МАТЭМАТЫКА

Весці БДПУ. Серыя 3. 2021. № 2. С. 26–30.

УДК 517.968.25

ДАСЛЕДАВАННЕ КРАЯВОЙ ЗАДАЧЫ ДЛЯ АДНОЙ СІСТЭМЫ ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНЫХ РАЎНАННЯЎ ПРЫ ДАПАМОЗЕ ІНТЭГРАЛЬНАГА ВЫЯЎЛЕННЯ ПАМПЕЮ – ФЁДАРАВА

У. А. Шылінец,
кандыдат фізіка-матэматычных навук, загадчык кафедры вышэйшай матэматыкі УА ФПБ «Міжнародны ўніверсітэт “МІТСО”»;

І. М. Гуло,
кандыдат фізіка-матэматычных навук, загадчык кафедры матэматыкі і методыкі выкладання матэматыкі Беларускага дзяржаўнага педагагічнага ўніверсітэта імя Максіма Танка

Паступіў у рэдакцыю 30.04.21.

UDC 5 517.968.25

RESEARCH OF BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ONE SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH THE HELP OF INTEGRAL REVELATION OF POMPEO – FEDOROV

V. Shilinets,
PhD in Physics and Mathematics, Head of the Department of Higher Mathematics, EI FTUB “International University “MITSO”;

I. Gulo,
PhD in Physics and Mathematics, Head of the Department of Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank

Received on 30.04.21.

Пры дапамозе F-манагенных дуальных функцый даследавана краявая задача для адной сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў у фармальных вытворных.

Ключавыя словы: дыферэнцыяльнае раўнанне, дуальная функцыя, манагеннасць у сэнсе У. С. Фёдарава, фармальныя вытворныя.

With the help of F-monogeneous dual functions the boundary value problem for one system of differential equations in formal derivatives is studied.

Keywords: differential equation, dual function, monogeneity in the sense of V. Fedorov, formal derivatives.

Уводзіны. Для вывучэння дыферэнцыяльных раўнанняў выкарыстоўваюцца розныя метады. Адным з такіх метадаў з’яўляецца метад функцый, манагенных у сэнсе У. С. Фёдарава (F-манагенных) [1–9].

У дадзенай працы пры дапамозе F-манагенных дуальных функцый даследуецца краявая задача для адной сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў у фармальных вытворных.

Асноўная частка. У дадзенай працы мы будзем выкарыстоўваць F-манагенныя дуальныя функцыі, зададзеныя ў некаторым абсягу D камплекснай плоскасці.

Дуальнай функцыяй у абсягу D называецца функцыя выгляду:

$$D\ F(z) = f(z) + \varepsilon\varphi(z),\ z \in D,\ \varepsilon^2 = 0,$$

дзе $f(z)$, $\varphi(z)$ – камплексныя, або рэчаісныя, функцыі, зададзеныя ў абсягу D.

Азначэнне. Дуальная функцыя $F(z)$ называецца F-манагеннай (манагеннай у сэнсе У. С. Фёдарава) [1] па дуальнай функцыі $P(z) = p(z) + \varepsilon q(z)$ у абсягу D, калі знойдзецца такая дуальная функцыя ψ, што ва ўсіх пунктах абсягу D маем

$$dF = \psi dP. \quad (1)$$

Функцыя ψ падчас абазначаецца $\psi = F'[P]$ і называецца F-вытворнай функцыі F па функцыі P.

Лёгка пераканацца, што ўмова (1) раўназначная наступнай умове:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial P}{\partial x},$$

калі $\dfrac{\partial P(z)}{\partial x} \neq 0$ ці $\dfrac{\partial P(z)}{\partial y} \neq 0$; $z = x + iy$; $F, P \in C^1(D)$.

Як паказана ў працы [3], любая дуальная функцыя $F(z)$, F-манагенная па $P(z)$, мае выгляд:

$$F(z) = f[p] + \varepsilon\left\{f'[p]q + H[p]\right\},$$

дзе $f[p]$, $H[p]$ – камплексныя функцыі, F-манагенныя па p, $f'[p]$ – F-вытворная функцыі F па функцыі p.

Нам спатрэбяцца дуальныя функцыі, F-манагенныя па функцыі $P(z) = z + \varepsilon\bar{z}$, дзе $z = x + iy$.

Разгледзім некаторыя інтэгральныя формулы для адзначаных дуальных F-манагенных функцый.

Няхай $P = z + \varepsilon\bar{z}$ і функцыя $F(z)$ – F-манагенная па функцыі P. Фіксуем пункт $z_0 \in D$ і разгледзім функцыю $\tilde{\psi}(z) = \dfrac{1}{\Delta P}$, дзе $\Delta P = P - P_0 = (z - z_0) + \varepsilon(\bar{z} - \bar{z}_0)$.

