А. А. Черняк, Структурно-сложные системы с пороговой живучестью, *Дискрет. матем.*, 1999, том 11, выпуск 4, 65–78

DOI: https://doi.org/10.4213/dm393

Дискретная математика

том 11 выпуск 4 * 1999

УДК 519.7

Структурно-сложные системы с пороговой живучестью

© 1999 г. А. А. Черняк

Ранее была получена структурная характеризация сложных систем, моделируемых K-терминальными неориентированными сетями с пороговой живучестью. Проблема характеризации сложных систем, моделируемых K-терминальными ориентированными сетями с пороговой живучестью, оставалась открытой задачей. Решение этой задачи автоматически следует из полученной в данной статье характеризации dc-тривиальных графов (подкласса монотонных графов), имеющих пороговую живучесть, так как эти графы включают в себя в качестве специальных случаев все классические модели мультитерминальных сетей, применяемых для анализа надежности сложных систем. Доказано также, что в классе всех монотонных графов с пороговой живучестью задача распознавания разрешима за время, полиномиально зависящее от размерности графов и числа их минимальных путей.

1. Введение

Разнородность традиционных сетевых моделей надежности структурно-сложных систем послужила основным мотивом введения в [1] монотонных графов, допускающих в вершинах произвольную логику функционирования. В таких графах возможность прохождения сигнала через некоторую вершину определяется наборами сигналов, подающихся на входы этой вершины от остальных вершин, причем сами наборы соответствуют простым импликантам произвольной монотонной булевой функции. Распространение в [2, 3] теории доминирования на монотонные графы позволило выявить единую комбинаторную природу ранее известных результатов, касающихся надежности и доминирования ориентированных сетей.

Важным подклассом монотонных графов являются dc-тривиальные графы (см. раздел 2). Значение этих графов, в частности, в том, что они составляют граничный подкласс монотонных графов, включающий в себя в качестве специальных случаев все классические сетевые модели мультитерминальной надежности [4–6]. С другой стороны, как показано в [7], задача вычисления надежности является NP-трудной даже на множестве тех dc-тривиальных графов, в которых каждая вершина имеет не более двух входящих дуг, а число минимальных сечений пропорционально размерности графов. Это означает, что для таких графов задача надежности не может быть решена алгоритмом, временная сложность которого ограничена полиномом от числа их минимальных сечений, если класс P полиномиальных и класс NP недетерминированных полиномиальных алгоритмов не совпадают (даже в случае $P = NP$ существование такого алгоритма весьма проблематично [8]).

Наряду с надежностью существенное значение для структурно сложных систем, моделируемых сетями, имеют показатели живучести. Под живучестью сети подразумевается ее устойчивость к сохранению основных функций работоспособности при воздействии поражающих факторов внешней среды (см., например, [9]). В [10] была получена характеризация K-терминальных неориентированных сетей, живучесть которых обладает пороговым свойством. В таких сетях каждое ребро имеет определенную цену разрушения, а вся сеть теряет работоспособность (т.е. теряет связность между некоторыми вершинами из фиксированного множества K), если и только если сумма цены разрушения превосходит допустимый порог. Проблема характеризации K-терминальных ориентированных сетей, имеющих пороговую живучесть, оставалась открытой задачей.

Решение этой задачи автоматически следует из полученной в данной статье характеризации dc-тривиальных графов, имеющих пороговую живучесть. Приведенная в статье структурная характеризация позволила получить эффективный алгоритм распознавания таких графов. Доказано, что задача распознавания произвольных монотонных графов, имеющих пороговую живучесть, разрешима за время, полиноминально зависящее от размерности графов и числа их минимальных путей.

