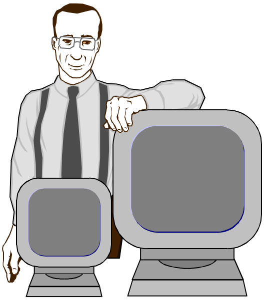

# К УРОКУ ИНФОРМАТИКИ

***А.А. Черняк***, *д.ф-м.н., профессор кафедры математики Белорусского государственного педагогического университета им. Максима Танка,*
***А.В. Кутырева***, *студентка физического факультета Белорусского государственного педагогического университета им. Максима Танка*

## Решение уравнений и неравенств в Mathcad. Часть 3

### 4. Решение неравенств в символьном виде

В качестве первого примера решим неравенство $\frac{1}{x-1}-\frac{5x+6}{x^3-1}>0$. Кнопкой solve вызовем шаблон и на месте левой метки шаблона введем неравенство, на месте правой – имя переменной x. После нажатия клавиши **Enter** получим

$$\frac{1}{x-1}-\frac{5\cdot x+6}{x^3-1}>0 \text{ solve, } x \to \begin{bmatrix} (-1<x)\cdot(x<1) \\ 5<x \end{bmatrix}.$$

Следует учитывать, что при решении неравенств вида g(x)>0 Mathcad не ограничивает область определения функции g(x) множеством действительных чисел. Поэтому результаты символьных вычислений могут содержать промежутки, в

---

Окончание. Начало в номерах 3,4'2007.

которых g(x) не определена. Это подтверждает, например, следующий фрагмент:

$$\frac{\sqrt{x+20}}{x} - 1 < 0 \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} x < 0 \\ 5 < x \end{pmatrix}.$$

Хотя данное неравенство неопределенно при $x < -20$, тем не менее этот промежуток Mathcad включил в ответ.

Решим задачу определения интервалов монотонности (промежутков возрастания и убывания) функции $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + x + 2}$ с помощью ее производной. Как мы знаем из математики, функция возрастает (убывает) на интервале (a;b), если ее производная на (a;b) больше нуля (меньше нуля). Поэтому для нахождения интервалов возрастания функции f(x) решим неравенство $f'(x) > 0$. Для этого введем выражение $f(x) := \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + x + 2}$. Кнопкой $\frac{d}{dx}$ подпанели **Calculus** вызовем шаблон $\dfrac{d}{d\blacksquare}\blacksquare$ для дифференцирования функций. На месте нижней метки введем имя переменной x, относительно которой вычисляется производная, на месте верхней метки введем выражение $f(x) > 0$. Щелчком на кнопке solve вызовем шаблон и на месте метки введем имя переменной x. После нажатия клавиши **Enter**, получим интервалы возрастания функции f(x):

$$\frac{d}{dx} f(x) > 0 \text{ solve}, x \rightarrow \begin{bmatrix} x < -1 \\ \dfrac{1}{3} \cdot \left(89 + 18 \cdot 62^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} - \dfrac{23}{3 \cdot \left(89 + 18 \cdot 62^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}} - \dfrac{1}{3} < x \end{bmatrix}$$

На остальных промежутках функция $f(x)=\frac{x^3-3x-2}{x^2+x+2}$ убывает.

И, наконец, «испытаем» символьный процессор Mathcad самой сложной задачей – решением системы неравенств. Возможности Mathcad здесь ограничены – *результат будет получен только, если решением системы является единственный промежуток*. Рассмотрим следующую задачу: каковы возможные значения скорости точки, движущейся равномерно по прямой, если при увеличении скорости на 3 м/с эта точка при прохождении расстояния в 630 м выигрывает время не менее 1 секунды и не более 280 секунд. Обозначим искомую скорость точки через x. Тогда время, за которое она пройдет расстояние в 630 м, равно $\frac{630}{x}$ с. При увеличении скорости на 3 м/с время прохождения этого же расстояния будет равно $\frac{630}{x+3}$ с. Учитываем также, что $x>0$. Итак, задача сводится к решению системы неравенств:

$$\begin{cases}\frac{630}{x}-\frac{630}{x+3}\ge 1\\ x>0\\ \frac{630}{x}-\frac{630}{x+3}\le 280\end{cases}.$$

