Весці БДПУ. Серыя 3. 2021. № 2. С. 31–36.

УДК 517.518.126

ИНТЕГРАЛЫ ОТ *p*-КОМПЛЕКСНЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ СВОЙСТВА

И. Л. Васильев,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций БГУ;

В. В. Довгодилин,
аспирант кафедры теории функций БГУ

Поступила в редакцию 31.05.21.

UDC 517.518.126

INTEGRALS FROM *p*-COMPLEX FUNCTIONS AND THEIR PROPERTIES

I. Vasilyev,
PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Theory of Functions, BSU;

V. Dovgodilin,
Postgraduate Student of the Department of Theory of Functions, BSU

Received on 31.05.21.

В статье вводятся понятия интеграла *p*-комплексной функции, как вещественного, так и *p*-комплексного аргумента. Доказаны теоремы о равномерном приближении полиномами функций *p*-комплексного переменного. Получены аналоги теорем Морера и интегральной теоремы Коши для *p*-комплексных функций. Найдены достаточные условия существования локальной и глобальной первообразных.

Ключевые слова: кольцо *p*-комплексных чисел, дуальные числа, интегрирование *p*-комплексных функций, теорема о равномерном приближении, теорема Рунге, Теорема Морера, интегральная теорема Коши, *p*-голоморфность, первообразная.

The article introduces the notions of integral of *p*-complex function of material as well as *p*-complex argument. It proves the theorems about even approximation of functions of *p*-complex variable by polynomials. It obtains the analogues of Morera's theorems and integral theorem of Cauchy for *p*-complex functions. Sufficient conditions for existence of local and global antiderivatives.

Keywords: ring of *p*-complex numbers, dual numbers, integration of *p*-complex functions, theorem about even approximation, theorem of Runge, theorem of Morera, integral theorem of Cauchy, *p*-holomorphy, antiderivative.

Введение. В математической литературе многие публикации (см. [1]) посвящены *p*-комплексным (дуальным) числам и их применению в геометрии, механике и вычислительной математике. При этом теории функций *p*-комплексного переменного уделено недостаточно внимания. Имеющиеся результаты приведены в [2–3] и касаются в основном вопросов непрерывности и дифференцируемости *p*-комплексных функций. В работе [4] изучены свойства степенных рядов от *p*-комплексного переменного. В данной статье изучаются интегралы от *p*-комплексных функций и некоторые их приложения.

Интеграл от функций вещественного переменного. Пусть $\mathbb{C}_p$ – кольцо *p*-комплексных чисел вида $z = x + jy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, $j^2 = 0$, $j \neq 0$. В кольце $\mathbb{C}_p$ имеются делители нуля вида jc и только они. Топология на $\mathbb{C}_p$ порождается следующей нормой: $\| z \| = \| x + jy \| = \max\{| x |, | y |\}$. Эту норму будем называть ***параболической***. ***Модулем*** *p*-комплексного числа называется $| z | = \sqrt{x^2 + y^2}$. Более подробно с *p*-комплексными числами можно ознакомиться в работах [1] и [4].

Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{C}_p$, $T = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$ – разбиение $[a,b]$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\lambda(T) = \max\limits_{0 \le k \le n-1} \Delta x_k$, $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, (T, ξ) – разбиение с выделенными точками.

Определение 1. Функция f называется ***интегрируемой по Риману*** на $[a,b]$, если $\exists I \in \mathbb{C}_p$, что

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (T, \xi): \quad \lambda(T) < \delta \quad \Rightarrow \quad \| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k - I \| < \epsilon.$$

Число I называется ***интегралом Римана*** от f на $[a,b]$ и обозначается $I = \int_a^b f(x) dx = \lim\limits_{\lambda(T) \to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k$.

$R[a,b]$ – множество p-комлексных функций, интегрируемых по Риману на $[a,b]$.

Пусть $f(x)=u(x)+jv(x)$, $I=\alpha+j\beta=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b u(x)dx+j\int_a^b v(x)dx$, что равносильно $\alpha=\int_a^b u(x)dx$, $\beta=\int_a^b v(x)dx$.