2. Монотонные (s, t)-графы, предварительные сведения

Все рассматриваемые ниже графы считаются ориентированными, VG и DG — множества вершин и дуг графа G соответственно, uw — дуга, направленная из u в w, u — начальная вершина дуги, w — концевая вершина, $D^+(v, G)$ и $D^-(v, G)$ — множества дуг графа G, направленных в вершину v и из вершины v соответственно. Величина $|D^+(v, G)|$ называется степенью вершины v в G. Последовательность дуг $e_i = v_i v_{i+1}$, $i = 1, \dots, n$, называется простой цепью или (v_1, v_{n+1})-цепью, если вершины $v_1, \dots, v_{n+1}$ различны. Если при этом допускается, что $v_1 = v_{n+1}$, то такая последовательность дуг называется циклом. Скажем, что вершина u достижима из вершины v в G, если $v = u$ или в G существует (v, u)-цепь. Если граф G содержит хотя бы один цикл, то он называется циклическим, в противном случае G — ациклический граф.

Инъективная функция $\varphi\colon VG \to Z^+$ называется ранговой функцией графа G, если $\varphi(u) < \varphi(v)$ для любой дуги $uv \in DG$, при этом $\varphi(w)$ называется рангом вершины w. Граф G имеет некоторую ранговую функцию, если и только если G ациклический [11]. В дальнейшем будет считаться, что любой ациклический граф ранжирован, т.е. задан вместе со своей ранговой функцией.

Функция $w\colon DG \to R^+$ называется весовой функцией графа G, а число $w(e)$ весом дуги e. Символ $\varphi|A$ обозначает ограничение функции φ на множество A.

Граф G называется (s, t)-графом, если

$$s, t \in VG, \quad D^-(t, G) = D^+(s, G) = \varnothing, \quad D^-(v, G) \neq \varnothing, \quad D^+(v, G) \neq \varnothing$$

для любой вершины $v \in VG \setminus \{s, t\}$.

Дадим теперь определение монотонного (s,t)-графа. С каждой вершиной $v \neq s$ графа G свяжем множество $\mathrm{th}(v,G)$ так называемых пороговых наборов вершины v в G, подмножеств множества $D^+(v,G)$, обладающих следующими свойствами:

(a) ни один пороговый набор не содержится в другом;

(b) каждый элемент из $D^+(v,G)$ принадлежит пороговому набору из $\mathrm{th}(v,G)$.

Подграф H графа G называется монотонным подграфом, если H — (s,t)-граф и для каждой вершины $v \in VH \setminus \{s\}$ множество $\mathrm{th}(v,G)$ пороговых наборов вершины v в H индуцируется множеством $\mathrm{th}(v,G)$, т.е. $\mathrm{th}(v,H)$ состоит в точности из тех наборов в $\mathrm{th}(v,G)$, которые содержатся в $D^+(v,H)$ и $D^+(v,H)$ есть объединение этих наборов. Монотонный подграф P графа G называется минимальным путем в G, если $|\mathrm{th}(v,P)| = 1$ для каждой вершины $v \in VP \setminus \{s\}$. Считается также, что все минимальные пути в G ациклические (хотя сам граф G может содержать циклы).

Определенный таким образом граф G и его система минимальных путей называется монотонным (s,t)-графом. Сечение монотонного графа G — это подмножество $\mathscr{E} \subseteq DG$, имеющее непустое пересечение с множеством дуг каждого минимального пути в G.

Замечание 1. Если в минимальных путях допустить циклы, то получим так называемые сильно-циклические монотонные графы.

Вершина v называется d-вершиной в G, если $|\mathrm{th}(v,G)| > 1$ и все пороговые наборы в $\mathrm{th}(v,G)$ одноэлементные. Вершина v называется c-вершиной в G, если $v = s$ или $|\mathrm{th}(v,G)| = 1$. Монотонный (s,t)-граф G называется dc-тривиальным (монотонным) (s,t)-графом, если любая его вершина является d-вершиной или c-вершиной [7].

Рассмотрим теперь три классические графовые модели, используемые в задачах мультитерминальной надежности ориентированных сетей.

2.1. Напомним, что 2-терминальные графы [4] — это (s,t)-графы G, в которых минимальными путями являются (s,t)-цепи. Другими словами, G — это dc-тривиальный (s,t)-граф, в котором любая вершина, имеющая степень, большую 1, является d-вершиной.

