mathfrak{I}$.

Т1.12. Доказать, что однородный полиэдр $\mathfrak{I}\subseteq Af^n$, координаты всех точек которого неотрицательны, имеет единственную вершину и эта вершина – нулевая точка.

$\triangleright$ Предположим, что нулевая точка O является внутренней точкой некоторого отрезка, порожденного точками $A=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ и $B=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ полиэдра $\mathfrak{I}$. Тогда $O=\lambda A+(1-\lambda)B$, $0<\lambda<1$, т.е. $0=\lambda\alpha_i+(1-\lambda)\beta_i$ для любого $i=1,\ldots,n$. А так как $\alpha_i\geq 0$, $\beta_i\geq 0$, $\lambda>0$, $1-\lambda>0$, то эти равенства возможны только при $\alpha_i=\beta_i=0$, $i=1,\ldots,n$, т.е. A и B – нулевые точки. Получено противоречие. Тот факт, что $\mathfrak{I}$ не имеет других вершин, следует из задачи Т1.11.

Т1.13. *Расстоянием* $\rho(A,B)$ *между точками* $A=(a_1,\ldots,a_n)$ и $B=(b_1,\ldots,b_n)$ называется число

$$\rho(A,B)=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\ldots+(a_n-b_n)^2}.$$

Пусть $\mathfrak{N}\subseteq Af^n$ – замкнутое множество, $V\in Af^n$ – произвольная точка. Доказать, что в $\mathfrak{N}$ существует точка P, ближайшая к V, т.е. $\rho(P,V)\leq\rho(X,V)$ для каждой точки $X=(x_1,\ldots,x_n)$ из $\mathfrak{N}$.

$\triangleright$ Возьмем произвольную точку W из $\mathfrak{N}$, отличную от V, и обозначим через $B(V,\lambda)$ множество всех точек из Af^n, расстояние от которых до точки $V=(v_1,\ldots,v_n)$ не превосходит $\lambda=\rho(V,W)$ (такое множество называется *замкнутой* λ*-окрестностью точки* V). Тогда $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}\cap B(V,\lambda)$ – непустое ограниченное замкнутое множество, а функция $\rho^2(X,V)=(x_1-v_1)^2+\ldots+(x_n-v_n)^2$ непрерывна на этом множестве. В силу свойств непрерывных функций, заданных на ограниченных замкнутых множествах (см. [11, гл. 5]), функция $\rho^2(X,V)$ принимает наименьшее значение в некоторой точке P из $\mathfrak{M}$. Очевидно, что эта точка P – искомая.

T1.14. Условимся, что заданные своими координатами точки из Af^n, участвующие в матричных операциях, являются матрицами размера $1\times n$. Пусть $\mathfrak{N}\subseteq Af^n$ – замкнутое выпуклое множество, $V\in Af^n$, P – ближайшая к V точка множества $\mathfrak{N}$. Доказать, что для любой точки X из $\mathfrak{N}$ верно неравенство $(X-P)(V-P)^T\leq 0$.

$\triangleright$ Ввиду выпуклости множества $\mathfrak{N}$ точка $Z=\alpha X+(1-\alpha)P$ принадлежит $\mathfrak{N}$ при любом $\alpha\in[0;1]$. Пусть $P=(p_1,\ldots,p_n)$, $V=(v_1,\ldots,v_n)$, $X=(x_1,\ldots,x_n)$. Тогда

$$\rho^2(P,V)\leq\rho^2(Z,V)=\sum_{i=1}^{n}(z_i-v_i)^2=\alpha^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-p_i)^2+$$

$$+2\alpha\sum_{i=1}^{n}(x_i-p_i)(p_i-v_i)+\sum_{i=1}^{n}(p_i-v_i)^2=$$

$$=\alpha^2\rho^2(X,P)+2\alpha(X-P)(P-V)^T+\rho^2(P,V).$$

Следовательно, $\alpha^2\rho^2(X,P)+2\alpha(X-P)(P-V)^T\geq 0$ при любом $\alpha\in[0;1]$. Отсюда $\alpha\left(\alpha-\dfrac{2}{\rho^2(X,P)}(X-P)(V-P)^T\right)\geq 0$

для каждого $\alpha\in(0;1]$, что возможно только при $(X-P)(V-P)^T\leq 0$.

