А.А. Черняк, *д.ф.-м.н., профессор кафедры математики и вычислительной техники Международного института трудовых и социальных отношений,*
Ю.А. Доманова, *старший преподаватель кафедры математики и вычислительной техники Международного института трудовых и социальных отношений,*
Т.Н. Ранько, *студентка 3-го курса факультета международных экономических отношений и международного права Международного института трудовых и социальных отношений*

Синтез классической и компьютерной математики в обучении

Для эффективного обучения основам высшей математики необходимо обеспечить студента учебным пособием, в котором традиционные принципы преподавания органично сочетались бы с новейшими компьютерными технологиями. Тезисно под этим мы понимаем следующее.

1. *Содержание теоретического материала учебника должно соответствовать государственным образовательным стандартам, а его структура должна быть ориентирована на использование пакетов компьютерной математики*. Благодаря такой структуре отпадает необходимость в изложении громоздких методов и приемов интегрирования, дифференцирования, решения дифференциальных уравнений, обращения матриц и т.д. – подобные процедуры можно «доверить» компьютеру. Тем самым разгружается содержательная часть книги, а внимание студента акцентируется на логике понятий и методов.

2. *Учебник должен предполагать многоуровневое постижение основ высшей математики*, при котором варьируется степень подробности и глубины изучения предмета. Каждая глава должна сопровождаться практическим материалом, также дифференцированным по уровням. Творческий уровень должен быть представлен теоретическими задачами, которые, с одной стороны, позволяют дополнить теорию, а с другой – указать ее «тонкие» моменты. Следующий уровень – практические задачи. Эти задачи должны быть доступны среднему студенту и пред-

назначены для приобретения практических навыков в освоении алгоритмов и методов, доступных для ручного счета и обработки. Задачи третьего уровня должны быть компьютерными, ориентированными на использование пакетов компьютерной математики и недоступные для ручной обработки. Каждый блок таких задач должен содержать однотипные примеры, сопровождаемые алгоритмами решения с помощью операторов и функций пакета компьютерной математики.

3. Что касается выбора компьютерного пакета для учебного пособия по математике, то MathCAD выгодно отличается от других пакетов возможностью свободной компоновки рабочего листа и относительной легкостью изучения. Так же, как с карандашом в руке решается задача на листе бумаги, можно оформить и соответствующий MathCAD-документ. Если некоторое время не возникает необходимости работать с MathCAD, то впоследствии навыки пользования пакетом легко восстанавливаются (тогда как в других пакетах компьютерной математики используется очень сложный синтаксис, который быстро забывается, если не работать с этим пакетом постоянно). Кроме того, MathCAD – это универсальная, а не специализированная математическая среда.

Перечисленные принципы реализованы в книгах [1-2], допущенных Министерством образования Республики Беларусь в качестве учебных пособий для студентов инженерно-экономических специальностей высших учебных заведений.

Какие же преимущества дает применение компьютерных пакетов в преподавании общего курса высшей математики? Продемонстрируем основные моменты, хотя такое разграничение достаточно условно:

1. Существует класс задач, в которых визуализация некоторых этапов решения существенно упрощает его и способствует более эффективному усвоению материала (построение графиков при изучении непрерывных функций, нахождение суммы ряда и т.д.), причем компьютерные задачи могут быть и комплексными, т.е. требуется провести некоторые этапы решения «вручную», а наиболее трудоемкие – на компьютере.

Задача. Числовая последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно $a_1=1$, $a_2=1$, $a_{n+2} = \dfrac{a_n \cdot a_{n+1}}{a_n + a_{n+1}}$. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если ряд сходится, то с помощью MathCAD вычислить приближенно его сумму с точностью 10^{-7}; если же ряд расходится, то с помощью MathCAD найти наименьшее k, при котором его k-я частичная сумма превзойдет 10^7.

Решение этой задачи разбивается на два этапа: 1) исследование сходимости ряда и 2) нахождение суммы ряда с заданной точностью. Продемонстрируем алгоритм решения второго этапа с помощью MathCAD.

$$S := \left| \begin{array}{l} a_1 \leftarrow 1 \\ a_2 \leftarrow 1 \\ S_1 \leftarrow 1 \\ S_2 \leftarrow a_1 + a_2 \\ \text{for } n \in 1..100 \\ \quad \left| \begin{array}{l} a_{n+2} \leftarrow \dfrac{a_{n+1} \cdot a_n}{a_n + a_{n+1}} \\ S_{n+2} \leftarrow S_{n+1} + a_{n+2} \\ \text{break if } 3 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} < 10^{-7} \end{array} \right. \\ S \end{array} \right.$$

$$\text{rows}(S) = 47$$

$$S_{\text{rows}(S)-1} = 3.359885665$$

2. Решение некоторых задач «вручную» достаточно трудоемкий, а иногда и практически невыполнимый процесс. Обычно это задачи с жестким алгоритмом решения, где основную познавательную ценность представляет сам алгоритм, а не процесс решения, который одинаков для всех задач данного класса. Такие работы можно быстро и эффективно выполнить на компьютере (нахождение интервалов монотонности и т.д.).