Обозначим $\omega_k(f)=\sup\limits_{x',x''\in[x_k,x_{k+1}]}|f(x')-f(x'')|$ – колебание f на $[x_k,x_{k+1}]$. Из критерия Дарбу для вещественных функций вытекает

Теорема 1.

$$f\in R[a,b]\quad\Leftrightarrow\quad\lim_{\lambda(T)\to0}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(u)\Delta x_k=0,\ \lim_{\lambda(T)\to0}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(v)\Delta x_k=0.$$

Теорема 2.

$$f\in R[a,b]\Rightarrow|f|\in R[a,b].$$

Доказательство. Функция $|f|$ вещественна и положительна, следовательно,

$$\omega_k(|f|)=\sup_{x',x''\in[x_k,x_{k+1}]}\big||f(x')|-|f(x'')|\big|\le\sup_{x',x''\in[x_k,x_{k+1}]}|f(x')-f(x'')|=$$

$$=\sup_{x',x''\in[x_k,x_{k+1}]}|(u(x')-u(x''))+j(v(x')-v(x''))|\le\sup_{x',x''\in[x_k,x_{k+1}]}|u(x')-u(x'')|+$$

$$+\sup_{x',x''\in[x_k,x_{k+1}]}|v(x')-v(x'')|=\omega_k(u)+\omega_k(v).$$

Откуда следует, что при $\lambda(T)\le\delta$:

$$0\le\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(|f|)\Delta x_k\le\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(u)\Delta x_k+\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(v)\Delta x_k\le\epsilon,$$

тогда в силу критерия Дарбу $|f|\in R[a,b]$. Что и требовалось доказать.

Теорема 3.

$$f\in R[a,b]\Rightarrow\|f\|\in R[a,b].$$

Доказательство вытекает из неравенств

$$\omega_k(\|f\|)=\sup_{x',x''\in[x_k,x_{k+1}]}\big|\|f(x')\|-\|f(x'')\|\big|\le\sup_{x',x''\in[x_k,x_{k+1}]}\|f(x')-f(x'')\|\le$$

$$\le\sup_{x',x''\in[x_k,x_{k+1}]}|f(x')-f(x'')|\le\omega_k(u)+\omega_k(v).$$

Неравенства для интеграла

Пусть $f\in R[a,b]$.

Теорема 4.

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx.\tag{1}$$

Доказательство. Пусть $I=\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\lambda(T)\to0}\sum\limits_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\Delta x_k$, тогда

$$\left\|\left|\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\Delta x_k\right|-|I|\right\|\le\left|\left|\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\Delta x_k\right|-|I|\right|\le$$

$$\le\left|\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\Delta x_k-I\right|\le\sqrt2\left\|\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\Delta x_k-I\right\|,$$

откуда следует, что $\lim\limits_{\lambda(T)\to0}\left|\sum\limits_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\Delta x_k\right|=|I|$.

Нетрудно убедиться, что $|\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k| \le \sum_{k=0}^{n-1} |f(\xi_k)|\Delta x_k$, откуда, при $\lambda(T)\to 0$, получаем (1). Теорема доказана.

Теорема 5.

$$\| \int_a^b f(x)dx \| \le \int_a^b \| f(x) \| dx. \qquad (2)$$

Доказательство. При $\lambda(T)\le\delta$:

$$\left\| \| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \| - \| I \| \right\| \le \| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k - I \| \le \epsilon,$$

откуда следует, что $\lim_{\lambda(T)\to 0} \| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \| = \| I \|$. Из неравенств

$$\| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \| \le \sum_{k=0}^{n-1} \| f(\xi_k)\Delta x_k \| \le \sum_{k=0}^{n-1} \| f(\xi_k) \| \Delta x_k,$$

при $\lambda(T)\to 0$, получаем (2). Теорема доказана.

Теорема 6. Пусть $f\in R[a,b]$. Тогда функция $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ непрерывна на $[a,b]$.

Доказательство вытекает из неравенства

$$\| F(x)-F(x_0) \| \le \| \int_{x_0}^x f(x)dx \| \le \sup_{[a,b]} \| f(x) \| \, | x-x_0 |.$$

Теорема 7. Пусть $f\in C[a,b]$, тогда функция $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ дифференцируема на $[a,b]$ и $F'(x)=f(x)$.

Доказательство. Пусть $f(x)=u(x)+jv(x)$. Функции $U(x)=\int_a^x u(t)dt$, $V(x)=\int_a^x v(t)dt$ дифференцируемы на интервале (a,b) и $U'(x)=u(x)$, $V'(x)=v(x)$. Тогда $F(x)=[U(x)+jV(x)]'=u(x)+jv(x)=f(x)$. Что и требовалось доказать.