T1.15. Доказать теорему 1.4 при условии, что точка V не принадлежит множеству $\mathfrak{N}$.

$\triangleright$ Пусть P – ближайшая к V точка множества $\mathfrak{N}$ (такая точка существует, см. задачу T1.13). Положим: $A=V-P=(a_1,\ldots,a_n)$, $\lambda=AV^T=(V-P)V^T$. Так как $(V-P)(V-P)^T\geq 0$, то $(V-P)V^T\geq$ $\geq(V-P)P^T$. Так как для любой точки $X\in\mathfrak{N}$ имеем

$(V-P)(X-P)^T \le 0$ (см. задачу Т1.14), то $(V-P)X^T \le (V-P)P^T$. Доказано, что для любой точки $X=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathfrak{M}$ верно $a_1x_1+\ldots+a_nx_n=AX^T=(V-P)X^T \le (V-P)P^T \le (V-P)V^T=\lambda$.

Т1.16. Доказать теорему 1.4.

▷ Так как V не является внутренней точкой множества $\mathfrak{M}$, то в каждой ее ε_k-окрестности, где $\varepsilon_k=10^{-k}$, найдется точка V_k, не принадлежащая множеству $\mathfrak{M}$.

Воспользуемся утверждением задачи Т1.15: для каждого k существует гиперплоскость $A_kX^T=\lambda_k$, опорная для $\mathfrak{M}$ в точке V_k, т.е. $A_kV_k^T=\lambda_k$ и $A_kX^T\le\lambda_k$ для любой точки X из $\mathfrak{M}$. Очевидно, что опорной для $\mathfrak{M}$ в точке V_k будет также параллельная гиперплоскость $B_kX^T=\mu_k$, где $B_k=\dfrac{1}{|A_k|}A_k$, $\mu_k=\dfrac{\lambda_k}{|A_k|}$, $|A_k|^2$ – сумма квадратов координат точки A_k.

Последовательность точек $\{B_k\}$ ограничена, потому она содержит подпоследовательность $\{B_{k_i}\}$, сходящуюся к некоторой точке B (см. [11, гл. 3]). Таким образом, $\lim\limits_{i\to\infty}V_{k_i}=V$, $\lim\limits_{i\to\infty}B_{k_i}=B$, $\lim\limits_{i\to\infty}\mu_{k_i}=\lim\limits_{i\to\infty}B_{k_i}V_{k_i}{}^T=BV^T$. Отметим также, что ввиду $|B_k|=1$ предельная точка B подпоследовательности $\{B_{k_i}\}$ не может быть нулевой.

Положим $\mu=BV^T$ и учтем, что $B_{k_i}X^T\le\mu_{k_i}$ для любой точки $X\in\mathfrak{M}$. Следовательно, по теореме о предельном переходе в неравенствах (см. [11, гл. 2]) $BX^T=\lim\limits_{i\to\infty}B_{k_i}X^T\le\lim\limits_{i\to\infty}\mu_{k_i}=\mu$. Доказано, что гиперплоскость $BX^T=\mu$ – искомая.

Т1.17. Доказать, что пересечение конечного числа выпуклых множеств также является выпуклым.

Указание. Если некоторый отрезок принадлежит каждому из данных множеств, то он принадлежит и их пересечению.

2

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПЛАНЫ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Изменим вид полиэдра (1.1), добавив две неотрицательные переменные x_3, x_4 и превратив основные неравенства в равенства:

$$\begin{cases} -x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+x_2+x_4=3, \\ x_1\geq 0, x_2\geq 0, x_3\geq 0, x_4\geq 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Полиэдр (2.1) содержится в четырехмерном точечном пространстве и потому не может быть изображен на плоскости подобно многограннику, изображенному на рис. 1.4. Множества вершин полиэдров-многогранников (1.1) и (2.1) связаны следующим образом (см. задачи Т2.8 и Т2.9): если $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ – вершина полиэдра (2.1), то (α_1,α_2) – вершина полиэдра (1.1), и для каждой вершины (β_1,β_2) в (1.1) можно указать вершину в (2.1) с двумя первыми координатами β_1 и β_2.

Условимся в дальнейшем n-мерные точки, участвующие в матричных операциях, считать матрицами размера $1\times n$. Для произвольной матрицы (точки) B запись $B\geq 0$ будет означать, что все элементы (координаты) в B неотрицательны.