2.2. Исток-K-терминальные графы рассматривались в [5, 6]. В таких графах H задаются входная вершина s (исток) и множество $K = \{v_1, \ldots, v_r\}$ выходных вершин, а минимальными путями являются K-деревья, т.е. минимальные ориентированные деревья с корнем s, содержащие K. Добавим к H новую вершину w и r дуг $v_i w$, $i = 1, \ldots, r$. Новый граф обозначим через G. Тогда G — это dc-тривиальный (s,t)-граф, в котором любая вершина, отличная от w и имеющая степень, большую 1, является d-вершиной.

2.3. Оллтерминальный граф H — это исток-$(VH \setminus s)$-терминальный граф [5, 6]. Пусть $VH = \{s, v_1, \ldots, v_n\}$. Тогда минимальными путями в H являются остовные деревья с корнем s. Добавим к H новую вершину w и n дуг $v_i w$, $i = 1, \ldots, n$. Полученный граф обозначим G и назовем его оллтерминальным монотонным (s,t)-графом. Очевидно, G — это dc-тривиальный (s,t)-граф, в котором c-вершина w имеет степень n, а любая вершина, отличная от w и имеющая степень, большую 1, является d-вершиной.

Пусть G — произвольный монотонный (s,t)-граф. Определим процедуру, применяемую к G для построения усеченных минимальных путей графа G в соответствии с некоторым правилом $\mathscr{L}$, и обозначаемую $\mathrm{Proc}(X, \mathscr{L})$.

Процедура $\mathrm{Proc}(X,\mathscr{L})$, $X \subseteq VG$. **Шаг 1.** Обьявить вершины из X помеченными. Положить
$$VP := \varnothing, \quad DP := \varnothing, \quad u := t$$
и перейти к шагу 2.

Шаг 2. Объявить вершину u помеченной. Выбрать в $\mathrm{th}(u,G)$ в соответствии с правилом выбора $\mathscr{L}$ пороговый набор $\mathrm{Ch}(u)$, множество начальных вершин дуг которого обозначить $B(u)$. Положить
$$DP := DP \cup \mathrm{Ch}(u), \quad VP := VP \cup B(u) \cup \{u\}$$
и перейти к шагу 3.

Шаг 3. Если все вершины в VP помечены, то процедура завершена построением подграфа P с множеством вершин VP и дуг DP. Если не все вершины в VP помечены, то выбрать среди них произвольную вершину u (если G ациклический, то выбрать вершину наибольшего ранга) и перейти к шагу 2.

Лемма 1 ([1]). *Пусть G — монотонный (s,t)-граф. Тогда любой его минимальный путь может быть построен некоторой процедурой $\mathrm{Proc}(s,\mathscr{L})$. Если к тому же G ациклический, то любая процедура вида $\mathrm{Proc}(s,\mathscr{L})$ строит минимальный путь графа G.*

В дальнейшем неоднократно используется следующее правило выбора, обозначаемое через $\mathscr{L}(f,R)$ (здесь R — минимальный путь в G, $f \notin DR$, $f = uw$):

– если $z \neq v$, то $Ch(z) := D^+(z,R)$,

– если $z = v$, то $Ch(z)$ должно содержать дугу f.

3. Свойства dc-тривиальных графов с пороговой живучестью

Пусть G — произвольный монотонный (s,t)-граф. Скажем, что G обладает пороговой живучестью, если существует весовая функция w графа G и число $b > 0$ такие, что
$$\sum_{f_i \in \mathscr{E}} w(f_i) \geqslant b,$$
если и только если $\mathscr{E}$ — сечение в G. При этом пара (w,b) называется пороговой для G. На рис. 1 приведен пример монотонного (s,t) графа G с пороговой живучестью, где t,v,u — c-вершины, w — d-вершина, веса дуг даны на рисунке, $b = 2$. Если вершину v объявить d-вершиной, то G теряет свойство пороговой живучести.