Задача. Даны две скрещивающиеся прямые, соответственно проходящие через точки A и B параллельно векторам $\bar{p}$ и $\bar{s}$. *Найти*: уравнение прямой, содержащей их общий перпендикуляр; уравнения плоскостей, содержащих общий перпендикуляр и одну из данных прямых. Построить трехмерные графики этих плоскостей, а также данных прямых и их общего перпендикуляра. A=(30, 10, 20), B=(0, 2, 0), $\bar{p}$=(1, -1, 2), $\bar{s}$=(-1, 3, 3).

Алгоритм решения задачи с помощью MathCAD следующий. Задать скрещивающиеся прямые h1(t) и h2(t):

$$\text{ORIGIN:=1} \qquad h1(t) := t\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}30\\10\\20\end{pmatrix} \qquad h2(t) := t\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$$

С помощью функции minerr найти на этих прямых точки $h1(v_1)$ и $h2(v_2)$, расстояние между которыми наименьшее. Найти это расстояние.

t1:=0 t2:=0 Given |h1(t1) - h2(t2)|=0 v:=minerr(t1, t2)

$$v = \begin{pmatrix}-9.727\\1.818\end{pmatrix} \qquad h1(v_1) = \begin{pmatrix}20.273\\19.727\\0.545\end{pmatrix} \qquad h2(v_2) = \begin{pmatrix}-1.818\\7.455\\5.455\end{pmatrix}$$

$|h1(v_1) - h2(v_2)|=25.743$

Определить прямую h3(t), содержащую общий перпендикуляр двух данных скрещивающихся прямых:

$h3(t):=(h2(v_2) - h1(v_1)) \cdot t + h1(v_1)$

Задать плоскости, содержащие общий перпендикуляр и одну из скрещивающихся прямых:

$$pl1\,(r1,r2) := h1\,(v_1) + r1\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + r2\cdot(h2\,(v_2) - h1\,(v_1))$$

$$pl2\,(r1,r2) := h2\,(v_2) + r1\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\3\end{pmatrix} + r2\cdot(h1\,(v_1) - h2\,(v_2))$$

Построить трехмерные графики прямых h1(t), h2(t), их общего перпендикуляра и плоскостей pl1(r1, r2), pl2(r1, r2).

r:=30 H1:=CreateSpace(h1, v_1 - 5, v_1 + 5, r)

H2:=CreateSpace(h2, v_2 - 5, v_2 + 5, r)

H3:=CreateSpace(h3, 0, 1, r + 20)

Pl1:=CreateMesh(pl1, -5, 5, 0, 1, r, r)
Pl2:=CreateMesh(pl2, -5, 5, 0, 1, r, r)

3. Применение компьютерного пакета позволяет лучше усвоить некоторые основные понятия (производная, определенный интеграл), представление о которых при обычном изображении на бумаге (или доске) не столь наглядно, как при использовании анимационных средств MathCAD. Например, решение следующей задачи помогает наиболее эффективно усвоить понятие определенного интеграла и сумм Дарбу, т.к. благодаря использованию анимации можно наблюдать сам процесс «сближения» верхней и нижней сумм Дарбу с ростом числа промежутков разбиения.

Для функции f(x) (функция монотонно возрастает), определенной на отрезке [a; b], вычислить суммы Дарбу и проиллюстрировать их геометрический смысл с помощью графических и анимационных средств MathCAD; дать наглядное изображение того, как меняются суммы Дарбу относительно интеграла $\int_a^b f(x)dx$. Предполагается, что для каждого n=2, 3, ..., N суммы Дарбу должны соответствовать разбиению $T=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ отрезка [a; b], генерируемому встроенной функцией runif.

Приведем общий алгоритм решения этих задач с помощью MathCAD.