Полиэдр (2.1) можно теперь записать в матричном виде:

$$\begin{cases} AX^T=C, \\ X\geq 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

где $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $X=(x_1,x_2,x_3,x_4)$; $C=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Переменные x_3, x_4 обладают тем свойством, что столбцы матрицы A, им соответствующие, содержат ровно по одному ненулевому элементу и эти элементы находятся в разных строках. Другими словами, переменные x_3, x_4 образуют базис переменных системы линейных уравнений $AX^T=C$, а остальные переменные (x_1 и x_2) являются свободными. Значения свободных переменных однозначно определяют значения базисных. Например, при $x_1=x_2=1$ имеем: $x_3=1$, $x_4=1$. Однако среди бесконечного множества решений системы $AX^T=C$ можно выделить одно, называемое базисным, которое однозначно получается при нулевых значениях свободных переменных. В данном случае – это решение $(0;\ 0;\ 1;\ 3)$.

Система линейных уравнений может иметь несколько базисных решений, поскольку ее можно преобразовать (например, с помощью алгоритма Гаусса) к эквивалентному виду, но уже с другим базисом переменных. Оказывается, множество базисных решений системы $AX^T=C$ из (2.2) с неотрицательными координатами совпадает с множеством вершин полиэдра (2.2) (это утверждение в общем случае сформулировано в теореме 2.1). Убедимся в этом непосредственно. Поскольку ранг расширенной матрицы $(A\ C)$ равен 2 и, следовательно, любой базис состоит ровно из двух переменных, то попробуем перебрать все базисные решения, поочередно приравнивая нулю различные пары переменных:

1) $x_1=x_2=0 \Rightarrow x_3=1, x_4=3 \Rightarrow (0;\ 0;\ 1;\ 3)$ – базисное решение;

2) $x_1=x_3=0 \Rightarrow x_2=1, x_4=2 \Rightarrow (0;\ 1;\ 0;\ 2)$ – базисное решение;

3) $x_1=x_4=0 \Rightarrow x_2=3, x_3=-2 \Rightarrow (0;\ 3;-2;\ 0)$ – базисное решение;

4) $x_2=x_3=0 \Rightarrow x_1=-1, x_4=4 \Rightarrow (-1;\ 0;\ 0;\ 4)$ – базисное решение;

5) $x_2=x_4=0 \Rightarrow x_1=3, x_3=4 \Rightarrow (3;0;4;0)$ – базисное решение;

6) $x_3=x_4=0 \Rightarrow \begin{cases} -x_1+x_2=1, \\ x_1+x_2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=1+x_1, \\ x_1+1+x_1=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=1, \\ x_2=2 \end{cases} \Rightarrow (1;2;0;0)$ – базисное решение.

Среди найденных базисных решений только в четырех, а именно: $(0;0;1;3)$, $(0;1;0;2)$, $(3;0;4;0)$, $(1;2;0;0)$, все координаты неотрицательны. Следовательно, они являются вершинами полиэдра (2.2). Им соответствуют четыре вершины полиэдра (1.1): $A=(0;0)$, $B=(0;1)$, $D=(3;0)$, $C=(1;2)$, что согласуется с рис. 1.4.

Рассмотрим теперь полиэдр

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = c_m, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, \end{cases}$$

который можно записать в матричном виде:

$$\begin{cases} AX^T = C, \\ X \geq 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

где $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$; $X=(x_1,\ldots,x_n)$; $C^T=(c_1,\ldots,c_m)$.

Вспомним теперь точное определение базисного решения системы линейных уравнений (см. [11, гл. 34]). Предположим, что матрица A системы $AX^T=C$ из (2.3) имеет ранг r, а ее множество решений непусто. Тогда существует равносильная (т.е. с тем же множеством решений) система вида

$$\begin{cases} x_{i_1}=b_{10}-\left(b_{11}x_{j_1}+b_{12}x_{j_2}+\ldots+b_{1k}x_{j_k}\right), \\ x_{i_2}=b_{20}-\left(b_{21}x_{j_1}+b_{22}x_{j_2}+\ldots+b_{2k}x_{j_k}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{i_r}=b_{r0}-\left(b_{r1}x_{j_1}+b_{r2}x_{j_2}+\ldots+b_{rk}x_{j_k}\right), \end{cases} \qquad (2.4)$$