Лёгка пераканацца, што функцыя $\tilde{\psi}(z)$ будзе F-манагеннай па функцыі P у абсягу $D \setminus \{z_0\}$. Тады і функцыя $\theta(z) = \dfrac{F(z_0) - F}{\Delta P}$ будзе F-манагеннай па функцыі P у абсягу $D \setminus \{z_0\}$.

Значыць, маем

$$\int_C \theta(z)dP = \int_K \theta(z)dP, \tag{2}$$

дзе K – акружнасць унутры D з цэнтрам z_0 і радыуса ρ, C – граніца адназвязнага абсягу D.

Калі разважаць далей аналагічным чынам, як і пры выводзе формулы Кашы для аналітычных функцый, знаходзім з роўнасці (2), што $\int_C \theta(z)dP = 0$, адкуль

$$F(z_0)\int_C \frac{dP}{\Delta P} = \int_C \frac{F(z)}{\Delta P}dP. \tag{3}$$

$\int_C \dfrac{dP}{\Delta P} = \int_K \dfrac{dP}{\Delta P}$, бо функцыя $\dfrac{1}{\Delta P}$ з'яўляецца манагеннай па функцыі P у абсягу $D \setminus \{z_0\}$.

Далей маем

$$\int_K \frac{dP}{\Delta P} = \int_K \frac{dz + \varepsilon d\bar{z}}{(z - z_0) + \varepsilon(\bar{z} - \bar{z}_0)},$$

адкуль

$$\int_K \frac{dP}{\Delta P} = \int_K \frac{dz}{z - z_0} + \varepsilon\int_K \left(\frac{d\bar{z}}{z - z_0} - \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{(z - z_0)^2}dz\right).$$

Мяркуючы $z - z_0 = \rho e^{i\psi}$, дзе ρ – радыус акружнасці K, і здзейсніўшы элементарныя вылічэнні, атрымаем

$$\int_C \frac{dP}{\Delta P} = 2\pi i.$$

Тады з роўнасці (3) атрымаем аналаг формулы Кашы:

$$2\pi i F(z_0) = \int_C \frac{F(z)dP}{\Delta P}.$$

Няхай дадзены інтэграл

$$J = \int_C \frac{\varphi(z)}{\Delta P} dP ,$$

дзе $\varphi(z)$ – любая непарыўная функцыя на C, $\Delta P = P(z) - P(z_0)$, $dP = dP(z)$, $P(z) \in C^1(D)$, $\frac{1}{\Delta P}$ існуе для ўсіх пунктаў z_0 унутры D і ўсіх пунктаў z на C.

Лёгка праверыць, што

$$\frac{\partial J}{\partial x_0} = \int_C \left(-\frac{1}{(\Delta P)^2} \frac{\partial \Delta P}{\partial x_0} \right) \varphi(z) dP , \ \frac{\partial J}{\partial y_0} = \int_C \left(-\frac{1}{(\Delta P)^2} \frac{\partial \Delta P}{\partial y_0} \right) \varphi(z) dP ,$$

адкуль лёгка знайсці, што

$$\frac{\partial J}{\partial x_0} \frac{\partial P_0}{\partial y_0} = \frac{\partial J}{\partial y_0} \frac{\partial P_0}{\partial x_0} ,$$

гэта значыць інтэграл J – F-манагенная функцыя па $P(z_0)$ у абсягу D пры любой непарыўнай на C функцыі $\varphi(z)$, $P_0 = P(z_0)$, пункт z_0 не належыць C.

Лёгка пераканацца ў тым, што у абсягу D рашэннем сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў у фармальных вытворных [10]

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}} = 0 , \ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0 , \tag{4}$$

дзе $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ – дыферэнцыяльныя аператары, $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$, з’яўляюцца наступныя функцыі: $f = f(z)$ – адвольная аналітычная ў абсягу D функцыя ад z, $\varphi = f'(z)\overline{z} + h(z)$ – так званая біаналітычная ў абсягу D функцыя [11].

Адначасова, як паказана ў працы [3], сістэма (4) з’яўляецца ўмовай F-манагеннасці [1] дуальнай функцыі $f + \varepsilon\varphi$ па функцыі $P = z + \varepsilon\overline{z}$, $\varepsilon^2 = 0$.

Натуральны інтарэс выклікае вывучэнне наступнай сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў у фармальных вытворных:

$$\left. \begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}} = g(x,y), \\ &\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = h(x,y), \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

дзе g, h – зададзеныя камплексныя, або рэчаісныя, функцыі класа $C^1(D)$, дыферэнцыяльныя аператары $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ вызначаны вышэй.

