А. А. Черняк, Универсальная графовая модель циклических сетей и их надежность, *Пробл. передачи информ.*, 1999, том 35, выпуск 2, 90–99

ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

**Том 35** **1999** **Вып. 2**

УДК 621.394.74:51

© 1999 г. **А. А. Черняк**

# УНИВЕРСАЛЬНАЯ ГРАФОВАЯ МОДЕЛЬ ЦИКЛИЧЕСКИХ СЕТЕЙ И ИХ НАДЕЖНОСТЬ

В данной статье теория доминирования распространяется на циклические монотонные графы, являющиеся универсальной графовой моделью для анализа надежности структурно сложных систем. В частности, получена формула расчета надежности произвольного монотонного графа, сводящая системный уровень анализа надежности к элементному уровню. В качестве следствия доказано, что для любого фиксированного целого $k$ задача определения надежности монотонных графов степени $k$ разрешима за время, полиномиально зависящее от размерности графов и числа их ациклических монотонных подграфов. В то же время показано, что задача определения надежности является $NP$-трудной даже в классе ациклических $dc$-тривиальных монотонных графов степени 2, в которых число минимальных ациклических подграфов пропорционально числу вершин графов.

## § 1. Введение

Разнородность традиционных надежностных моделей сложных систем с сетевой структурой привела к понятию монотонных графов [1], допускающих в вершинах произвольную логику функционирования. Общность этой модели определяется тем, что подкласс монотонных графов – $dc$-тривиальные графы – включает в себя в качестве специальных случаев все классические модели мультитерминальной надежности.

В теории надежности особую роль играет функция доминирования, впервые использованная в [2] для получения формул надежности 2-терминальных сетей. С помощью функции доминирования были объяснены теоретические закономерности алгоритмов, основанных на стратегии факторизации [3, 4]. В [5, 6] было введено понятие локального доминирования и получена формула, эффективно вычисляющая доминирование ациклических (т.е. содержащих циклы) монотонных графов через локальные доминирования их вершин. Это позволило выявить единую комбинаторную природу ранее известных фактов [2, 7–10], касающихся доминирования и надежности сетей без циклов. Однако распространение этих результатов на циклические монотонные графы оставалось нерешенной задачей.

Данная статья восполняет этот пробел. Доказано, что доминирование циклического графа равно нулю (теорема 1). Благодаря этому результату получена топологическая формула расчета надежности произвольного монотонного графа $G$, сводящая системный уровень анализа надежности систем к элементному уровню (теорема 2). При этом длина символьного выражения надежности равна числу ациклических монотонных подграфов графа $G$, а сложность вычисления определяется сложностью вычисления локальных доминирований. В качестве следствия доказано, что для любого фиксированного $k$ задача определения надежности монотонных графов степени $k$ разрешима за время, полиномиально зависящее от размерности графов и числа их ациклических монотонных подграфов (следствие 3). В определенном смысле этот результат является оптимальным в классе монотонных графов, так как показано, что задача определения надежности является $NP$-трудной даже в классе ациклических $dc$-тривиальных монотонных графов степени 2, в которых число минимальных путей (т.е. минимальных ациклических монотонных подграфов) пропорционально их размерности (теоремы 2, 3). Это означает, в частности, что не существует алгоритма решения задачи надежности для таких графов с временной сложностью, полиномиально зависящей от числа их минимальных сечений (или минимальных путей), если $P \neq NP$ (следствие 4) (даже в случае $P = NP$ существование такого алгоритма весьма проблематично [11]).

### § 2. Бинарные системы и монотонные графы: основные определения

Пусть $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ – множество элементов, $\varphi: 2^E \to \{0, 1\}$ – монотонная функция (т.е. $A \subseteq B$ влечет $\varphi(A) \leq \varphi(B)$ для любых $A$, $B \in 2^E$). Пара $[E, \varphi]$ называется бинарной системой, $E$ – носителем системы, $\varphi$ – ее структурной функцией. Подмножество $T \subseteq E$ является путем (сечением) системы $[E, \varphi]$, если $\varphi(T) = 1$ ($\varphi(E \backslash T) = 0$). Минимальные по включению пути и сечения называются минимальными. Если $\mathcal{P}$ и $\mathcal{R}$ – множества минимальных путей и сечений, то бинарная система $[E, \varphi]$ может быть задана в эквивалентной форме парой $[E, \mathcal{P}]$ (или парой $[E, \mathcal{R}]$), называемой клаттером путей (или сечений). Если мощности всех минимальных путей из $\mathcal{P}$ равны $k$, то система $[E, \varphi]$ называется $k$-униформой.