где множество переменных $\{x_1,\ldots,x_n\}$ разбито на два непересекающихся подмножества $\{x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_r}\}$ и $\{x_{j_1},x_{j_2},\ldots,x_{j_k}\}$, называемых соответственно *базисом переменных* и *набором свободных переменных*. Решение $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ системы $AX^T=C$ (и любой равносильной ей системы), в котором $\alpha_{i_1}=\beta_{10},\alpha_{i_2}=\beta_{20},\ldots,\alpha_{i_r}=\beta_{r0}$, $\alpha_{j_1}=\alpha_{j_2}=\ldots=\alpha_{j_k}=0$, называется *базисным*, а его координаты $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_r}$ – *базисными*. Любая система вида (2.4), содержащая базис переменных, может быть получена из системы $AX^T=C$ с непустым множеством решений методом Гаусса, т.е. посредством элементарных преобразований строк расширенной матрицы $(A\ C)$ (этот факт будет следовать из доказательства теоремы 2.1). Так, в системе уравнений из (2.1) очевиден базис переменных $\{x_3,x_4\}$. Попробуем теперь с помощью эквивалентных преобразований строк расширенной матрицы $\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$ перейти к равносильной системе, содержащей базис переменных $\{x_1,x_2\}$ (параллельно отметим, что первые два столбца этой матрицы линейно независимы). Прибавим ко второй строке первую, а затем к первой строке прибавим вторую, умноженную на $-1/2$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Умножив первую строку на -1, а вторую – на $1/2$, получим:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1=1-\left(-\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4\right), \\ x_2=2-\left(\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4\right). \end{cases}$$

Из определения базисного решения α системы $AX^T=C$ следует, что если β – произвольное решение этой системы и номер каждой ненулевой координаты в β является номером базисной координаты в α, то $\alpha=\beta$. Поэтому очевиден алгоритм генерации всех базисных решений: перебирая все возможные подмножества $\{x_{j_1},\ldots,x_{j_k}\}$ из $k=n-r$ переменных, решаем систему, полученную из $AX^T=C$ при нулевых значениях переменных $x_{j_1},\ldots,x_{j_k}$; если ее решение существует и единственно, то оно как раз и совпадает с базисными координатами очередного базисного решения. Именно таким способом выше были найдены все базисные решения системы (2.2).

Базисные решения удобно выражать в матричном виде. Рассмотрим, например, базисное решение $\alpha=(0;3;-2;0)$ системы (2.2). Введем следующие обозначения: $B=\{2;3\}$ – номера базисных координат, $N=\{1;4\}$ – номера остальных координат, $X_B=(x_2,x_3)$, $X_N=(x_1,x_4)$.

Пусть $A_B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_N=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ – подматрицы матрицы A, составленные из столбцов с номерами B и N соответственно. Систему $AX^T=C$ теперь можно записать так:

$$A_BX_B^T+A_NX_N^T=C\text{, или } A_BX_B^T=C-A_NX_N^T.$$

Поскольку A_B имеет обратную матрицу $A_B^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, то система $AX^T=C$ при нулевых значениях переменных из

X_N ($x_1 = x_4 = 0$) имеет единственное (и потому базисное) решение $\alpha_B = \left(A_B^{-1} C\right)^T = (3; -2)$ (см. [11, гл. 35]), что соответствует координатам α_2, α_3 в $\alpha = (0; 3; -2; 0)$.

В общем случае системы $AX^T = C$ из (2.3) предположим, что ранг r матрицы A равен числу ее строк m. Положим: $B = \{i_1, \ldots, i_m\}$, $N = \{j_1, \ldots, j_k\}$, $i_1 < \ldots < i_m$, $j_1 < \ldots < j_k$, $X_B = \left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}\right)$, $X_N = \left(x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}\right)$, A_B и A_N – подматрицы матрицы A, составленные из столбцов с номерами B и N соответственно. Систему $AX^T = C$ можно теперь записать в виде $A_B X_B^T = C - A_N X_N^T$. Так как A_B – квадратная матрица, то при нулевых значениях переменных X_N система $AX^T = C$ имеет единственное (и потому базисное) решение, если и только если существует обратная матрица A_B^{-1} (см [11, гл. 35]). При этом в случае существования A_B^{-1}

$$X_B^T = A_B^{-1} C - A_B^{-1} A_N X_N^T, \tag{2.5}$$

а соответствующее базисное решение имеет вид $\alpha_B = \left(A_B^{-1} C\right)^T$.