Пусть G — ациклический dc-тривиальный (s,t)-граф, $v_1,\dots,v_r$ — множество его d-вершин, занумерованных в порядке возрастания их рангов. Граф G назовем каркасным, если любая его (v_1,t)-цепь для каждого $i = 2,\dots,r$ содержит некоторую фиксированную дугу $g_i = u_iv_i$ из $D^+(v_i,G)$. Для каркасного графа G определим процедуру $\mathrm{Red}(f,e,T,Q)$.

Пусть Q — минимальный путь, содержащий все d-вершины каркасного графа G,
$$e \in D^+(v_1,Q), \quad f \in D^+(v_1,G) \setminus D^+(v_1,Q), \quad e = uv_1, \quad f = wv_1, \quad w \in VQ,$$
T — минимальный путь, построенный процедурой $\mathrm{Proc}(s,\mathscr{L}(f,Q))$.

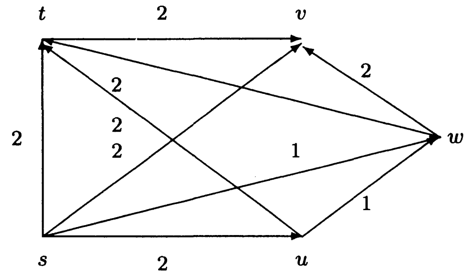

Рис. 1.

Процедура $\mathrm{Red}(f,e,T,Q)$. **Шаг 1.** Положить

$$VF := \{u, v_1\}, \qquad DF := \{e\}.$$

Назвать вершину v_1 опорной и перейти к шагу 2.

Шаг 2. Среди вершин VF, не являющихся внутренними и опорными, выбрать вершину z наибольшего ранга и перейти к шагу 3. Если такой вершины нет, то перейти к шагу 5.

Шаг 3. Если $z \in VT$, то объявить вершину z опорной и перейти к шагу 2. Если $z \notin VT$, то объявить z внутренней вершиной и перейти к шагу 4.

Шаг 4. Положить

$$VF := VF \cup \{\text{множество начальных вершин дуг из } D^+(z,Q)\},$$
$$DF := DF \cup D^+(z,D).$$

Перейти к шагу 2.

Шаг 5. Обозначить через H подграф, полученный из G удалением всех внутренних вершин из VF и всех дуг множества DF (называемого редуцируемой частью). Завершить процедуру.

Процедура $\mathrm{Red}(f,e,T,Q)$ называется редукцией, примененной к G, если для каждой внутренней вершины z из VF

$$D^-(z,G) \setminus D^-(z,Q) = \varnothing.$$

При этом H будет называться результатом редукции, v_1 опорной вершиной редукции. Очевидно,

$$\{f\} \cup DQ = DT \cup DF.$$

Пусть

$$\tau_i = \mathrm{Red}(f_i, e_i, T_i, Q_i), \qquad i = 1, 2.$$

Редукцию τ_2 назовем смежной с редукцией τ_1, если τ_2 применяется к результату редукции τ_1, $Q_2 = T_1$ и редуцируемая часть редукции τ_2 содержит дугу f_1. Последовательность редукций $\Omega = \tau_1, \dots, \tau_r$ назовем цепочкой редукций, если τ_i смежна с τ_{i-1}, $i = 2, \dots, r$. Максимальную подпоследовательность редукций в цепочке, имеющих общую опорную вершину, назовем звеном цепочки Ω. Скажем, что Ω применяется к G, если τ_1 применяется к G. Результатом цепочки Ω, примененной к G, считается результат редукции τ_r. Если результатом некоторой цепочки редукций Ω, примененной к G, является минимальный путь графа G, то цепочка Ω называется редуцирующей G, а G называется тотально редуцируемым.

Теорема 1. *Пусть G — dc-тривиальный (s,t)-граф. Тогда G обладает пороговой живучестью, если и только если G — каркасный тотально редуцируемый граф.*

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть $\Omega = \Omega_1, \dots, \Omega_s$ — цепочка, редуцирующая граф G, где $\Omega_k = \tau_1^k, \dots, \tau_{n_k}^k$ — звено цепочки Ω, $k = 1, \dots, s$,

$$\tau_i^k = \mathrm{Red}(e_{i+1}^k, e_i^k, T_{i+1}^k, T_i^k),$$

DF_i^k — редуцируемая часть редукции τ_i^k, $r_i^k = |DF_i^k|$.