Система называется когерентной, если каждый элемент в ней принадлежит некоторому минимальному пути, т.е. является "существенным" для ее надежности. В дальнейшем все системы будут считаться когерентными.

Если предположить, что каждый элемент из $E$ может отказывать с вероятностью $1 - p$, то надежность $\mathrm{Rel}\,[E, \varphi]$ системы $[E, \varphi]$ есть вероятность $\Pr\{\varphi(T) = 1\}$, где $T$ – множество всех неотказавших (исправных) элементов из $E$, $\Pr(T)$ – произведение вероятностей исправного состояния всех элементов из $T$, $|X|$ – мощность множества X.

Целочисленная функция $\delta$, заданная на булеане $2^E$, называется функцией доминирования системы $[E, \varphi]$, если

$$\varphi(A) = \sum_{B \subseteq A} \delta(B)$$

для любого $A \in 2^E$. При этом величина $d[E, \varphi] = \delta(E)$ называется доминированием системы $[E, \varphi]$.

Все рассматриваемые графы считаются ориентированными. $VG$, $DG$ – множества вершин и дуг графа $G$ соотвественно, $uw$ – дуга, направленная из $u$ в $w$, $D^+(v, G)(D^-(v, G))$ – множество дуг графа $G$, направленных в вершину $v$ (из вершины $v$). Величина $|D^+(v, G)|$ называется степенью вершины $v$ в $G$. Максимальная степень вершин из $G$ называется степенью графа $G$. Последовательность дуг $e_i = v_i v_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n$, называется простой цепью, или $(v_1, v_{n+1})$-цепью, если все вершины $v_1, \ldots, v_{n+1}$ различны. Если при этом допускается, что $v_1 = v_{n+1}$, то такая последовательность дуг называется циклом. Если граф $G$ содержит хотя бы один цикл, то он называется циклическим, в противном случае – ациклическим.

Если $P = e_1, \ldots, e_n$ – $(v_1, v_{n+1})$-цепь (или цикл), то через $VP$ обозначается множество вершин $\{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$. $G$ называется $(s, t)$-графом, если $s, t \in VG, D^-(t, G) = D^+(s, G) = \varnothing$, и для любой вершины $v \in VG \backslash \{s, t\}$ $D^-(v, G) \neq \varnothing, D^+(v, G) \neq \varnothing$.

Дадим теперь определение монотонного $(s, t)$-графа. С каждой вершиной $v$, $v \neq s$, графа $G$ свяжем множество $\mathrm{th}(v, G)$ так называемых пороговых наборов вершины $v$ в $G$ – подмножеств множества $D^+(v,G)$, обладающих следующими свойствами:

а) ни один пороговый набор не содержится в другом;

б) каждый элемент из $D^+(v,G)$ принадлежит некоторому пороговому набору из $\mathrm{th}(v,G)$.

Пара $[D^+(v,G), \mathrm{th}\,(v,G)]$ может быть определена как локальный клаттер путей вершины $v$ в $G$ с локальным доминированием $d(v,G) = d[D^+(v,G), \mathrm{th}\,(v,G)]$. Полагается также, что $d(s,G) = 1$. Подграф $H$ графа $G$ называется монотонным подграфом, если $H$ – $(s,t)$-граф, и для каждой вершины $v \in VH \backslash \{s\}$ множество $\mathrm{th}\,(v,H)$ пороговых наборов вершины $v$ в $H$ индуцируется множеством $\mathrm{th}\,(v,G)$, т.е. $\mathrm{th}\,(v,H)$ состоит в точности из тех наборов в $\mathrm{th}\,(v,G)$, которые содержатся в $D^+(v,H)$, и $D^+(v,H)$ есть объединение этих наборов. Монотонный подграф $P$ графа $G$ называется минимальным путем в $G$, если для каждой вершины $v \in VP \backslash \{s\}$ $|\mathrm{th}\,(v,P)| = 1$. Если теперь $\mathcal{P}(G) = \{P_1,\ldots,P_m\}$ – множество минимальных путей в $G$, каждый $P_i$ – ациклический $(i = 1,\ldots,m)$ и $D\mathcal{P}(G) = \{DP_1,\ldots,DP_m\}$, то клаттер путей в $[DG; D\mathcal{P}(G)]$ называется монотонным $(s,t)$-графом. Для краткости система $[DG, D\mathcal{P}(G)]$ будет обозначаться через $G$; $d(G) = d[DG, D\mathcal{P}(G)]$, $\mathrm{Rel}\,(G) = \mathrm{Rel}\,[DG, D\mathcal{P}(G)]$.