Эти три неравенства в Mathcad-документе должны содержаться в матрице, состоящей из одного столбца и трех строк. Поэтому комбинацией клавиш **Ctrl+M** вызовем диалоговое окно **Insert Matrix** и в поле **Rows** зададим число строк 3, а в поле **Columns** – число столбцов 1. После щелчка на кнопке **Insert** в появившемся шаблоне введем на месте трех меток соответственно неравенства $\frac{630}{x}-\frac{630}{x+3}\ge 1$, $\frac{630}{x}-\frac{630}{x+3}\le 280$, $x>0$. Щелкнем на кнопке solve:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{630}{x} - \dfrac{630}{x+3} \le 280 \\ \dfrac{630}{x} - \dfrac{630}{x+3} \ge 1 \\ x > 0 \end{pmatrix} \text{solve}, \blacksquare \rightarrow .$$

Затем щелкнем на кнопке **OK** диалогового окна **Insert Matrix** и введем шаблон матрицы, состоящей из одного столбца и трех строк. На месте трех меток введем имя переменной x. После нажатия клавиши **Enter** получим:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{630}{x} - \dfrac{630}{x+3} \le 280 \\ \dfrac{630}{x} - \dfrac{630}{x+3} \ge 1 \\ x > 0 \end{pmatrix} \text{solve}, \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} \rightarrow \left( x \le 42 \quad \frac{3}{2} \le x \right)$$

Задача решена: искомый промежуток возможных значений скорости точки равен [1.5; 42].

## 5. Решение уравнений и неравенств с помощью графиков

Для нахождения приближенных значений корней уравнения $f(x) = 0$ с трудно поддающейся исследованию функцией $f(x)$ Mathcad имеет встроенную функцию **root**(f(x),x). Рассмотрим уравнение $\sin(x) = \dfrac{x}{10}$.

Сначала графически определим число корней этого уравнения, построив графики его левой и правой частей. Как видно из рисунка 5, всего имеется 7 точек пересечения графиков функций $y = \sin(x)$ и $y = \dfrac{x}{10}$.

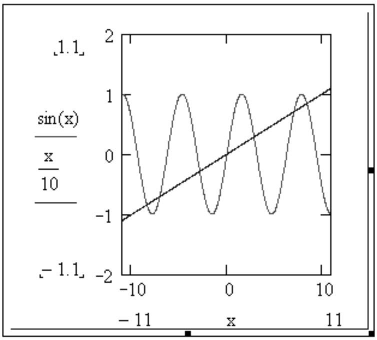


Рис. 5

С помощью диалогового окна **X-Y Trace** установим приблизительное месторасположение всех 7 корней уравнения: они будут находиться соответственно рядом с точками x= -8, x= -7, x= -2.5, x=0, x=3, x=7, x=9.

Теперь применим функцию **root**, предварительно записав уравнение в виде $\sin(x) - \frac{x}{10} = 0$ и задав функцию $f(x)$:

$f(x){:=}\sin(x) - \frac{x}{10}$. Последовательно беря в качестве начальных приближений точки x= -8, x= -7, x= -2.5, x=0, x=3, x=7, x=9, получим приближенные значения всех семи искомых решений. Например, при x=7 имеем:

$$f(x) := \sin(x) - \frac{x}{10} \qquad x := 7 \qquad \mathrm{root}(f(x), x) = 7.068.$$

В данном случае использование графика оказалось решающим. Не менее продуктивным является оно и при решении неравенств.

Решим тригонометрическое неравенство $\sin 2x - \cos x < 0$. Попытка решить его с помощью кнопки solve не увенчается успехом. Поэтому начнем пока с решения соответствующего уравнения $\sin 2x - \cos x = 0$ (с точностью до периода $2\pi$ функции $f(x) = \sin 2x - \cos x$):

$$f(x) := \sin(2 \cdot x) - \cos(x) \qquad + \quad a := f(x) = 0 \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \pi \\ \frac{-1}{2} \cdot \pi \\ \frac{1}{6} \cdot \pi \\ \frac{5}{6} \cdot \pi \end{pmatrix}$$

Теперь построим графики функции $y = f(x)$, прямой y=0, отметив заодно точки их пересечения $(-\frac{\pi}{2};\ 0)$, $(\frac{\pi}{6};\ 0)$, $(\frac{\pi}{2};\ 0)$,

$(\frac{5\pi}{2};\ 0)$ (абсциссы этих точек содержатся в столбце a, а ординаты – в столбце b – рис. 6). При этом вкладка **Traces** диалогового окна **Formatting Currently Selected X-Y Plot** оформлена так, как показано на рисунке 7. По графику находим, что $f(x) < 0$ при $x \in (-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{\pi}{2};\ \frac{5\pi}{6})$ . Учитывая период $2\pi$ функции $f(x)$, получаем искомое решение неравенства:

$x \in (-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n) \cup (\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n)$ , n – любое целое.