Увядзем зараз дуальныя функцыі $w = w(z) = f(x,y) + \varepsilon\varphi(x,y)$, $P = z + \varepsilon\overline{z}$, $Q = \overline{z}$ ($\varepsilon^2 = 0$), а таксама дуальны дыферэнцыяльны аператар $\frac{\partial w}{\partial Q} = \frac{\partial w}{\partial \overline{z}} - \varepsilon \frac{\partial w}{\partial z}$.

Тады сістэму (5) можна, відавочна, запісаць у выглядзе:

$$\frac{\partial w(z)}{\partial Q} = A(z) , \tag{6}$$

$A(z) = h(z) - \varepsilon g(z)$, $h(z) = h(x,y)$, $g(z) = g(x,y)$, $z = x + iy$, ($i^2 = -1$), $w = w(z) = h(x,y) + \varepsilon g(x,y)$.

Даследуем наступную краявую задачу: знайсці рашэнне $w = w(z) \in C^1(D)$ раўнання (6) (сістэмы (5)), калі вядомы значэнні гэтага раўнання на граніцы C абсягу $D_C \subset D$.

Скарыстаем метад, які выкарыстоўваўся ў працы [12] для даследавання сістэм дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных.

Для любой дуальнай функцыі $w = w(z) \in C^1(D)$ маем:

$$\int_C w dP = \int_C \left(w \frac{\partial P}{\partial x} \right) dx + \left(w \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy = \iint_{D_C} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(w \frac{\partial P}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(w \frac{\partial P}{\partial x} \right) \right\} dxdy,$$

дзе C – граніца любога абсягу $D_C \subset D$.

С другога боку,

$$\frac{\partial w}{\partial Q} = -\frac{1}{2i} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\frac{1}{2i} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(w \frac{\partial P}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(w \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right].$$

Такім чынам,

$$\int_C w dP = 2i \iint_{D_C} \frac{\partial w}{\partial Q} dxdy \,. \tag{7}$$

Абазначым зараз праз D_γ абсяг, які атрыманы выключэннем з D_C круга з цэнтрам z_0 і дастаткова малога радыуса ρ; праз γ абазначым акружнасць, якая абмяжоўвае гэты круг.

Маем тады, аналагічна (7), формулу выгляду:

$$\int_C \frac{w dP}{P - P_0} - \int_\gamma \frac{w dP}{P - P_0} = 2i \iint_{D_\gamma} \frac{\partial w}{\partial Q} \frac{dxdy}{P - P_0}, \tag{8}$$

паколькі нескладана пераканацца, што ў абсягу D_γ

$$\frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{1}{P - P_0} \right) = 0 \,, \quad \frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{w}{P - P_0} \right) = \frac{1}{P - P_0} \frac{\partial w}{\partial Q} \,.$$

Калі перайсці да ліміту пры $\rho \to 0$, то з формулы (8) знаходзім, што

$$w(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_C w \frac{dP}{P - P_0} - 2i \iint_{D_C} \frac{\partial w}{\partial Q} \frac{dxdy}{P - P_0} \right\}.$$

Такім чынам, сістэма (5) эквівалентная ў любым абсягу $D_C \subset D$ наступнаму інтэгральнаму раўнанню:

$$w(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C w(z) \frac{dP}{P - P_0} - \frac{1}{\pi} \iint_{D_C} A(z) \frac{dxdy}{P - P_0}, \tag{9}$$

дзе $P = P(z) = z + \varepsilon \bar{z}$, $P_0 = z_0 + \varepsilon \bar{z}_0$, $z \in C$, $z_0 \in D_C$, C – граніца абсягу D_C, $A(z) = h(z) - \varepsilon g(z)$.

Заключэнне. Атрыманае інтэгральнае выяўленне Пампею – Фёдарава (9) і дае рашэнне сфармуляванай краявой задачы.

Літаратура

1. *Федоров, В. С.* Основные свойства обобщенных моногенных функций / В. С. Федоров // Известия вузов. Математика. – 1958.– № 6.– С. 257–265.
2. *Павлов, С. Д.* Решение систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными с помощью моногенных функций в смысле В. С. Федорова / С. Д. Павлов // Anal. stiint. Univ. Iasi. – 1962.– F. 2.– T. 8. – P. 323–329.

References

1. *Fedorov, V. S.* Osnovnye svojstva obobshchyonnyh monogennyh funkcij / V. S. Fedorov // Izvestiya vuzov. Matematika. – 1958.– № 6.– S. 257–265.
2. *Pavlov, S. D.* Reshenie sistem linejnyh differencial'nyh uravnenij s chastnymi proizvodnymi s pomoshch'yu monogennyh funkcij v smysle V. S. Fedorova / S. D. Pavlov // Anal. stiint. Univ. Iasi. – 1962.– F. 2.– T. 8. – P. 323–329.