Вершина $v$ называется $d$-вершиной в $G$, если $|\mathrm{th}\,(v,G)| > 1$, и все пороговые наборы в $\mathrm{th}\,(v,G)$ одноэлементные. Вершина $v$ называется $c$-вершиной в $G$, если $v = s$ или $|\mathrm{th}\,(v,G)| = 1$. Монотонный $(s,t)$-граф $G$ называется $dc$-тривиальным $(s,t)$-графом, если любая его вершина является либо $d$-вершиной, либо $c$-вершиной [12, 13].

Рассмотрим теперь две классические графовые модели, применяемые в задачах мультитерминальной надежности.

*2-терминальные графы* [2, 7]. Это $(s,t)$-граф $G$, в котором минимальными путями являются $(s,t)$-цепи. Другими словами, $G$ – это $dc$-тривиальный $(s,t)$-граф, в котором любая вершина со степенью, большей 1, является $d$-вершиной.

*Исток-К-терминальные графы* [8, 9]. В графе $H$ задается входная вершина $s$ (исток) и множество $K = \{t_1,\ldots,t_r\}$ выходных вершин, а минимальными путями являются $K$-деревья, т.е. минимальные (по включению) ордеревья с корнем $s$, содержащие $K$. Добавим к $H$ новую вершину $t$ и $r$ новых дуг $t_i t$, $i = 1,\ldots,r$. Полученный граф обозначим через $G$. Тогда $G$ – $dc$-тривиальный $(s,t)$-граф, в котором любая вершина, отличная от $t$ и имеющая степень больше единицы, является $d$-вершиной.

## § 3. Вспомогательные утверждения

Лемма 1 [14]. *Задача определения всех рациональных коэффициентов полинома*

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} g_i x^i$$

*полиномиально сводима к задаче определения значений этого полинома на некотором наборе из $n+1$ различных рациональных чисел.*

Лемма 2 [3]. *Для бинарной системы $[E,\varphi]$ и любого $A \in 2^E$*

$$\delta(A) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} D_k,$$

*где $D_k$ равно числу $k$-элементных наборов минимальных путей из $\mathcal{P}$, объединение которых есть $A$, $m = |P|$.*

Л е м м а 3 [15]. *Задача определения доминирования в произвольном классе бинарных систем полиноминально сводима к соответствующей задаче определения надежности в этом классе систем.*

Л е м м а 4 [15]. *Задача определения доминирования NP-трудна в классе 2-униформных систем, заданных клаттерами путей.*

Л е м м а 5 [13]. *Задача определения доминирования ациклических монотонных $(s,t)$-графов является #P-полной.*

Л е м м а 6 [6]. *Пусть $G$ – ациклический монотонный $(s,t)$-граф. Тогда*

$$d(G)=\prod_{v\in VG} d(v,G).$$

Л е м м а 7 [5]. *Если $[E,\varphi]$ – 1-униформная система, то*

$$d[E,\varphi]=(-1)^{|E|-1}.$$

Л е м м а 8 [1]. *Пусть $G$ – монотонный $(s,t)$-граф. Тогда множество $\mathcal{A}(G)$ его ациклических монотонных подграфов может быть определено за время* $(|DG|\ |\mathcal{A}(G)|)$.

## § 4. Доминирование циклических графов

Пусть $G$ – монотонный $(s,t)$-граф. Формацией графа $G$ называется подмножество его минимальных путей, объединение которых есть $G$. При этом минимальные пути называются компонентами формации. Формация называется четной или нечетной в зависимости от четности числа ее компонент. В силу леммы 2 доминирование $d(G)$ графа $G$ есть разность между числом нечетных и числом четных формаций графа $G$. Если $G$ не является когерентным графом, то полагается $d(G)=0$.

Множество минимальных путей графа $G$ назовем покрытием подграфа $H$, если каждая дуга из $H$ принадлежит хотя бы одному минимальному пути из этого множества. (В дальнейшем всюду считается, что покрытия состоят только из минимальных путей графа $G$.)

Л е м м а 9. *Пусть $G$ – циклический монотонный $(s,t)$-граф. Тогда существует пара $(L,F)$ такая, что $L$ – цикл в $G$, $F$ – минимальный путь $G$, не принадлежащий ни одному минимальному (по включению) покрытию цикла $L$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Назовем дугу $e=wv$ в графе $G$ неприводимой, если она содержится в каждом пороговом наборе вершины $v$; в противном случае $e$ будет называться приводимой дугой.