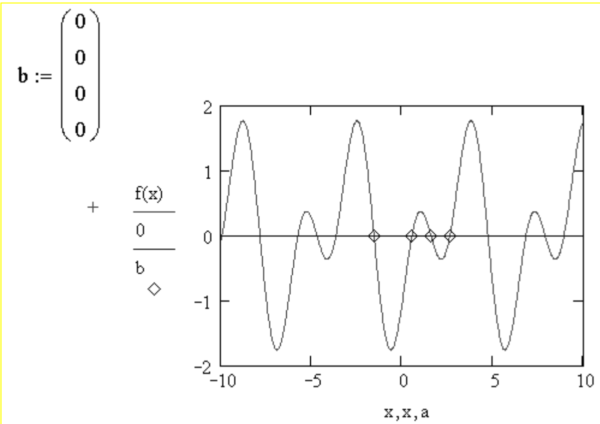


Рис. 6

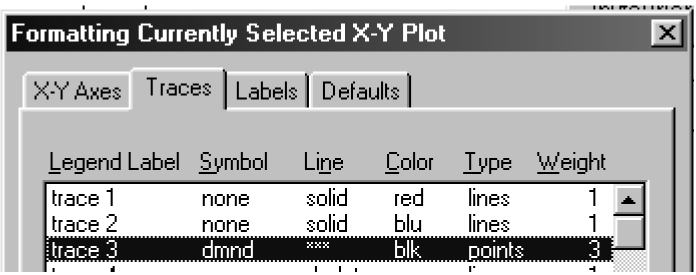


Рис. 7

Решим теперь показательное неравенство $e^x - 25x - 5 > 0$. Решение соответствующего ему уравнения $e^x - 25x - 5 = 0$ с помощью кнопки solve на этот раз не даст приемлемого результата (убедитесь в этом).

Поэтому вначале построим графики функции $f(x) = e^x - 25x - 5$ и прямой y=0 (рис. 8).

$$f(x) := e^x - 25x - 5$$

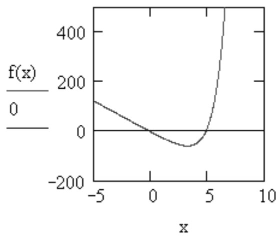


Рис. 8

А дальше поступим так, как уже поступали выше: с помощью функции **root** найдем абсциссы точек пересечения этих графиков, после чего уже не составит труда записать приближенный ответ неравенства:

$$\mathrm{ORIGIN} := 1$$

$$x := 0 \quad c_1 := \mathrm{root}(f(x), x) \quad x := 5 \quad c_2 := \mathrm{root}(f(x), x) \quad c = \begin{pmatrix} -0.1661 \\ 4.8354 \end{pmatrix}.$$

Искомый ответ: $x \in (-\infty;\ -0.1661) \cup (4.8354;\ +\infty)$. А теперь проверим точность найденных выше корней $c_1$ и $c_2$, подставив их в функцию $f(x) = e^x - 25x - 5$:

$$i := 1..2 \quad f(c_i) = \begin{array}{|c|} \hline -4.088 \cdot 10^{-5} \\ \hline 1.49 \cdot 10^{-6} \\ \hline \end{array}.$$

Как мы видим, точность достаточно высокая – значения функции f(x) отличаются от нуля менее чем на $10^{-4}$. Но ее можно увеличить с помощью встроенной переменной **TOL**, которая контролирует точность в алгоритмах вычисления производных, корней уравнений, максимальных и минимальных значений функций. По умолчанию **TOL**=$10^{-3}$. Если значение **TOL** уменьшать, то точность вычислений будет расти параллельно с увеличением времени вычислений. При неоправданно малых значениях **TOL** возможно появление сообщения «решение не найдено», поскольку достаточно хорошее приближение, найденное алгоритмом, «будет пропущено» из-за слишком строгого критерия точности, заданного **TOL**.

Увеличим точность вычислений, «заложенную» в функцию **root**, посредством ввода выражения TOL:=$10^{-8}$ перед $c_1$:=root(f(x),x). Результаты не замедлят себя ждать:

$$i := 1..2 \qquad f(c_i) = \begin{array}{|c|}\hline -3.877\cdot 10^{-10} \\ \hline 1.235\cdot 10^{-11} \\ \hline \end{array}\,.$$

На этот раз значения функции f(x) отличаются от нуля менее чем на $10^{-9}$.

