Весці БДПУ. Серыя 3. 2021. № 2. С. 37–43.

УДК 517.589

UDC 517.589

ОТОБРАЖЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ *h*-ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

MAPPING WITH THE HELP OF *H*-HOLOMORPHIC FUNCTIONS

И. Л. Васильев,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций БГУ;

В. А. Павловский,
аспирант кафедры теории функций БГУ

I. Vasilyev,
PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Theory of Functions, BSU;

V. Pavlovsky,
Postgraduate Student of the Department of Theory of Functions, BSU

Поступила в редакцию 7.06.21.

Received on 7.06.21.

В работе рассматриваются вопросы отображения стандартных областей в кольце *h*-комплексных чисел с помощью *h*-голоморфных функций, изучены свойства линейной и дробно-линейной функций.

Ключевые слова: кольцо *h*-комплексных чисел, *h*-голоморфные функции, делители нуля, отображения стандартных областей, линейное отображение, дробно-линейное отображение.

The article considers the questions of mapping of standard areas in the ring of *h*-complex numbers with the help of *h*-holomorphic functions, studies the properties of linear and fractional-linear functions.

Keywords: ring of *h*-complex numbers, *h*-holomorphic functions, zero divisors, mapping of standard areas, linear mapping, fractional-linear mapping.

Введение. Теория функций *h*-комплексного переменного в математической литературе отражена недостаточно полно. В имеющихся работах изучаются в основном алгебраические свойства кольца *h*-комплексных чисел и приводятся примеры конкретных функций в связи с их применением в различных задачах геометрии, теории дифференциальных уравнений, теории относительности. Актуальным является изучение общих свойств *h*-голоморфных функций и построение элементов соответствующей теории. Данная работа является продолжением исследований, начатых авторами в [1–3].

1. Естественное множество h-голоморфности. Пусть $\mathbb{C}_h$ – кольцо *h*-комплексных (двойных) чисел [1–3], то есть чисел $z = x + jy$, $x, y \in \mathbb{R}$, $j^2 = 1$, $j \neq 1$ с нормой $z = |x| + |y|$. В $\mathbb{C}_h$ имеются делители нуля вида $(1 \pm j)t, t \in \mathbb{R}$. Обозначим через $\mathcal{H}_h(D)$ множество функций *h*-голоморфных [2] на множестве $D \subset \mathbb{C}_h$.

Определение 1. Множество $\mathcal{D}(f) \subset \mathbb{C}_h$ называется естественным множеством *h*-голоморфности функции f, если $f \in \mathcal{H}_h(\mathcal{D}(f))$ и $\forall D' \supset \mathcal{D}(f)$ таких, что $f \in \mathcal{H}_h(D')$ выполняется $D' = \mathcal{D}(f)$.

Пусть $f(z) = f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$.

Теорема 1. Пусть функция $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ дважды непрерывно *h*-дифференцируема в интервале $(a, b) \in \mathbb{R}$. Тогда естественным множеством *h*-голоморфности функции f при $|a|, |b| < +\infty$ является открытый *h*-круг

$$\mathcal{D}(f) = \left\{ \|z - z_0\| < \frac{b - a}{2},\ z_0 = \left(\frac{a + b}{2}, 0 \right) \right\}. \quad (1)$$

Если $b = +\infty$, то

$$\mathcal{D}(f) = \{ z \in \mathbb{C}_h \mid -x + a < y < x - a \}. \quad (2)$$

Если $a = -\infty$, то

$$\mathcal{D}(f) = \{ z \in \mathbb{C}_h \mid x - b < y < -x + b \}. \quad (3)$$

При $a = -\infty$, $b = +\infty$ получаем

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{C}_h. \tag{4}$$

Доказательство. На множестве *h*-голоморфности верно представление из [3]

$$f(z) = \left(\frac{1+j}{2}\right) f(x+y) + \left(\frac{1-j}{2}\right) f(x-y). \tag{5}$$

В максимально широкой области имеем

$$\begin{cases} a < x+y < b \\ a < x-y < b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+a < y < -x+b \\ x-b < y < x-a \end{cases},$$

что равносильно

$$z \in \left\{ \|z - z_0\| < \frac{b-a}{2},\ z_0 = \left(\frac{a+b}{2}, 0\right) \right\}.$$

Равенства (2), (3), (4) проверяются аналогично.