Предположим вначале, что существует цикл $L$ и минимальный путь $F$ такие, что $F$ не содержит приводимых дуг графа $G$, принадлежащих $L$. Предположим также, что $\mathcal{P}$ – минимальное покрытие цикла $L$, содержащее $F$. Тогда существует дуга $e_1=u_1u_2$ в $L\cap DF$, не принадлежащая ни одному минимальному пути из $\mathcal{P}\backslash\{F\}$.

Положим $L=e_1,\ldots,e_n$, где $e_i=u_iu_{i+1},\ i=1,\ldots,n,\ u_1=u_{n+1}$. Пусть $k$ – наименьшее такое $i$, что $e_i\notin DF$ (такое $k$ существует ввиду ацикличности $F$). Тогда $e_k$ принадлежит некоторому минимальному пути $A$ из $\mathcal{P}$, а дуги $e_1,\ldots,e_{k-1}$ неприводимы. Из определений неприводимости и минимального пути следует истинность импликации

$$(u_{i+1}\in VA)\Rightarrow(e_i\in DA).$$

Отсюда $e_1\in DA$. Противоречие. Итак, остается доказать существование пары $(L,F)$ такой, что минимальный путь $F$ не содержит приводимых дуг цикла $L$.

Для доказательства этого факта понадобится следущая процедура $\mathrm{Proc}(t,\mathcal{L})$ построения подграфа $H$ графа $G$ с множеством вершин $VH$ и множеством дуг $DH$ в соответствии с некоторым правилом выбора $\mathcal{L}$.

Шаг 1. Объявить вершину $s$ граничной, а вершину $t$ потенциальной. Положить $DH=\varnothing$, $u=t$, и перейти к шагу 2.

Шаг 2. Объявить вершину $u$ граничной. Выбрать пороговый набор $T(u)\in$ $\in \mathrm{th}\,(u,G)$ в соответствии с правилом $\mathcal{L}$ и положить $DH=DH\cup T(u)$. Множество начальных вершин дуг из $T(u)$ объявить потенциальными вершинами. Перейти к шагу 3.

Шаг 3. Среди потенциальных вершин, не являющихся граничными, выбрать произвольную вершину $u$. Если таковых вершин нет, то обозначить через $VH$ множество потенциальных вершин и завершить процедуру; иначе – перейти к шагу 2.

Пусть теперь $C$ – произвольный цикл в $G$. Ввиду когерентности $G$ существует $(s,t)$-цепь $R=q_1,\ldots,q_n$, имеющая общие дуги с $C$. В множестве $VR\cap VC$ возьмем две вершины $v_r$ и $v_l$, ближайшие в цепи $R$ к вершинам $s$ и $t$ соответственно. Пусть $C_1$ – последовательность дуг цикла $C$, составляющих $(v_r,v_l)$-цепь; $q_{r-1}$ и $q_l$ – дуги цепи $R$, направленные в вершину $v_r$ и из вершины $v_l$ соответственно. Очевидно, $P=q_1,\ldots,q_{r-1},\ C_1,q_l,\ldots,q_n$ – $(s,t)$-цепь в $G$, причем $VP\cap VC=VC_1$. Отсюда следует истинность импликации

$$(u\in VC\cap VP,\ u\neq v_r,\ vu\text{— дуга цикла}C)\Rightarrow(vu\in P\cap C). \tag{1}$$

Обозначим через $A$ подграф, построеный процедурой $\mathrm{Proc}(t,\mathcal{L}_1)$ в соответствии со следующим правилом выбора $\mathcal{L}_1$:

если $u\in VP$, то $T(u)\cap P\neq\varnothing$;

если $u\in VC\backslash VP$, то $T(u)\cap C\neq\varnothing$;

в остальных случаях выбор порогового набора $T(u)$ произволен.

По определению правила $\mathcal{L}_1$, $P\subseteq DA$. Поэтому $A$ является $(s,t)$-подграфом. Отсюда, по определению процедуры $\mathrm{Proc}(t,\mathcal{L})$, $A$ является минимальным путем.

Обозначим теперь через $B$ подграф, построенный процедурой $\mathrm{Proc}(t,\mathcal{L}_2)$ в соответствии со следующим правилом выбора $\mathcal{L}_2$ (здесь $Q=q_1,\ldots,q_{r-1}$):

если $|\mathrm{th}\,(u,G)|>1$, $u\in VA$, $u\notin VQ$, то $T(u)\neq D^+(u,A)$;

если $vu$ – приводимая дуга цикла $C$, то $vu\notin T(u)$;

если $u\in VQ$, то $T(u)\subseteq DA$;

в остальных случаях выбор порогового набора $T(u)$ произволен.