## 6. Задачи для самостоятельного решения

1. Решить уравнение $2x^5 + x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 13 = 0$.
2. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x - 3y + az = 1 \\ 3x - 2y - 5z = b \\ -ax + 6y + 3z = -8 \end{cases}$$

при следующих значениях параметров: a=-1, -3, -5, b=2.1, 2.2, 2.3, 2.4.

3. Четыре магазина $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$ получают овощи из трех фермерских хозяйств $A_1$, $A_2$, $A_3$, которые ежедневно могут поставлять не более 10, 12, 18 тонн соответственно. Суточные потребности магазинов составляют соответственно 6.5, 9, 7.5, 12 тонн. В таблице 2 приведены транспортные расходы на доставку 1 тонны овощей от фермерских хозяйств каждому магазину. Составить план доставки овощей из фермерских хозяйств магазинам, полностью удовлетворяющий потребности магазинов и минимизирующий при этом транспортные издержки.

Таблица 2

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 15 | 17 | 20 | 22 |
| $A_2$ | 24 | 18 | 19 | 21 |
| $A_3$ | 23 | 15 | 18 | 20 |

4. В пунктах $A_1$, $A_2$, $A_3$ производится однородная продукция в количествах 650, 450, 550 единиц. Готовая продукция поставляется в пункты $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$, потребности которых составляют 300, 600, 150, 400 единиц. В таблице 3 приведены транспортные расходы на доставку единицы продукции из пунктов $A_1$, $A_2$, $A_3$ в пункты $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$. Составить план перевозки готовой продукции из пунктов производства $A_1$, $A_2$, $A_3$ в пункты потребления $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$, при котором удовлетворяется спрос во всех пунктах потребления и обеспечиваются минимальные суммарные затраты на перевозку.

Таблица 3

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 5 | 7 | 4 | 2 |
| $A_2$ | 3 | 6 | 8 | 5 |
| $A_3$ | 7 | 2 | 5 | 3 |

5. Обувная фабрика специализируется по выпуску изделий трех видов: сапог, кроссовок и ботинок. При этом используется сырье трех типов: $S_1$, $S_2$, $S_3$. Нормы расхода каждого из них на изготовление одной пары обуви в день приведены в таблице 4.

Таблица 4

| Тип сырья | Нормы расхода сырья на изготовление одной пары обуви (в ден. ед.) | | |
|---|---|---|---|
| | сапоги | кроссовки | ботинки |
| $S_1$ | 5 | 3 | 4 |
| $S_2$ | 2 | 1 | 1 |
| $S_3$ | 3 | 2 | 2 |

Требуется определить ежедневный объем выпуска каждого вида обуви в зависимости от предписанных объемов a, b, c расходов (за день) сырья типов $S_1$, $S_2$, $S_3$ соответственно.

6. При каком значении параметра a наименьшее значение функции $f(x)=x\sqrt{x+|a|}$ равно $-6\sqrt{3}$ ?

7. На параболе $y=-x^2-7x-12$ и прямой $y=-2x+7$ найти ближайшие друг к другу точки.

8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy+\frac{6}{xz}=2,\ xz-\frac{4}{yz}=4,\ yz-\frac{3}{xy=1} \end{cases}.$$

9. Найти координаты центров и радиусы окружностей, касающихся трех заданных прямых: $y=\frac{1}{7}x$, $y=-x+2$, $y=x+4$.

10. Решить неравенство $\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}\ge\frac{x+1}{x}$.

11. Найти интервалы монотонности функции $f(x)=\frac{(x-1)^2}{x+1}$.

12. Решить систему неравенств $\begin{cases} 3\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}\le 7 \\ x\ge 3 \end{cases}$.

13. Исходный сплав магния и алюминия должен содержать на 16 кг магния меньше, чем алюминия, а вес всего сплава должен превышать 6 кг и не превосходить 30 кг. Сколько алюминия нужно взять первоначально, чтобы после добавления 5 кг алюминия его концентрация возросла не более, чем на 2 % ?

14. Решить неравенство $\cos(5x)<-\sin(10x)$.

15. Решить неравенство $2\sin^2 x-\sin x+\sin 3x<1$.

16. Решить уравнение $9^{\sin 7x}=10x^2$.

17. Решить неравенство $3^{\frac{2}{x}}+2x\cdot 3^{\frac{1}{x}}-6x-10>0$.