Теорема о равномерном приближении непрерывной р-комплексной функции вещественного аргумента полиномами

Теорема 8. Пусть $f:[a,b]\to\mathbb{C}_p$ непрерывна. Тогда существует последовательность полиномов $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$, равномерно сходящаяся к f на отрезке $[a,b]$.

Доказательство. Используя теорему Стоуна – Веерштрасса [5, с. 35, т. 17.20] построим последовательности полиномов $\{s_n\},\{q_n\}$ так, что

$$\forall\epsilon>0 \quad \exists n_\epsilon\in \quad \forall n\ge n_\epsilon \quad \forall x\in[a,b]: \quad \begin{cases} \| u(x)-s_n(x) \| < \epsilon/2 \\ \| v(x)-q_n(x) \| < \epsilon/2. \end{cases}$$

Построим полином $P_n(x)=s_n(x)+jq_n(x)$. Тогда, при $n>n_\epsilon$:

$$\| f(x)-P_n(x) \| = \| (u(x)+jv(x))+(s_n(x)+jq_n(x)) \| \le$$
$$\le \| u(x)-s_n(x) \| + \| v(x)-q_n(x) \| < \epsilon \quad \forall x\in[a,b].$$

Что и требовалось доказать.

Теорема о равномерном приближении полиномами р-голоморфной функции

Определение 2. Функция $f(z)=u(x,y)+jv(x,y)$ называется *p*-голоморфной в $z_0=x_0+jy_0\in\mathbb{C}_p$, если в некоторой окрестности точки (x_0,y_0) функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы и выполнены условия:

$$\begin{cases} u'_x(x,y)=v'_y(x,y) \\ u'_y(x,y)=0. \end{cases}$$

Подробнее ознакомиться с *p*-голоморфными функциями можно в работах [2–4].

Теорема 9. Пусть $D \subset \mathbb{C}_p$ – область. Функция $f: D \to \mathbb{C}_p$ p-голоморфна. $K \subset D$ – компакт. Существует последовательность полиномов, равномерно сходящаяся к f на K.

Доказательство. Для любого $z \in \mathbb{C}_p$ верно равенство $f(z) = f(x) + jyf'(x)$, где $(x, y) \in D^* = \{z = x + jy \mid z \in D\}$. Пусть K– компакт. Тогда для любого $z = x + jy \in K$ имеем: $a \le x \le b$, $|y| \le m$, где $a = \inf\limits_{z\in K} x$, $b = \sup\limits_{z\in K} x$, $m = \sup\limits_{z\in K} |y|$.

В силу теоремы 8 найдется последовательность полиномов $P_n'(x) = \dfrac{d}{dx} P_n(x)$, что

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge n_\epsilon \quad \forall x \in [a, b]: \quad \| f'(x) - P_n'(x) \| < \epsilon.$$

Рассмотрим случай $f(a) = 0$. В силу теоремы 7 полином $P_n(x)$ можно представить в виде $P_n(x) = \int_a^x P_n'(t)dt$. Для любого $z \in K$: $P_n(z) = P_n(x) + jyP_n'(x)$.

В силу теоремы 5

$$\| P_n(z) - f(z) \| = \| P_n(x) - f(x) + jy(P_n'(x) - f'(x)) \| \le$$

$$\le \| P_n(x) - f(x) \| + \| jy(P_n'(x) - f'(x)) \| \le \| P_n(x) - f(x) \| + |y| \| P_n'(x) - f'(x) \| \le$$

$$\le \| \int_a^x (P_n'(t) - f'(t))dt \| + |y| \epsilon \le \sup_{x\in[a,b]} \| P_n'(x) - f'(x) \| (b - a) + m\epsilon \le \epsilon(b - a + m),$$ для любого $n \ge n_\epsilon$

и всех $z \in K$. Если $f(a) \ne 0$, то рассмотрим функцию $\left(f(z) - f(a)\right)$. Теорема доказана.

Интеграл от p-комплексной функции в общем случае.

Пусть $f: D \subset \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}_p$, где $D \subset \mathbb{C}_p$ – область, $\Gamma \subset D$ – кусочно-гладкая кривая с концами a и b, ориентированная от a к b. Обозначим $D^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : z = x + jy \in D\}$.

Выберем точки $z_k \in \Gamma$, $k = \overline{0, n}$ так, что $z_0 = a$, $z_n = b$. $T = \{a = z_0, z_1, ..., z_n = b\}$ – разбиение Γ, $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, $\lambda(T) = \max\limits_{0\le k\le n-1} |\Delta z_k|$. Выберем $\xi_k \in \widehat{z_k, z_{k+1}}$.