Первые два условия правила $\mathcal{L}_2$ непротиворечивы. Действительно, если $vu$ – приводимая дуга цикла $C$, $u\in VA$, $u\notin VQ$, то ввиду (1) и правила выбора $\mathcal{L}_1$, $vu\in$ $\in DA$, т.е. всегда можно указать пороговый набор $T(u)$, одновременно не содержащий $vu$ и не совпадающий с $D^+(u,A)$.

Если $B$ является минимальным путем, то пара $(C,B)$ – искомая, ибо $B$ не содержит приводимых дуг цикла $C$. В противном случае, $B$ не содержит $(s,t)$-цепей, и следовательно, $VB\cap VQ=\varnothing$. Отсюда истинна импликация

$$(\mathrm{th}\,(u,G)>1,u\in VB\cap VA)\Rightarrow(D^+(u,B)\neq D^+(u,A))$$

(см. определение правила выбора $\mathcal{L}_2$). Поэтому каждой вершине $u\in B$ можно поставить в соответствие дугу $e(u)$ следующим образом:

если $|\ \mathrm{th}\,(u,G)\ |>1$, то $e(u)\in D^+(u,B)\backslash D^+(u,A)$;

если $|\ \mathrm{th}\,(u,G)\ |=1$, то $e(u)\in D^+(u,B)$.

Обозначим через $R$ подграф графа $B$ с множеством дуг $\{e(u):u\in VB\}$. Пусть $N$ – некоторый цикл графа $R$ (такой цикл существует, так как $R$ не содержит $(s,t)$-цепей и $D^+(u,R)\neq\varnothing$ для всех $u\in VR$). Если $e(u)=wu$ – приводимая дуга цикла $N$, то $|\mathrm{th}\,(u,G)|>1$, и следовательно, $e(u)\notin DA$. Поэтому пара $(N,A)$ – искомая. ▲

Если $\mathcal{P}$ – некоторое множество конечных множеств, то через $\mathrm{od}\,(\mathcal{P})$ и $\mathrm{ev}\,(\mathcal{P})$ будем обозначать количество элементов из $\mathcal{P}$ нечетной и четной мощности соответственно.

Теорема 1. *Пусть $G$ – циклический монотонный $(s,t)$-граф. Тогда $d(G)=0$.*

Доказательство. Среди всех циклических монотонных графов, доминирование которых отлично от нуля, выберем граф $G$ с наименьшим числом дуг. Согласно лемме 9 существует пара $(L,F)$ такая, что $L$ – цикл в $G$, $F$ – минимальный путь, не принадлежащий ни одному минимальному покрытию цикла $L$. Пусть $\mathcal{P}_1$ – множество формаций графа $G$, не содержащих $F$; $\mathcal{P}_2$ - множество формаций $G$, полученных добавлением к каждой формации из $\mathcal{P}_1$ минимального пути $F$; $\mathcal{P}_3$ – множество всех остальных формаций графа $G$ (каждая из них содержит $F$). Очевидно, $\mathrm{od}\,(\mathcal{P}_1)=\mathrm{ev}\,(\mathcal{P}_2)$, $\mathrm{od}\,(\mathcal{P}_2)=\mathrm{ev}\,(\mathcal{P}_1)$.

Пусть теперь $\mathcal{E}$ - множество подмножеств минимальных путей, полученных удалением минимального пути $F$ из каждой формации $\mathcal{P}_3$. Тогда каждый элемент из $\mathcal{E}$ определяет некоторый собственный подграф графа $G$ (по определению $\mathcal{P}_3$). Пусть $\{H_i : i=1,\ldots,n\}$ – множество таких подграфов. Согласно выбору пары $(L,F)$ каждый $H_i$ содержит цикл $L$. Но тогда, по индуктивному предположению, $d(H_i)=0$, $i=1,\ldots,n$. Далее,

$$d(G)=\sum_{i=1}^{3}(\mathrm{od}\,(\mathcal{P}_i)-\mathrm{ev}\,(\mathcal{P}_i))=(\mathrm{od}\,(\mathcal{P}_3)-\mathrm{ev}\,(\mathcal{P}_3))=$$
$$=-(\mathrm{od}\,(\mathcal{E})-\mathrm{ev}\,(\mathcal{E}))=-\sum_{i=1}^{n}d(H_i)=0.$$

Противоречие. ▲

Следствие 1 [2, 7, 10]. *Доминирование циклического 2-терминального графа равно нулю.*

Следствие 2 [7–9]. *Доминирование циклического исток-К-терминального графа равно нулю.*

Обозначим через $\mathcal{T}(G)$ множество монотонных подграфов графа $G$, а через $\mathcal{A}(G)$ множество ациклических монотонных подграфов графа $G$.