Замечание. В общем случае $\mathcal{D}(f)$ представляется в виде объединений и пересечений областей вида (1)–(4) или их замыканий и дополнений.

2. Образы стандартных областей. Обозначим через Γ_1 прямую $y = x$, через Γ_2 прямую $y = -x$. Для любых $z = x + jy$ имеем:

$$\frac{1+j}{2} z = \frac{1+j}{2}(x+jy) = \frac{1+j}{2}(x+y) \in \Gamma_1,$$

$$\frac{1-j}{2} z = \frac{1-j}{2}(x+jy) = \frac{1-j}{2}(x-y) \in \Gamma_2.$$

Пусть $f \in \mathcal{H}_h(D)$, $\ell \subset D$ – отрезок прямой $y = x - d$. В области D справедливо представление (5). На ℓ имеем $x - y = d$, $x + y = 2x - d$. Пусть $C \in \ell$, $C' \in f(\ell)$. Тогда

$$\left(\frac{1+j}{2}\right) C' = \left(\frac{1+j}{2}\right)^2 f(x+y) + \left(\frac{1+j}{2}\right)\left(\frac{1-j}{2}\right) f(x-y) =$$

$$= \left(\frac{1+j}{2}\right) f(x+y) = \left(\frac{1+j}{2}\right) f(2x-d) \in \Gamma_1.$$

В силу непрерывности f на ℓ точки $\left(\frac{1+j}{2}\right) C'$ образуют отрезок γ' на Γ_1.

$$\left(\frac{1-j}{2}\right) C' = \left(\frac{1-j}{2}\right)\left(\frac{1+j}{2}\right) f(x+y) + \left(\frac{1-j}{2}\right)^2 f(x-y) =$$

$$= \left(\frac{1-j}{2}\right) f(x-y) = \left(\frac{1-j}{2}\right) f(d) \in \Gamma_2.$$

Эта величина является постоянной для любой $C \in \ell$. Таким образом, $\ell' = f(\ell)$ – отрезок, параллельный прямой $y = x$. Аналогично доказывается, что если $\ell \subset D$ – отрезок прямой $y = -x + d$, то его образ $\ell'' = f(\ell)$ – отрезок, параллельный прямой $y = -x$.

Определение 2. Элементарным множеством в $\mathbb{C}_h$ назовем любой прямоугольник со сторонами, параллельными прямым $y = x$ и $y = -x$ соответственно. Элементарной областью назовем внутренность элементарного множества.

Теорема 2. Пусть $f \in \mathcal{H}_h(D)$, где $D \subset \mathcal{D}(f)$ – элементарная область, $|u'_x(x,y)| \neq |u'_y(x,y)|$ в области $D^* = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid z = x + jy \in D\}$. Тогда $D' = f(D)$ – элементарная область.

Доказательство теоремы вытекает из вышесказанного и принципа сохранения области.

Определение 3. Стандартным назовем компактное множество со связной внутренностью, ограниченное замкнутой ломаной, образованной конечным числом отрезков, параллельных прямым $y = x$ или $y = -x$. Стандартной областью назовем внутренность стандартного множества.

Теорема 3. Пусть $f \in \mathcal{H}_h(D)$, где $D \subset \mathcal{D}(f)$ – стандартная область, $|u'_x(x,y)| \neq |u'_y(x,y)|$ в области $D^* = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid z = x + jy \in D\}$. Тогда $E = f(D)$ – стандартная область.

Доказательство теоремы вытекает из теоремы 2 и того факта, что замыкание $\overline{D} = D \cup \partial D$ можно представить в виде конечного объединения элементарных множеств при том, что в условиях теоремы образом области будет снова область.

3. Образ произвольной области.

Определение 4. Последовательность множеств D_k называется исчерпанием множества D, если:

1) $D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_k \subset D_{k+1} \subset \ldots$,

2) $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D_k = D$.

Теорема 4. Пусть $D \subset \mathbb{C}_h$ – область, ограниченная кусочно-гладкой замкнутой кривой ∂D, $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ее исчерпание стандартными областями, $f \in \mathcal{H}_h(D_k)\ \forall k$. Тогда

1) $f(D_k) \subset f(D_m)$ при $k < m$,

2) $f(D) = f\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D_k\right) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} f(D_k)$,

3) $f \in \mathcal{H}_h(D)$,

4) Если для всех $k = 1,2,\ldots$ $E_k = f(D_k)$ – область, то $E = f(D)$ – область и $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ее исчерпание стандартными областями.