Определение 3. Функция f называется **интегрируемой по Риману** на Γ, если $\exists I \in \mathbb{C}_p$, что

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (T, \xi): \quad \lambda(T) < \delta \Rightarrow \quad \| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta z_k - I \| < \epsilon.$$

Число I называется ***интегралом Римана*** от f на Γ и обозначается $I = \int_\Gamma f(z)dz = \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta z_k$.

$R(\Gamma)$ – множество p-комлексных функций, интегрируемых по Риману по кривой Γ.

Теорема 10. Пусть $|f(z)| \le M$ для любого $z \in \Gamma$. Тогда

$$\left| \int_\Gamma f(z)dz \right| \le M\, l(\Gamma),$$

где $l(\Gamma)$ – длина дуги кривой Γ.

Доказательство вытекает из цепочки неравенств

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta z_k \right| \le \sum_{k=0}^{n-1} |f(\xi_k)| |\Delta z_k| \le M \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta z_k| \le M\, l(\Gamma).$$

Замечание 1. Пусть $f(z) = f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$. Тогда

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma (u + jv)(dx + jdy) = \int_\Gamma udx + j\int_\Gamma (vdx + udy). \tag{3}$$

Обзначим через $H_p(D)$ множество функций, p-голоморфных в D.

Теорема 11 (аналог интегральной теоремы Коши). Пусть $f \in H_p(D)$ и непрерывна в $\overline{D} = D \cup \partial D$, где ∂D – простая кусочно-гладкая замкнутая кривая, тогда

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0.$$

Доказательство. Для p-голоморфной функции верно: $u'_y = 0$, $u'_x = v'_y$. В силу формулы Грина и (3)

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma udx + j\int_\Gamma (vdx + udy) =$$
$$= \iint_{D^*} (-u'_y)dxdy + \iint_{D^*} (u'_x - v'_y)dxdy = 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 12 (аналог теоремы Морера). Пусть $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$, $u(x,y),\ v(x,y) \in C^1(D^*)$ и для произвольного треугольника $\Delta \subset D$ верно $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$. Тогда $f \in H_p(D)$.

Доказательство. Допустим f не является p-голоморфной функцией в точке $a \in D$. Тогда найдется окрестность $U(a) \subset D$ такая, что $(u'_x - v'_y)^2 + (u'_y)^2 \neq 0$ для всех (x,y), что $z = x + jy \in U(a)$. Пусть $\Delta \subset U(a)$ произвольный треугольник и $\Delta^* = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : z = x + jy \in \Delta\}$. Тогда в силу формулы Грина

$$0 = \int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\partial\Delta} udx + j\int_{\partial\Delta} (vdx + udy) =$$
$$= \iint_{\Delta^*} (-u'_y)dxdy + \iint_{\Delta^*} (u'_x - v'_y)dxdy \neq 0.$$

Полученное противоречие и доказывает теорему.

Существование первообразных

Теорема 13. Пусть $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ непрерывна в области $D \subset \mathbb{C}_p$ и не является в ней делителем нуля, а для произвольного треугольника $\Delta \subset D$ верно $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$. Тогда для любой $a \in D$ найдется открытая окрестность $U(a) \subset D$ такая, что функция $F(z) = \int_a^z f(\tau)d\tau$ (интеграл берется по произвольному отрезку $[a,z] \subset U(a)$) p-голоморфна в $U(a)$ и $F'(z) = f(z)$ для любого $z \in U(a)$.

Доказательство. Пусть $U(a)$ – окрестность точки $a \in D$, $z \in U(a)$ и h не является делителем нуля и достаточно мало так, что треугольник с вершинами a, z, $z+h$ целиком лежит в $U(a)$. Имеем, что

$$\int_a^z f(\tau)d\tau + \int_z^{z+h} f(\tau)d\tau = \int_a^{z+h} f(\tau)d\tau,$$

тогда

$$\left\| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right\| = \left\| \frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(\tau)d\tau - \frac{f(z)}{h}\int_z^{z+h} d\tau \right\| =$$
$$= \left\| \frac{1}{h}\int_z^{z+h} (f(\tau) - f(z))d\tau \right\| \le \left| \frac{1}{h}\int_z^{z+h} (f(\tau) - f(z))d\tau \right| \le$$
$$\le \sup_{[z;z+h]} |f(\tau) - f(z)| \underset{\|h\|\to 0}{\to} 0.$$

Отсюда и следует $F'(z) = f(z)$. Теорема доказана.