Ввести исходные данные: функцию f(x), отрезок [a; b], число N генерируемых разбиений, предусмотрев при этом параметр FRAME для анимации графиков: $N:=FRAME\cdot 10+K$. Задать функции для вычисления сумм Дарбу:

$$ST(x) := \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) \qquad st(x) := \sum_{i=1}^{N} f(x_{i-1})\cdot(x_i - x_{i-1})$$

Сгенерировать разбиение отрезка [a; b]:

T:=runif(N, a, b) T:=csort(T, 0) x_0:=a x_N:=b i:=1..N-1 $x_i:=T_{i-1}$

Задать кусочно элементарные функции S(y), s(y) для получения геометрической иллюстрации сумм Дарбу (с учетом монотонности функции f(x) на отрезке [a; b]):

s(y):= for $i \in 1..N$ $\quad f(x_{i-1})$ if $x_{i-1} \le y \le x_i$

$S(y) := \text{ for } i \in 1..N \qquad f(x_i) \text{ if } x_{i-1} \le y \le x_i$

Построить графики функций S(y), s(y), f(y) и анимировать изменения верхней и нижней сумм Дарбу относительно интеграла $\int_a^b f(x)dx$. Например, это можно сделать так:

$SI(y) := \text{if } (0 \le y \le 1,\ ST(x),\ 0) \quad si(y) := \text{if } (0 \le y \le 1,\ st(x),\ 0)$

$$int(y) := if\left(0 \le y \le 1, \int_a^b f(x)dx, 0\right)$$

Анимировать графики.

4. Работа с компьютерным пакетом способствует усвоению принципов алгоритмизации и программирования, т.к. при работе с пакетом для решения задачи необходимо разбить все выполняемые действия на какие-то этапы, т.е. самостоятельно сформулировать алгоритм решения той или иной задачи и записать его, испрользуя синтаксис MathCAD. Например, вычислить приближенно с помощью MathCAD сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{n}$ с точностью 10^{-4}. Вычислить также суммы первых 10^4 положительных и первых 10^4 отрицательных членов этого ряда.

Алгоритм решения задачи с помощью MathCAD следующий. Вычислить сумму ряда с точностью 10^{-4}:

$$a(n) := \frac{(-1)^n \cdot \ln(n)}{n}$$

$$S := \begin{array}{|l} n \leftarrow 1 \\ S \leftarrow 0 \\ \text{while } |a(n+1)| > 10^{-4} \\ \quad \begin{array}{|l} S \leftarrow S + a(n) \\ n \leftarrow n + 1 \end{array} \\ S \leftarrow S + a(n) \end{array} \qquad S = 0.1598189$$

Вычислить суммы Sp и Sn соответственно первых 10^4 положительных и отрицательных членов исходного ряда:

$$Sp := \left| \begin{array}{l} S \leftarrow 0 \\ \text{for } n \in 1..10000 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{continue if } a(n) < 0 \\ S \leftarrow S + a(n) \end{array} \right. \\ S \end{array} \right. \qquad Sn := \left| \begin{array}{l} S \leftarrow 0 \\ \text{for } n \in 1..10000 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{continue if } a(n) > 0 \\ S \leftarrow S + a(n) \end{array} \right. \\ S \end{array} \right.$$

Sp=21.25157947   Sn=-21.09125007   Sp+Sn-S=0.0005105

5. Применение пакета позволяет решать некоторые задачи, вводя параметры, и затем анализировать поведение модели в зависимости от значения некоторого параметра.

Найти суммы рядов при указанных значениях параметров i и k. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{r^{n \cdot i}}$, k=0, 1, 2, i=1, 2, 3. Алгоритм решения с помощью MathCAD следующий:

$$f(r) := \left| \begin{array}{l} \text{for } k \in 0..2 \\ \quad \text{for } i \in 1..3 \\ \qquad a_{k,i-1} \leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{r^{n \cdot i}} \\ a \end{array} \right. \qquad f(r) \text{ substitute}, r = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{7} \\ 2 & \frac{4}{9} & \frac{8}{49} \\ 6 & \frac{20}{27} & \frac{72}{343} \end{pmatrix}$$

$$f(r) \text{ expand} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{(-1+r)} & \frac{1}{(-1+r^2)} & \frac{1}{(-1+r^3)} \\ \frac{r}{(1-2r+r^2)} & \frac{r^2}{(1-2r^2+r^4)} & \frac{r^3}{(1-2r^3+r^6)} \\ \frac{(r+r^2)}{(-1+3r-3r^2+r^3)} & \frac{(r^2+r^4)}{(-1+3r^2-3r^4+r^6)} & \frac{(r^3+r^6)}{(-1+3r^3-3r^6+r^9)} \end{bmatrix}$$

6. Решение некоторых математических и экономических задач с использованием компьютерного пакета не только закладывает основы экономико-математического моделирования, но и демонстрирует возможности экспорта данных из MathCAD в другие программы.