Доказательство. 1) Вытекает из того, что $D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_k \subset D_{k+1} \subset \ldots$ при $k < m$.

2) Обозначим $E = f(D)$. Пусть $z_0 \in D$, следовательно, существует такой k_0, что $z_0 \in D_k$ $\forall k \geq k_0$, следовательно, $f(z_0) \in f(D_k)$. С другой стороны, $E_k = f(D_k) \subset E$, следовательно, $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$.

3) Пусть $z_0 \in D$, существует окрестность $U(z_0)$ и существует такой k_0, что $U(z_0) \subset D_k$ $\forall k \geq k_0$, следовательно, $f \in \mathcal{H}_h(U(z_0))$. В силу произвольности z_0 получаем $f \in \mathcal{H}_h(D)$.

4) Пусть $E_k = f(D_k)$ – область $\forall k$. Из 2) вытекает, что $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ – открытое множество. Для любых $z_1, z_2 \in D$ существует такой k_0, что $z_1, z_2 \in D_k$ $\forall k \geq k_0$, следовательно, точки z_1 и z_2 можно соединить непрерывным путем в D_k, а следовательно, точки $w_1 = f(z_1)$ и $w_2 = f(z_2)$ можно соединить непрерывным путем в E, следовательно, E – связное множество. Таким образом, E – область. Доказательство утверждения вытекает из 1), 2) и теоремы 3.

4. Некоторые общие сведения об отображениях, осуществляемых с помощью h-голоморфных функций. Пусть $w = f(z)$, $f \in \mathcal{H}_h(D)$, где $D \subset \mathcal{D}(f)$ – область.

Лемма 1. Не существует *h*-голоморфной функции, осуществляющей поворот в плоскости z на угол $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Пусть отображение $w = f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ осуществляет в плоскости z поворот на угол α. Этому отображению сопоставим согласованное отображение $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такое, что

$$F = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

или

$$u = x\cos\alpha - y\sin\alpha,\ \ v = x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

Должны выполняться условия $u'_x = v'_y$, $u'_y = v'_x$. Отсюда $\sin\alpha = 0$, а значит, $\alpha = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Если $k = 2m,\ \ m \in \mathbb{Z}$, то f сводится к тождественному отображению. При $k = 2m+1$ получаем $u = -x$, $v = -y$, то есть $f(z) = -z$.

Лемма 2. Не существует *h*-голоморфной функции, осуществляющей в плоскости z растяжение вдоль оси Ox или вдоль оси Oy.

Доказательство. Пусть f осуществляет растяжение вдоль оси Ox в k раз, $k > 0$. Его можно представить в виде $u = kx$, $v = y$. Из равенства $u'_x = v'_y$ получаем $k = 1$. Аналогично показывается, что *h*-голоморфная функция не может осуществлять растяжение вдоль оси Oy.

5. Линейная функция и ее свойства. Рассмотрим линейную однородную функцию $w = cz$, где $c = \alpha + j\beta \in \mathbb{C}_h$. Выделяя вещественную и гиперболическую части, получим:

$$w = (\alpha + j\beta)(x + jy) = (\alpha x + \beta y) + j(\alpha y + \beta x) = u(x,y) + jv(x,y).$$

Имеем $u'_x = v'_y = \alpha$, $u'_y = v'_x = \beta$. Таким образом, функция W *h*-голоморфна всюду в $\mathbb{C}_h$ и $w'(z) = u'_x + jv'_x = \alpha + j\beta = c$. Если $\alpha^2 - \beta^2 \neq 0$, функция w диффеоморфно отображает всякую область $D \subset \mathbb{C}_h$ снова на область $E = w(D)$, при этом обратная функция $z = \dfrac{1}{\alpha} w$ *h*-голоморфна в E и $z'(w) = \dfrac{1}{c}$. Полагая $w(\infty) = \infty$, получим диффеоморфизм $\widehat{\mathbb{C}_h}$ на $\widehat{\mathbb{C}_h}$.

При $\alpha = \beta$ либо $\alpha = -\beta$ образом области $D \subset \mathbb{C}_h$ будет открытый интервал на прямой $v = u$ или на прямой $v = -u$ соответственно.