Теорема 14. Пусть $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ p-голоморфна в односвязной области $D \subset \mathbb{C}_p$ и не является в ней делителем нуля. Тогда в D существует глобальная первообразная для f, которая представима в виде $F(z) = \int_a^z f(\tau)d\tau$, где интеграл берется по произвольной кусочно-- гладкой кривой с концами в точках a и z, целиком лежащей в D.

Доказательство. В условиях теоремы дифференциалы (udx) и $(vdx + udy)$ имеют глобальные первообразные в области D^* такие, что $dU = udx$ и $dV = vdx + udy$. Пусть

$F(z)=U(x,y)+jV(x,y)$, тогда $U'_x=V'_y=u$ и $U'_y=0$, а значит функция F p-голоморфна в D. Таким образом, $F'(z)=U'_x+jV'_x=u(x,y)+jv(x,y)=f(z)$. Откуда и следует утверждение теоремы.

Следствие (формула Ньютона – Лейбница). В условиях теоремы 14 интеграл от f по любой кусочно-гладкой кривой Γ с концами a,b, целиком лежащей в D и сориентированной от a к b, не зависит от формы этой кривой, а зависит лишь от положения ее концов. При этом выполняется аналог формулы Ньютона – Лейбница

$$\int_\Gamma f(z)dz=F(z)\,|_a^b=F(b)-F(a).$$

Заключение. В статье изучены свойства интеграла от функции p-комплексного переменного. Доказаны теоремы о равномерном приближении полиномами функций p-комплексного переменного, в частности аналог теоремы Рунге для p-голоморфных функций. Также получены аналоги теорем Морера и интегральной теоремы Коши для p-комплексных функций. Найдены достаточные условия существования локальной и глобальной первообразных.

Литература

1. *Яглом, И. М.* Комплексные числа и их применение в геометрии / И. М. Яглом. – Изд. 2-е, стереотипное. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 192 с.
2. *Messelmi, F.* Analysis of Dual Functions / F. Messelmi // Annual Review of Chaos Theory, Bifurcations and Dynamical Systems Vol. 4. – 2013. – P. 37–54.
3. Kyle DenHartigh, Rachel Flim, Liouville theorems in the Dual and Double Planes / Kyle DenHartigh, Rachel Flim // Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal, Flim Volume 12, No. 2, Fall. – 2011. – P. 37–60.
4. *Довгодилин, В. В.* Сходимость на множестве p-комплексных чисел и свойства p-комплексных степенных рядов / В. В. Довгодилин // Весці БДПУ. Серыя 3. – 2020. – № 4. – С. 32–39.
5. *Зверович, Э. И.* Вещественный и комплексный анализ: в 6 ч. Ч. 4. Функциональные последовательности и ряды. Интегралы, зависящие от параметра. Ч. 5. Кратные интегралы. Интегралы по многообразиям / Э. И. Зверович. – Минск : Вышэйшая школа, 2008. – 365 с.

References

1. *Yaglom, I. M.* Kompleksnye chisla i ih primenenie v geometrii / I. M. Yaglom. – Izd. 2-e, stereotipnoe. – M. : Editorial URSS, 2004. – 192 c.
2. *Messelmi, F.* Analysis of Dual Functions / F. Messelmi // Annual Review of Chaos Theory, Bifurcations and Dynamical Systems Vol. 4. – 2013. – P. 37–54.
3. Kyle DenHartigh, Rachel Flim, Liouville theorems in the Dual and Double Planes / Kyle DenHartigh, Rachel Flim // Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal, Flim Volume 12, No. 2, Fall. – 2011. – P. 37–60.
4. *Dovgodilin, V. V.* Skhodimost' na mnozhestve p-kompleksnyh chisel i svojstva p-kompleksnyh stepennyh ryadov / V. V. Dovgodilin // Vesci BDPU. Seryya 3. – 2020. – № 4. – C. 32–39.
5. *Zverovich, E. I.* Veshchestvennyj i kompleksnyj analiz: v 6 ch. Ch. 4. Funkcional'nye posledovatel'nosti i ryady. Integraly, zavisyashchie ot parametra. Ch. 5. Kratnye integraly. Integraly po mnogoobraziyam / E. I. Zverovich. – Minsk : Vyshejshaya shkola, 2008. – 365 c.