Рекуррентно зададим следующую систему целых чисел:

$$\begin{aligned}
q_1^1 &= 1, \quad p_1^k = r_1^k q_1^k, \quad q_i^k = q_{i-1}^k + p_{i-1}^k, \quad i = 2, \dots, n_k + 1,\\
q_1^{k+1} &= q_{n_k+1}^k, \qquad b = q_{n_s+1}^s,\\
p_i^k &= \begin{cases} (r_i^k - 1)q_i^k + 2p_{i-1}^k, & \text{если } r_i^k > 1,\\ p_{i-1}^k, & \text{если } r_i^k = 1, \quad i = 2, \dots, n_k. \end{cases}
\end{aligned}$$

Определим весовую функцию w графа G, полагая

$$w(f_j) = \begin{cases} q_1^1, & \text{если } f_j \in DF_1^1,\\ q_1^k, & \text{если } f_j \in DF_1^k \setminus \{e_{n_{k-1}+1}^{k-1}\},\ k = 2, \dots, s,\\ q_i^k, & \text{если } f_j \in DF_i^k \setminus \{e_i^k\},\ i = 2, \dots, n_k,\ k = 1, \dots, s,\\ p_i^k, & \text{если } f_j = e_{i+1}^k,\ i = 1, \dots, n_k,\ k = 1, \dots, s,\\ b, & \text{если } f_j \in DT_{n_s+1}^s \setminus \{e_{n_s+1}^s\}. \end{cases}$$

Докажем, что пара (w, b) является пороговой для G.

Предположим, что $\mathscr{E} \subseteq DG$ — сечение в G. Пусть k — наибольший индекс такой, что для некоторого i, $2 \leqslant i \leqslant n_k + 1$, $e_i^k \notin \mathscr{E}$. Среди таких дуг e_i^k выберем дугу e_m^k с максимально возможным индексом m. Так как минимальный путь T_m^k не содержит дуг из множества

$$Y = \{e_{m+1}^k, \dots, e_{n_k+1}^k, e_2^{k+1}, \dots, e_{n_{k+1}+1}^{k+1}, e_2^{k+2}, \dots, e_2^s, \dots, e_{n_s+1}^s\},$$

$e_m^k \notin \mathscr{E}$ и $DT_m^k \cap \mathscr{E} \neq \varnothing$, множество $DT_m^k \cap \mathscr{E}$ содержит дугу, вес которой не менее q_m^k, и эта дуга не принадлежит множеству Y. Отсюда,

$$\begin{aligned}
\sum_{f_j \in \mathscr{E}} w(f_j) &\geqslant q_m^k + p_m^k + \dots + p_{n_k}^k + p_1^{k+1} + \dots + p_{n_{k+1}}^{k+1} + \dots + p_1^s + \dots + p_{n_s}^s\\
&= q_{n_{k+1}}^k + p_1^{k+1} + \dots + p_{n_{k+1}}^{k+1} + \dots + p_{n_s}^s \qquad (1)\\
&= q_1^{k+1} + p_1^{k+1} + \dots + p_{n_s}^s = q_1^s + p_1^s + \dots + p_{n_s}^s = q_{n_s+1}^s = b.
\end{aligned}$$

Предположим теперь, что $\mathscr{E}$ не является сечением, т. е. $DG - \mathscr{E}$ содержит множество дуг некоторого минимального пути R. Согласно выбору k и m, справедливо включение $Y \subseteq \mathscr{E}$. Поэтому, в силу леммы 1 и определения цепочки редукций, R совпадает с некоторым T^i_j, в котором либо $i < k$, либо $i = k$, $j \leqslant m$. В любом случае, $DT^k_m \setminus \{e^k_m\} \subseteq DR$, откуда, с учетом того, что $e^k_m \notin \mathscr{E}$,

$$\mathscr{E} \cap DT^k_m = \varnothing.$$

Но $DG \setminus DT^k_m = Y \cup \mathscr{E}^k_{m-1}$, где

$$\mathscr{E}^k_{m-1} = \bigcup_{i=1}^{m-1} DF^k_i \cup \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant k-1, 1 \leqslant i \leqslant n_j} DF^j_i.$$