В отличие от классического комплексного анализа действие линейной функции не сводится к композиции растяжения и поворота. Представим такую функцию в виде

$$w = cz = (\alpha + j\beta)z = \left(\frac{1+j}{2}\right)(\alpha + \beta)z + \left(\frac{1-j}{2}\right)(\alpha - \beta)z. \tag{6}$$

Действие функции $w = \left(\dfrac{1+j}{2}\right)(\alpha + \beta)z$ сводится к последовательному применению проектирования на прямую $y = x$, растяжения в $|\alpha + \beta|$ раз и в случае $\alpha + \beta < 0$ симметрии относительно начала координат. Действие функции $w = \left(\dfrac{1-j}{2}\right)(\alpha - \beta)z$ сводится к последовательности проектирования на прямую $y = -x$, растяжения в $|\alpha - \beta|$ раз и в случае $\alpha - \beta < 0$ симметрии относительно начала координат. Для отображения (6) заключительной операцией служит сложение двух проекций.

В случае неоднородной линейной функции $w = cz + d$ к вышеперечисленным операциям добавляется параллельный перенос в плоскости z на вектор d.

Определение 5. $\mathbb{C}_h$-гиперболой в плоскости z назовем гиперболу, прямую либо прямую с выколотой точкой, не параллельные прямым $y = x$ и $y = -x$, а также пару взаимно перпендикулярных прямых вида $y = x + a,\ y = -x + b,\ a, b \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим в плоскости z уравнение:

$$A\left(x^2-y^2\right)+Bx+Cy+D=0, \qquad A,B,C,D\in\mathbb{R} \tag{7}$$

При $A=0$, $B^2+C^2\neq 0$ имеем прямую $Bx+Cy+D=0$. При $A\neq 0$, $B=C=D=0$ имеем пару прямых $y=x$ и $y=-x$. При $A\neq 0$, $B^2+C^2+D^2\neq 0$ уравнение (7) задает в плоскости z гиперболу.

Теорема 5. Линейная функция $w=cz+d$ переводит $\mathbb{C}_h$-гиперболу в плоскости z снова в $\mathbb{C}_h$-гиперболу в плоскости w.

Доказательство. Обозначим через Γ множество точек в плоскости z, определяемых уравнением (7), $w(\Gamma)$ – его образ в плоскости w. Рассмотрим однородную линейную функцию $w=cz$.

Подставляя в (7) равенства $x=\frac{1}{2}(z+\bar z)$, $y=\frac{j}{2}(z-\bar z)$, получим уравнение:

$$Az\bar z+Fz+\bar F\bar z+D=0, \text{ где } F=\frac{1}{2}(B+jC),\ \bar F=\frac{1}{2}(B-jC). \tag{8}$$

Пусть c не является делителем нуля. Подставляя в (8) значение $z=\frac{w}{c}$, получаем уравнение:

$$\frac{A}{c\bar c}w\bar w+\frac{F}{c}w+\frac{\bar F}{\bar c}\bar w+D=0,$$

которое задает $\mathbb{C}_h$-гиперболу в плоскости w. Пусть $c=\left(\frac{1+j}{2}\right)k$, где $k\in\mathbb{R}$. Если $A=0$, то $w(\Gamma)$ – прямая $v=u$. Если $A\neq 0$, то $w(\Gamma)$ – прямая $v=u$ с выколотой точкой. Пусть $c=\left(\frac{1-j}{2}\right)k$, где $k\in\mathbb{R}$. Если $A=0$, то $w(\Gamma)$ – прямая $v=-u$. Если $A\neq 0$, то $w(\Gamma)$ – прямая $v=-u$ с выколотой точкой. Прямая с выколотой точкой перейдет снова в прямую с выколотой точкой.

В случае неоднородной линейной функции $w=cz+d$ добавляется параллельный перенос на вектор d, переводящий $\mathbb{C}_h$-гиперболу снова в $\mathbb{C}_h$-гиперболу. Теорема доказана.