Теорема 2. *Пусть $G$ – монотонный $(s,t)$-граф. Тогда*

$$\mathrm{Rel}\,(G)=\sum_{H\in\mathcal{A}(G)}d(H)\mathrm{Pr}\,(DH),$$

*где*

$$d(H)=\prod_{v\in VH}d(v,H).$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{P}(G)=\{P_1,\ldots,P_m\}$ – множество минимальных путей графа $G$. Согласно принципу включения-исключения [16],

$$\mathrm{Rel}\,(G)=\sum_i \mathrm{Pr}\,(DP_i)-\sum_{i<j}\mathrm{Pr}\,(DP_i\cup DP_j)+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{n-1}\mathrm{Pr}\,(DP_1\cup\ldots\cup DP_m). \tag{2}$$

По определению $H$ является монотонным подграфом графа $G$, если и только если $H=P_{i_1}\cup P_{i_2}\cup\ldots\cup P_{i_r}$.

С учетом этого факта правую часть в (2) можно записать в виде

$$\sum_{H\in\mathcal{T}(G)} \Pr(DH)(\operatorname{od} f(H) - \operatorname{ev} f(H)) = \sum_{H\in\mathcal{T}(G)} \Pr(DH)d(H),$$

где $\operatorname{od} f(H)$ и $\operatorname{ev} f(H)$ обозначают число нечетных и четных формаций графа $H$ соответственно. Отсюда в силу теоремы 1

$$\operatorname{Rel}(G) = \sum_{H\in\mathcal{A}(G)} d(H)\Pr(DH),$$

Остальное следует из леммы 6. ▲

Из теоремы 2 и леммы 8 непосредственно вытекает

Следствие 3. *Для любого фиксированного целого $k$ задача определения надежности в классе монотонных графов степени $k$ разрешима за время, полиномиально зависящее от размерности графов и числа их ациклических монотонных подграфов.*

Теорема 3. *Задача определения надежности является $NP$-трудной в классе ациклических $dc$-тривиальных $(s,t)$-графов степени 2 с числом минимальных сечений, пропорциональным их размерности.*

Доказательство. Пусть $H$ – двудольный граф с долями $U = \{u_1,\ldots,u_m\}$, $W = \{w_1,\ldots,w_n\}$, дуги которого направлены из вершин доли $W$ в вершины доли $U$, и степени всех вершин из $U$ равны 2. Добавим к $H$ множество вершин $\{s, v_1,\ldots,v_m\}$ и множество дуг

$$A = \{sw_i : i = 1,\ldots,n\},\ B = \{u_iv_i, v_{j-1}v_j : i = 1,\ldots,m,\ j = 2,\ldots,m\},$$

положив $t = v_m$. Полученный $(s,t)$-граф обозначим $G$. Объявим вершины из $VG\backslash U$ $c$-вершинами, а вершины из $U$ $d$-вершинами. Определенный таким образом граф $G$ является ациклическим $dc$-тривиальным $(s,t)$-графом степени 2. Подмножество $S \subseteq W$ назовем дольно-доминирующим в $W$, если для любой вершины $u \in U$ найдется вершина $w \in S$ такая, что $wu \in DH$.

Пусть $F$ – монотонный $(s,t)$-подграф графа $G$. Согласно определению монотонного подграфа должны выполняться следующие условия: $B \subseteq DF$, множество концевых вершин всех дуг из $DF \cap DH$ совпадает с $U$, множество $S$ начальных вершин всех дуг из $DF \cap DH$ совпадает с множеством концевых вершин всех дуг из $DF \cap A$. Если к тому же $DF$ – минимальный путь в $G$, то никакие две дуги из $DF \cap DH$ не будут иметь общей концевой вершины, откуда

$$\mid DF \cap DH \mid = \mid U \mid = m.$$

В итоге заключаем, что для минимального пути $DF$

$$\mid DF \mid = m + \mid B \mid + \mid S \mid, \tag{3}$$

причем $S$ является дольно-доминирующим множеством в $W$.