Поскольку существует только конечное число различных разбиений вида $B \cup N$ множества $\{1, \ldots, n\}$ (их число $C_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}$), то любая система линейных уравнений может иметь только конечное число базисных решений.

Рассмотрим теперь следующую задачу. Некий банк может направить часть своих средств (в размере x_1 млн ден. ед.) на покупку акций с доходностью 10%, а другую часть средств (в размере x_2 млн ден. ед.) – на беспроцентное кредитование важной отрасли народного хозяйства. При этом общая сумма выделяемых средств не должна превышать 3 млн ден. ед., т.е. $x_1+x_2\leq 3$, а беспроцентное кредитование не должно более чем на 1 млн ден. ед. превысить средства, идущие на покупку акций, т.е. $x_2\leq x_1+1$. Таким образом, должны выполняться ограничения (1.1). Кроме того, требуется так распланировать размещение денежных средств, т.е. определить x_1 и x_2, чтобы максимизировать прибыль, равную $0{,}1x_1$ млн ден. ед.

При такой постановке задачи точки полиэдра (1.1) называют планами, функцию $f(x_1,x_2)=0{,}1x_1$ – целевой функцией, а точки, в которых целевая функция достигает максимального значения, – оптимальными планами. Эту задачу можно записать так:

$$\begin{gathered} f(x_1,x_2)=0{,}1x_1\to\max \\ \text{на множестве}\, X\subseteq Af^2\, \text{планов}(1.1). \end{gathered} \tag{2.6}$$

Поскольку целевая функция f линейна, а множество планов X является полиэдром, то (2.6) называется задачей линейного программирования. Решим ее графически. Для любого фиксированного значения f_0 функции f уравнение $f_0=0{,}1x_1$ определяет прямую на координатной плоскости x_1Ox_2. Так, на рис. 2.1 изображены множество планов и прямая $0{,}25=0{,}1x_1$. Любая прямая вида $f_1=0{,}1x_1$ параллельна прямой $f_0=0{,}1x_1$. Поэтому решение задачи (2.6) сводится к нахождению прямой

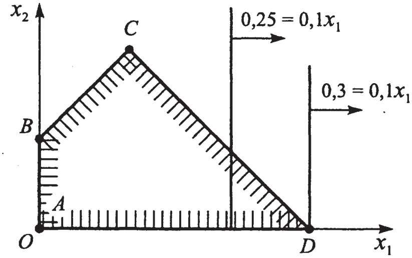

Рис. 2.1. Графическое решение задачи (2.6)

$f_1=0{,}1x_1$ с максимально возможным значением f_1, которая к тому же была бы параллельна прямой $f_0=0{,}1x_1$ и пересекала множество планов. Очевидно, что прямая $0{,}3=0{,}1x_1$ отвечает этим требованиям. Она пересекает множество планов X в единственной точке D. Поэтому вершина D – единственный оптимальный план задачи (2.6).

Оказывается, среди оптимальных планов любой задачи линейного программирования обязательно присутствует вершина ее полиэдра планов (см. теорему 2.2).

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования:

$$f(x_1,x_2)=4x_1+8x_2 \quad \text{на множестве } X\subseteq Af^2 \text{ планов (1.2).} \tag{2.7}$$

На рис. 2.2 изображены множество планов X и прямая $0=4x_1+8x_2$. Если решать задачу (2.7) на минимум, то необходимо найти прямую $f_1=4x_1+8x_2$ с минимально возможным значением f_1, параллельную прямой $0=4x_1+8x_2$ и пересекающую множество планов X. Очевидно, что искомая прямая проходит через вершину $C=(3;8)$, и f_1 в этом случае равно 76. Таким образом, план (3; 8) – оптимальный. При этом, как видно