Нас будет интересовать, при каких условиях линейная функция $w=cz+d$ обращается в делитель нуля. Назовем пары делителей нуля вида

$$\left\{\left(\frac{1+j}{2}\right)k,\left(\frac{1+j}{2}\right)m\right\} \text{ или } \left\{\left(\frac{1-j}{2}\right)k,\left(\frac{1-j}{2}\right)m\right\}, \text{ где } k,m\in\mathbb{R},$$

соосными, а пары вида

$$\left\{\left(\frac{1+j}{2}\right)k,\left(\frac{1-j}{2}\right)m\right\} \text{ или } \left\{\left(\frac{1-j}{2}\right)k,\left(\frac{1+j}{2}\right)m\right\}, \text{ где } k,m\in\mathbb{R},$$

назовем дополнительными.

Если $c\neq\left(\frac{1+j}{2}\right)k$, где $k\in\mathbb{R}$, то $w=c\left(z+\frac{d}{c}\right)$ и w обращается в делитель нуля на паре прямых $y=x-\frac{d}{c}$ и $y=-x-\frac{d}{c}$.

Если c и d – соосные делители нуля, то $w(z)$ является делителем нуля для всех $z\in\mathbb{C}_h$.

Пусть $c=\left(\frac{1+j}{2}\right)k$, $d=\left(\frac{1+j}{2}\right)m+\left(\frac{1-j}{2}\right)l$, где $k,m,l\in\mathbb{R},\ k,l\neq 0,$

$$z=\left(\frac{1+j}{2}\right)(x+y)+\left(\frac{1-j}{2}\right)(x-y).$$

Имеем

$$w(z)=cz+d=\left(\frac{1+j}{2}\right)k\left[\left(\frac{1+j}{2}\right)(x+y)+\left(\frac{1-j}{2}\right)(x-y)\right]+$$
$$+\left(\frac{1+j}{2}\right)m+\left(\frac{1-j}{2}\right)l=\left(\frac{1+j}{2}\right)(k(x+y)+m)+\left(\frac{1-j}{2}\right)l.$$

Очевидно, что $w(z)$ обращается в делитель нуля на прямой $y=-x-\frac{m}{k}$. Аналогично доказывается, что при $c=\left(\frac{1-j}{2}\right)k$, $d=\left(\frac{1+j}{2}\right)m+\left(\frac{1-j}{2}\right)l$, где $k\in\mathbb{R},\ k,m\neq 0$, получаем

$$w(z)=\left(\frac{1-j}{2}\right)(k(x-y)+l)+\left(\frac{1+j}{2}\right)m$$

и $w(z)$ обращается в делитель нуля на прямой $y=x+\frac{l}{k}$.

5. Дробно-линейная функция. Рассмотрим функцию $w=\frac{1}{z}$. Для этой функции естественное множество определения $D(w)=\{z\in\mathbb{C}_h \mid y\neq\pm x\}$. На этом множестве w *h*-голоморфна и $w'=-\frac{1}{z^2}$ нигде в $D(w)$ не обращается в делитель нуля. В силу того, что $w(z_1)\neq w(z_2)$, $\forall z_1,z_2\in D(w)$, $z_1\neq z_2$, заключаем, что w диффеоморфно отображает любую ограниченную область $Q\subset D(w)$ в плоскости z на область $w(Q)$ в плоскости w.

Пусть $\mathbb{C}_h$-гипербола Г задана уравнением

$$A\left(x^2-y^2\right)+Bx+Cy+D=0,\ \text{где}\ A\neq 0,\ B^2+C^2+D^2\neq 0. \tag{9}$$

Если $B^2+C^2\neq 0$, то Г пересекает прямые $y\neq\pm x$, на которых функция $w=\frac{1}{z}$ не определена. Пусть $B=C=0$, тогда (9) принимает вид

$$Az\bar{z}+D=0. \tag{10}$$

Подставляя сюда $z=\frac{1}{w}$, получим уравнение гиперболы в плоскости w:

$$A+Dw\bar{w}=0.$$

Пусть в (9) $A=D=0$, $B\neq\pm C$, тогда уравнение (9) примет вид

$$Bx+Cy=0$$

или в равносильной форме

$$Fz+\bar{F}\bar{z}=0,\ \textit{где}\ F=\frac{1}{2}(B+jC), \bar{F}=\frac{1}{2}(B-jC). \tag{11}$$

Функция $w=\frac{1}{z}$ диффеоморфно переводит прямую (11) с выколотой точкой $z=0$ плоскости z на прямую $F\bar{w}+\bar{F}w=0$ с выколотой точкой $w=0$ в плоскости w.