Далее,

$$\operatorname{Rel}(G) = \sum_{i=0}^{q} M_i p^i (1-p)^{q-i} = (1-p)^q \sum_{i=0}^{q} M_i \left(\frac{p}{1-p}\right)^i, \tag{4}$$

где $q = |DG|$, $M_i$ - число путей в $G$ мощности $i$, $p$ - вероятность исправности каждой дуги графа $G$. Обозначим через $k$ наименьший индекс отличного от нуля коэфициента $M_i$ в (4). Применяя лемму 1 к полиному (4), заключаем, что задача определения числа $k$ полиномиально сводима к задаче определения $\mathrm{Rel}\,(G)$. Но тогда (в силу (3)) и задача определения мощности наименьшего дольно-доминирующего множества в $W$ графа $H$, являющаяся $NP$-трудной [11], полиномиально сводится к задаче вычисления $\mathrm{Rel}\,(G)$. Остается показать, что число минимальных сечений $G$ пропорционально $|DG|$.

Так как произвольное подмножество $T \subseteq DG$ является сечением, если и только если $T$ имеет непустое пересечение с каждым минимальным путем, то верно следующее:

а) каждая дуга из $B$ является минимальным сечением;

б) в каждом наборе дуг вида

$$\{sw_i, sw_j, w_iu_s, w_ju_s\}$$

любая из четырех пар

$$\{sw_i, sw_j\}, \{w_iu_s, w_ju_s\}, \{sw_i, w_ju_s\}, \{sw_j, w_iu_s\} \tag{5}$$

является минимальным сечением;

в) каждое сечение, не содержащее дуг из $B$, должно содержать по крайней мере одну из пар (5) хотя бы одного из наборов дуг упомянутого выше вида.

Из перечисленных свойств следует, что число минимальных сечений в $G$ равно $O(n)$. ▲

Теорема 4. *Задача определения надежности является $NP$-трудной в классе ациклических $dc$-тривиальных $(s,t)$-графов степени 2 с числом минимальных путей, пропорциональным их размерности.*

Доказательство. Докажем полиномиальную сводимость к этой задаче задачи определения доминирования 2-униформного клаттера путей $[E, \mathcal{P}]$. Пусть $H$ – двудольный граф с долями

$$U = \{u_1, \ldots, u_m\}, W = \{w_1, \ldots, w_n\}, \quad n = |E|, \quad m = |\mathcal{P}|,$$

множество дуг которого определяется в соответствии со следующим принципом: если $\{e_i, e_j\}$ является $k$-м путем в $\mathcal{P}$, то $w_iu_k$, $w_ju_k \in DH$. Далее по аналогии с доказательством теоремы 3 определим $(s,t)$-граф $G$. Объявим также каждую вершину из $U \cup W \cup \{s\}$ $c$-вершиной, а каждую вершину из $VG \backslash (U \cup W \cup \{s\})$ – $d$-вершиной графа $G$. Каждую дугу $sw_i$ из $A$ заменим направленной цепью из $r$ дуг

$$sz_{i1}, z_{i1}z_{i2}, \ldots, z_{i,r-1}w_i,$$

а каждую дугу $u_iv_i$ из $C = \{u_iv_i : i = 1, \ldots, m\}$ заменим направленной цепью из $s$ дуг

$$u_iy_{i1}, y_{i1}y_{i2}, \ldots, y_{i,s-1}v_i.$$

Полученный граф обозначим через $G_{rs}$. Объявим также все вершины $z_{ij}$, $y_{ij}$ $c$-вершинами в графе $G_{rs}$. Отметим, что $dc$-тривиальный граф $G_{rs}$ имеет степень 2. Кроме того, каждый минимальный путь $M$ в $G$ имеет следующий вид:

$$M = \{sw_i, sw_j, w_iu_q, w_ju_q, u_qv_q, v_qv_{q+1}, \ldots, v_{m-1}t\}.$$

Отсюда число минимальных путей в $G$ (и, следовательно, в $G_{rs}$) равно $m$.

Обозначим через $\mathcal{L}_{kli}$ множество монотонных $(s,t)$-подграфов графа $G$, содержащих $k$ дуг из $C$, $l$ дуг из $A$, $i$ дуг из $B \backslash C$, а через $\mathcal{L}^{rs}_{kli}$ – множество монотонных $(s,t)$-подграфов графа $G_{rs}$, которые получаются из соответствующих графов в $\mathcal{L}_{kli}$ заменами, описанными выше. Очевидно, $| \mathcal{L}_{kli} |=| \mathcal{L}^{rs}_{kli} |$.