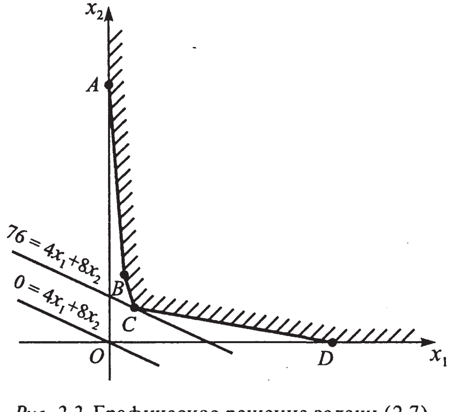

Рис. 2.2. Графическое решение задачи (2.7)

из рис. 2.2, любая прямая $f_1=4x_1+8x_2$, для которой f_1 превосходит 76, будет пересекать множество планов X. Поэтому задача (2.7) не имеет оптимальных планов, если решать ее на максимум.

Перейдем к общему случаю. Сформулируем следующую *общую задачу условной оптимизации* (см. также [11, гл. 5]). Пусть заданы множество $X \subseteq Af^n$ и функция $f(x_1,\ldots,x_n)$, определенная в каждой точке этого множества. Функция f называется *целевой функцией*, а точки множества X – *планами*. Задача условной оптимизации заключается в нахождении такого плана $M^* \in X$, для которого значение $f(M^*)$ является наименьшим или наибольшим (в зависимости от того, решается задача на минимум или на максимум) среди всех значений функции f на множестве планов X. План M^* называется *оптимальным*, а $f(M^*)$ – *оптимальным значением* функции f на множестве X. Эта задача записывается так:

$$
\begin{gathered}
f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \to \max \text{ или } \min \\
\text{на множестве планов } X \subseteq Af^n.
\end{gathered} \tag{2.8}
$$

В частном случае, когда f – линейная функция, а множество планов X – полиэдр, задача (2.8) называется *задачей линейного программирования* (ЛП).

Существуют различные типы задач ЛП, эквивалентные в том смысле, что несложными равносильными преобразованиями можно обеспечить переход от одного типа к другому (см., например, задачу Т2.13). С практической точки зрения различия между типами задач ЛП не имеют принципиального значения благодаря эффективным компьютерным программам для их решения. Однако для теоретических исследований удобно использовать следующую задачу ЛП, относящуюся к *каноническому типу*:

$$
\begin{gathered}
f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)=d_1x_1+\ldots+d_nx_n=DX^T \to \max \\
\text{на множестве планов (2.3),}
\end{gathered} \tag{2.9}
$$

где $D=(d_1,\ldots,d_n)$.

По аналогии с формулой (2.5) можно представить в матричном виде и целевую функцию $f(x)$, выразив ее только через свободные переменные:

$$f(x)=D_B X_B^T+D_N X_N^T=D_B\left(A_B^{-1}C-A_B^{-1}A_N X_N^T\right)+$$
$$+D_N X_N^T=D_B A_B^{-1}C+\left(D_N-D_B A_B^{-1}A_N\right)X_N^T.$$

Таким образом,

$$f(x)=DX^T=\Pi C+(D_N-\Pi A_N)X_N^T, \tag{2.10}$$

где $\Pi=D_B A_B^{-1}$.

Лемма 2.1. *Пусть полиэдр планов задачи (2.9) неоднородный (см. задачу T1.11),* α *— его произвольная точка. Тогда* α *является вершиной полиэдра планов этой задачи, если и только если столбцы матрицы A, соответствующие положительным координатам плана* α*, линейно независимы.* (Доказательство дано в задаче T2.1.)

Очевидно, что если полиэдр является пересечением гиперплоскостей, как, например, множество планов задачи (2.9), то его однородность эквивалентна наличию в нем нулевой точки. Поэтому лемма 2.1 и задача T1.12 приводят к нижеследующему утверждению.

Лемма 2.2. *Пусть* α *— план задачи (2.9). Тогда* α *является вершиной полиэдра планов, если и только если столбцы матрицы A, соответствующие положительным координатам в* α*, линейно независимы либо* α *— нулевая точка.*

Очевидно, что любое решение системы $AX^T=C$ из (2.3) с неотрицательными координатами является планом задачи (2.9). Поэтому базисное решение системы $AX^T=C$ с неотрицательными координатами имеет естественное название *базисного плана* задачи ЛП (2.9).