Назовем гиперболу (10) и прямую (11) с выколотой точкой $z=0$ допустимыми $\mathbb{C}_h$–гиперболами. Из вышесказанного вытекает, что функция $w=\frac{1}{z}$ диффеоморфно отображает допустимую $\mathbb{C}_h$-гиперболу в плоскости z на допустимую $\mathbb{C}_h$-гиперболу в плоскости w.

Рассмотрим дробно-линейную функцию

$$w = \frac{az+b}{cz+d},\ a,b,c,d \in \mathbb{C}_h. \qquad (12)$$

Числа C и $\vartriangle = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ не являются делителями нуля. Функция (12) представляется в виде

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2\left(z+\frac{d}{c}\right)} = M + \frac{N}{z+\frac{d}{c}},\ \text{где } M = \frac{a}{c},\ N = \frac{bc-ad}{c^2}. \qquad (13)$$

Для функции (12) естественное множество определения $D(w) = \left\{ z \in \mathbb{C}_h \mid z \neq -\frac{d}{c} + (1 \pm j)t, t \in \mathbb{R} \right\}$. На этом множестве w h-голоморфна и

$$w'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}.$$

Так же, как и для функции $w = \frac{1}{z}$, показывается, что функция (12) диффеоморфно отображает любую ограниченную область $Q \subset D(w)$ в плоскости z на область $w(Q)$ в плоскости w.

Для обратной функции имеем

$$z(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}, \qquad z'(w) = \frac{ad-bc}{(cw-a)^2}.$$

Из (13) видно, что действие дробно-линейной функции (12) сводится к композиции

$$z \mapsto w_1 = z + \frac{d}{c} \mapsto w_2 = \frac{1}{w_1} \mapsto w_3 = Nw_2 \mapsto w_4 = w_3 + M.$$

Допустимыми $\mathbb{C}_h$-гиперболами для дробно-линейной функции (12) по аналогии с (10) и (11) назовем гиперболы вида

$$A\left(z+\frac{d}{c}\right)\overline{\left(z+\frac{d}{c}\right)} + D = 0$$

и прямые вида

$$F\left(z+\frac{d}{c}\right) + \overline{F}\overline{\left(z+\frac{d}{c}\right)} = 0$$

с выколотой точкой $z = -\frac{d}{c}$. Из вышесказанного вытекает следующая теорема.

Теорема 6. Дробно-линейная функция (12) диффеоморфно отображает $\mathbb{C}_h$-гиперболу в плоскости z на допустимую $\mathbb{C}_h$-гиперболу в плоскости w.

Литература

1. *Зверович, Э. И.* Нахождение областей сходимости и вычисление сумм степенных рядов от h-комплексного переменного / Э. И. Зверович, В. А. Павловский // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 2. – С. 189–193.
2. *Павловский, В. А.* Алгебраические уравнения с вещественными коэффициентами в кольце h-комплексных чисел / В. А. Павловский // Весці БДПУ. Сер. 3. – 2020. – № 4. – С. 25–31.
3. On h-holomorphy and h-analyticity of functions of an h-complex variable / V. A. Pavlovsky, I. L. Vasiliev // Bulletin of L. N. Gumilyov ENU. Mathematics. Computer science. Mechanics series. – 2020. – Vol. 133, № 4 – P. 19–27.

References

1. *Zverovich, E. I.* Nahozhdenie oblastej skhodimosti i vychislenie summ stepennyh ryadov ot h-kompleksnogo peremennogo / E. I. Zverovich, V. A. Pavlovskij // Ves. Nac. akad. navuk Belarusi. Ser. fiz.-mat. navuk. – 2020. – T. 56, № 2. – S. 189–193.
2. *Pavlovskij, V. A.* Algebraicheskie uravneniya s veshchestvennymi koefficientami v kol'ce h-kompleksnyh chisel / V. A. Pavlovskij // Vesci BDPU. Ser. 3. – 2020. – № 4. – S. 25–31.
3. On h-holomorphy and h-analyticity of functions of an h-complex variable / V. A. Pavlovsky, I. L. Vasiliev // Bulletin of L. N. Gumilyov ENU. Mathematics. Computer science. Mechanics series. – 2020. – Vol. 133, № 4 – P. 19–27.