Проиллюстрируем это на следующем примере. Предприятие выпускает m видов продукции с использованием n видов сырья. Нормы расхода сырья даны в матрице A, в которой на позиции (i, k) находится число, равное количеству k-го вида сырья (кг), расходуемому на производство единицы продукции i-го вида. Плановый объем выпуска продукции дан в вектор-строке Q, в которой i-й элемент равен количеству единиц продукции i-го вида. Вектор-строка S задает себестоимость единицы сырья каждого вида, а вектор-строка t задает транспортные расходы на единицу сырья каждого вида (k-е элементы этих векторов соответствуют k-му виду сырья). Пользуясь только умножением матриц, найти: количество сырья каждого вида, необходимого для выполнения планового выпуска продукции; производственные и транспортные затраты на сырье, расходуемое на производство единицы продукции каждого вида; затраты на все сырье, необходимое для выполнения плана. Все полученные результаты записать в Excel-файл.

$$A = \begin{pmatrix} 2.5 & 8.2 & 3 & 5.3 & 13.2 & 25 & 1.1 \\ 1.5 & 8.2 & 2 & 7.1 & 15.8 & 21 & 0.9 \\ 7 & 8 & 6 & 11 & 2.4 & 8 & 0.5 \\ 4 & 9.1 & 2 & 5 & 3.2 & 15 & 0.3 \\ 3 & 8.5 & 12 & 3.5 & 1.8 & 17 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$Q = (160, 125, 140, 311, 83)$,

$S = (150, 22, 13, 15, 81, 211, 400)$,

$t = (8, 2, 3, 3, 2, 4, 1)$.

Алгоритм решения задачи с помощью MathCAD следующий. Ввести исходные данные:

ORIGIN:=1

$$A := \begin{pmatrix} 2.5 & 8.2 & 3 & 5.3 & 13.2 & 25 & 1.1 \\ 1.5 & 8.2 & 2 & 7.1 & 15.8 & 21 & 0.9 \\ 7 & 8 & 6 & 11 & 2.4 & 8 & 0.5 \\ 4 & 9.1 & 2 & 5 & 3.2 & 15 & 0.3 \\ 3 & 8.5 & 12 & 3.5 & 1.8 & 17 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$Q := (160\ \ 125\ \ 140\ \ 311\ \ 83)$

$S := (150\ \ 22\ \ 13\ \ 15\ \ 81\ \ 211\ \ 400)$

$t := (8\ \ 2\ \ 3\ \ 3\ \ 2\ \ 4\ \ 1)$

Вычислить количество сырья каждого вида, необходимого для выполнения плана:

$Q{\cdot}A=(3060.5\ \ 6992.6\ \ 3188\ \ 5121\ \ 5567.6\ \ 13821\ \ 485)$

Вычислить производственные и транспортные затраты на сырье, необходимое для производства единицы продукции (по каждому виду продукции):

$$r:=\mathrm{stack}(S,\ t) \qquad A\cdot r^{T} := \begin{pmatrix} 7458.1 & 188.8 \\ 6608.7 & 172.2 \\ 3551.4 & 160.3 \\ 4445.4 & 137.9 \\ 4738.3 & 159.5 \end{pmatrix}$$

Вычислить суммарные затраты на сырье:

$$C:=Q{\cdot}A{\cdot}r^{T} \quad C=(4292377.8\ \ 130300.4) \quad D := C\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad D=(4422678.2)$$

Записать все данные в файл work1.xls:

$D := \mathrm{augment}(D,\ 0)$

C:\work1.xls

$\mathrm{stack}\left(A\cdot r^{T}, C, D\right)$

Кроме всего перечисленного выше, использование компьютерного пакета формирует навыки работы с компьютером вообще и применения компьютерного пакета в частности. Описание используемых средств MathCAD следует давать параллельно изложению математической теории, что позволит потенциальному читателю постепенно усваивать широкие возможности пакета без отрыва от конкретного математического контекста. При этом те или иные процедуры, функции и операторы MathCAD должны описываться подробно в компьютерном разделе именно той главы, где они впервые встречаются.

Из всего вышесказанного можно сделать следующий вывод: компьютерная математика не способна полностью исключить традиционные методы в преподавании, однако призвана сделать это преподавание более эффективным и доступным. Она всего лишь инструмент, позволяющий: а) сосредоточить внимание студента на логике методов и алгоритмов, освобождая от необходимости освоения громоздких, не запоминающихся и потому бесполезных вычислительных процедур и трюков; б) постигать принципы алгоритмизации и программирования, поскольку решение компьютерных задач связано с написанием программных блоков; в) способствовать повышению эффективности усвоения материала благодаря визуализации некоторых этапов решения задач.

Литература

1. Черняк А.А., Доманова Ю.А., Черняк Ж.А. Высшая математика на базе MathCad. Общий курс. – СПб.: «БХВ-Петербург», 2004. – 608 с.

2. Черняк А.А., Новиков В.А., Мельников О.И., Кузнецов А.В. Математика для экономистов на базе MathCAD. – СПб.: «БХВ-Петербург», 2003. – 485 с.