Теорема 2.1. *План задачи (2.9) является базисным, если и только если он является вершиной ее полиэдра планов.* (Доказательство дано в задаче T2.3.)

Таким образом, базисный план задачи (2.9) и вершина ее множества планов – эквивалентные понятия. Так, среди всех ранее найденных базисных решений системы $AX^T = C$ из (2.2) ровно четыре являются базисными планами задачи ЛП с множеством планов (2.2). Согласно теореме 2.1 эти планы, и только они, являются вершинами полиэдра (2.2).

Следствие 2.1. *Множество вершин полиэдра планов задачи (2.9) конечно.*

Данное утверждение прямо следует из теоремы 2.1 и конечности числа базисных решений системы линейных уравнений.

Нижеследующая теорема утверждает, что среди оптимальных планов всегда встретится базисный.

Теорема 2.2. *Если задача (2.9) имеет оптимальный план, то она имеет и оптимальный базисный план.* (Доказательство дано в задаче Т2.5.)

Следствие 2.2. *Если полиэдр планов задачи (2.9) – многогранник, то он имеет вершину, являющуюся оптимальным планом этой задачи.* (Доказательство дано в задаче Т2.6.)

Далеко не в каждой задаче ЛП можно сразу указать базисный план. Однако в следующей задаче базисный план очевиден:

$$h(x_1,\ldots,x_n,z_1,\ldots,z_m) = -(z_1+\ldots+z_m) \to \max$$

$$\text{на множестве планов} \qquad (2.11)$$

$$\begin{cases} AX^T + EZ^T = C, \\ X \geq 0, Z \geq 0, \end{cases}$$

где A, X, C – такие же матрицы, как и в задаче (2.9); $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица порядка m; $Z = (z_1,\ldots,z_m)$.

Будем считать (без потери общности), что $C \geq 0$ (этого можно добиться предварительным умножением соответствующих уравнений системы $AX^T = C$ на -1). Очевиден базисный план $(0,\ldots,0,\ c_1,\ldots,c_m)$ задачи (2.11), так как здесь очевиден базис переменных $\{z_1,\ldots,z_m\}$. Задача (2.11) важна тем, что с помощью ее оптимального базисного плана можно легко определить базисный план исходной задачи (2.9). Об этом – следующее утверждение.

Следствие 2.3. *Пусть* $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_n,\gamma_1,\ldots,\gamma_m)$ *– оптимальный базисный план задачи (2.11). Тогда* $h(\beta)\le 0$, *причем при* $h(\beta)<0$ *задача (2.9) вообще не имеет планов, а при* $h(\beta)=0$ *точка* $\alpha=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ *является ее базисным планом и* $\gamma_1=\ldots=\gamma_m=0$. (Доказательство дано в задаче Т2.7.)

Важная алгоритмическая задача, как мы увидим в гл. 8 и 13, – выявление условий, при которых все вершины полиэдра планов целочисленны, т.е. имеют только целые координаты. Такие полиэдры называются *целочисленными*. В частности, если целочисленный полиэдр планов задачи (2.9) является многогранником, то в силу следствия 2.2 эта задача имеет целочисленный оптимальный план. Естественно, целочисленность полиэдра (2.3) зависит от структуры матрицы A.

Теорема 2.3. *Пусть в (2.3) матрица A целочисленна, а ее ранг равен числу ее строк m. Тогда следующие три утверждения эквивалентны:*

1) *полиэдр планов (2.3) целочисленный для любой целочисленной матрицы свободных членов C;*

2) *для каждой обратимой порядка m квадратной подматрицы* A_B *матрицы A обратная матрица* A_B^{-1} *целочисленна;*

3) *определитель каждой обратимой порядка m квадратной подматрицы* A_B *матрицы A равен либо* 1, *либо* -1.

(Доказательство дано в задаче Т2.18.)

Теоретические задачи

Т2.1. Доказать лемму 2.1.

$\triangleright$ Иногда будем использовать и векторную запись задачи (2.9):

$$f(x_1,\ldots,x_n)=d_1x_1+\ldots+d_nx_n\to\max$$

$$\text{на множестве планов} \qquad (2.12)$$

$$\begin{cases} x_1\overline{b}_1+\ldots+x_n\overline{b}_n=\overline{c}, \\ x_1\ge 0,\ldots,x_n\ge 0, \end{cases}$$