4. *Кусковский, Л. Н.* О краевой задаче типа Римана – Гильберта / Л. Н. Кусковский // Дифференциальные уравнения. – 1975.– № 3.– Т. 11.– С. 52–532.
5. *Стельмашук, Н. Т.* Метод формальных производных для решения задачи Коши для одной системы дифференциальных уравнений в частных производных / Н. Т. Стельмашук, В. А. Шилинец // Дифференциальные уравнения. – 1993. – № 11.– Т. 29. – С. 2019–2020.
6. *Стельмашук, Н. Т.* Решение краевой задачи для одной системы дифференциальных уравнений в формальных производных / Н. Т. Стельмашук, В. А. Шилинец // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1999. – № 3.– С. 127–128.
7. *Stelmashuk, N. T.* The solution of the boundary value problem for a system of equations in formal derivatives by means dual differential operators / N. T. Stelmashuk, V. A. Shylinets // Труды института математики НАН Беларуси. – 2004. – № 2. – Т. 12. – С. 170–171.
8. *Стельмашук, Н. Т.* О преобразовании к каноническому виду системы линейных уравнений в частных производных с помощью двойных дифференциальных операторов / Н. Т. Стельмашук, В. А. Шилинец // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008.– № 2.– С. 61–65.
9. *Шылінец, У. А.* Даследаванне сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных пры дапамозе F-манагенных гіперкамплексных функцый / У. А. Шылінец, І. М. Гуло // Весці БДПУ. Серыя 3.– 2019. – № 4. – С. 5–8.
10. *Гусев, В. А.* Об одном обобщении ареолярных производных / В. А. Гусев // Bul. stiint. al Instit. politehnic Timisoara.– 1962.– F. 2.– T. 7.– P. 223–238.
11. *Затуловская, К. Д.* Полианалитические функции и функции, моногенные в смысле В. С. Федорова / К. Д. Затуловская // Смоленский матем. сборник. – 1969. – Т. 2. – Вып. 20. – С. 20–27.
12. *Стельмашук, Н. Т.* Интегральное представление решений одной системы уравнений в частных производных / Н. Т. Стельмашук // Смоленский матем. сборник. – 1970. – Т. 3. – Вып. 23. – С. 33–38.

4. *Kuskovskij, L. N.* O kraevoj zadache tipa Rimana – Gil'berta / L. N. Kuskovskij // Differencial'nye uravneniya. – 1975.– № 3.– T. 11.– S. 52–532.
5. *Stel'mashuk, N. T.* Metod formal'nyh proizvodnyh dlya resheniya zadachi Koshi dlya odnoj sistemy differencial'nyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh / N. T. Stel'mashuk, V. A. Shilinec // Differencial'nye uravneniya. – 1993. – № 11.– T. 29. – S. 2019–2020.
6. *Stel'mashuk, N. T.* Reshenie kraevoj zadachi dlya odnoj sistemy differencial'nyh uravnenij v formal'nyh proizvodnyh / N. T. Stel'mashuk, V. A. Shilinec // Vesci NAN Belarusi. Ser. fiz.-mat. navuk. – 1999.– № 3.– S. 127–128.
7. *Stelmashuk, N. T.* The solution of the boundary value problem for a system of equations in formal derivatives by means dual differential operators / N. T. Stelmashuk, V. A. Shylinets // Trudy instituta matematiki NAN Belarusi. – 2004. – № 2. – T. 12. – S. 170–171.
8. *Stel'mashuk, N. T.* O preobrazovanii k kanonicheskomu vidu sistemy linejnyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh s pomoshch'yu dvojnyh differencial'nyh operatorov / N. T. Stel'mashuk, V. A. Shilinec // Vesci NAN Belarusi. Ser. fiz.-mat. navuk. – 2008.– № 2.– S. 61–65.
9. *Shylinec, U. A.* Dasledavanne sistemy dyferencyyal'nyh raŭnannyaŭ u chastkovyh vytvornyh pry dapamoze F-managennyh giperkampleksnyh funkcyj / U. A. Shylinec, I. M. Gulo // Vesci BDPU. Seryya 3.– 2019. – № 4. – S. 5–8.
10. *Gusev, V. A.* Ob odnom obobshchenii areolyarnyh proizvodnyh / V. A. Gusev // Bul. stiint. al Instit. politehnic Timisoara. – 1962. – F. 2.– T. 7. – P. 223–238.
11. *Zatulovskaya, K. D. P*olianaliticheskie funkcii i funkcii, monogennye v smysle V. S. Fyodorova / K. D. Zatulovskaya // Smolenskij matem. sbornik. – 1969. – T. 2.– Vyp. 20.– S. 20–27.
12. *Stel'mashuk, N. T.* Integral'noe predstavlenie reshenij odnoj sistemy uravnenij v chastnyh proizvodnyh / N. T. Stel'mashuk // Smolenskij matem. sbornik. – 1970. – T. 3. – Vyp. 23. – S. 33–38.