На основе лемм 6, 7 непосредственно проверяется, что для любого $F \in \mathcal{L}^{rs}_{kli}$ имеем $d(F) = (-1)^{k-1}$. Отсюда в силу теоремы 2

$$\mathrm{Rel}\,(G_{rs}) = \sum_{l,i,k} \sum_{F \in \mathcal{L}^{rs}_{kli}} d(F)Pr(DF) = \sum_{l,i,k} \sum_{F \in \mathcal{L}^{rs}_{kli}} (-1)^{k-1} p^{i+2k+ks+lr} =$$

$$= -\sum_{l=0}^{n} (p^r)^l \sum_{k=0}^{m} (-p^{s+2})^k \sum_{i=0}^{m-1} p^i \mid \mathcal{L}_{kli} \mid . \qquad (6)$$

Так как размерность графов $G_{rs}$ при $r = 1, \ldots, n+1$, $s = 1, \ldots, m+1$ ограничена полиномом от размерности $G$, то, применяя к (6) три раза модифицированный вариант леммы 1 [14], заключаем, что задача определения коэфициентов $|\mathcal{L}_{kli}|$ полиномиально сводится к задаче определения надежности $dc$-тривиальных $(s,t)$-графов степени 2 с числом минимальных путей, пропорциональным их размерности.

Обозначим

$$\sum_{i=0}^{m-1} \mid \mathcal{L}_{kli} \mid$$

через $D_{kl}$. По определению графа $H$, $D_{kl}$ равно числу $k$ минимальных путей в клаттере $[E, \mathcal{P}]$, объединение которых содержит ровно $l$ элементов из $E$. В силу леммы 2

$$d(E) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} D_{kn},$$

откуда и следует теорема.

Следствие 4. *Если классы $P$ и $\#P$ не совпадают, то задача определения надежности в классе ациклических $dc$-тривиальных графов степени 2 не может быть решена алгоритмом с временной сложностью, полиномиально зависящей от числа минимальных путей (минимальных сечений) этих графов.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Черняк А.А.* Комбинаторно-графовый метод анализа надежности сложных систем с монотонными булевыми функциями // АиТ. 1991. № 4. С. 165–174.
2. *Satyanarayana A., Prabhakar A.* New Topological Formula and Rapid Algorithm for Reliability Analysis of Complex Networks // IEEE Trans. Reliab. 1978. V. 27. № 2. P. 82–100.
3. *Huseby A.B.* Domination Theory and Crapo $b$-Invariant // Networks. 1989. V. 19. P. 135–149.
4. *Satyanarayana A., Chang M.K.* Network Realiability and the Factoring Theorem // Networks. 1983. V. 13. P. 107–120.
5. *Chernyak A.A.* A new graph-combinatorial method for reliability analysis of monotone graphs // Proc. 8th Int. Symp. on Reliability. Budapest: Acad. Kiodo, 1991. P. 135–140.
6. *Chernyak A.A., Chernyak Zh.A.* A United Domination Approach for Reliability Analysis for Networks with Arbitrary Logic in Vertices // IEEE Trans. Reliab. 1996. V. 45. № 1. P. 114–119.
7. *Hagstorm J.N.* Directed Network Reliability: Domination and Computing Coefficients of the Success-Marginal Expansion // Networks. 1990. V. 20. P. 65–78.
8. *Satyanarayana A.* A Unified Formula for Analysis of Some Network Reliability Problems // IEEE Trans. Reliab. 1982. V. 31. № 1. P. 23–32.
9. *Satyanarayana A., Hagstorm J.N.* A New Algorithm for the Reliability Analysis of Multiterminal Networks // IEEE Trans. Reliab. 1981. V. 30. № 4. P. 325–334.

10. *Willie R.R.* A Theorem Concerning Cyclic Directed Graphs with Application to Network Reliability // Networks. 1980. V. 10. P. 71–78.
11. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и трудноразрешимые задачи. М.: Мир, 1982.
12. *Черняк Ж.А., Черняк А.А.* Разработка универсальных математических методов анализа надежности сложных систем // Отчет о НИР/БГУИР. № ГР 1996403. Минск, 1997.
13. *Черняк А.А.* Ациклические монотонные графы: доминирование и надежность // Изв. АН Беларуси. Сер. физ.-техн. наук. 1998. № 3. С. 108–114.
14. *Valiant L.G.* The Complexity of Enumeration and Reliability Problems // SIAMJ. Comput. 1979. V. 8. № 3. P. 410–421.
15. *Chernyak A.A., Chernyak Zh.A.* Note on Complexity of Computing the Domination of Binary Systems // Discrete Applied Math. 1997. V. 73. № 3. P. 289–295.
16. *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика. М.: Мир, 1990.

Поступила в редакцию
13.05.98
После переработки
25.01.99