Отсюда,

$$\sum_{f_j \in \mathscr{E}} w(f_j) \leqslant p^k_m + \ldots + p^k_{n_k} + p^{k+1}_1 + \ldots + p^{k+1}_{n_{k+1}} + \ldots + p^s_{n_s} + \sum_{f_j \in \mathscr{E}^k_{m-1}} w(f_j). \tag{2}$$

Докажем индукцией по m и k, что

$$\sum_{f_j \in \mathscr{E}^k_{m-1}} w(f_j) < q^k_m.$$

Тогда, по аналогии с (1), будет следовать, что правая часть в (2) не превосходит b, что и завершит доказательство достаточности.

Если $k = 1$, $m = 2$, то

$$q^1_2 = q^1_1 + p^1_1 = 1 + r^k_1 = 1 + \sum_{f_j \in DF^1_1} w(f_j).$$

Рассмотрим теперь три случая.

Пусть $m = 2$. В этом случае

$$\begin{aligned} q^{k+1}_2 &= q^{k+1}_1 + p^{k+1}_1 = q^k_{n_k+1} + \left|DF^{k+1}_1\right| q^{k+1}_1 \\ &= q^k_{n_k+1} + q^{k+1}_1 + \left|DF^{k+1}_1 \setminus \{e^k_{n_k+1}\}\right| q^{k+1}_1 \\ &= q^k_{n_k+1} + q^k_{n_k} + (p^k_{n_k} + \left|DF^{k+1}_1 \setminus \{e^k_{n_k+1}\}\right| q^{k+1}_1) \\ &> \sum_{f_j \in \mathscr{E}^k_{n_k}} w(f_j) + \sum_{f_j \in DF^{k+1}_1} w(f_j) = \sum_{f_j \in \mathscr{E}^{k+1}_1} w(f_j). \end{aligned}$$

Пусть теперь $m > 2$ и $DF^k_{m-1} = \{e^k_{m-1}\}$. Тогда

$$\begin{aligned} q^k_m &= q^k_{m-1} + p^k_{m-1} = q^k_{m-1} + p^k_{m-2} = q^k_{m-1} + w(e^k_{m-1}) \\ &> \sum_{f_j \in \mathscr{E}^k_{m-2}} w(f_j) + w(e^k_{m-1}) = \sum_{f_j \in \mathscr{E}^k_{m-1}} w(f_j). \end{aligned}$$

Наконец, пусть $m > 2$ и $\left|DF^k_{m-1}\right| > 1$. Тогда

$$\begin{aligned} q^k_m &= q^k_{m-1} + p^k_{m-1} \\ &= q^k_{m-1} + (r^k_{m-1} - 1)q^k_{m-1} + 2p^k_{m-2} = q^k_{m-1} + p^k_{m-2} + \sum_{f_j \in DF^k_{m-1}} w(f_j) \\ &> \sum_{f_j \in \mathscr{E}^k_{m-2}} w(f_j) + \sum_{f_j \in DF^k_{m-1}} w(f_j) = \sum_{f_j \in \mathscr{E}^k_{m-1}} w(f_j). \end{aligned}$$

Докажем теперь необходимость. Пусть (w, b) — пороговая пара для G. Занумеруем дуги в DG в порядке невозрастания их весов. Отметим вначале, что любой монотонный (s,t)-подграф H графа G обладает пороговой живучестью. Действительно, любое подмножество $\mathscr{E} \subseteq DH$ является сечением в H, если и только если $\mathscr{E} \cup (DG \setminus DH)$ — сечение в G. Поэтому пара $\left(w \mid DH, b - \sum_{f_j \in DG\setminus DH} w(f_j)\right)$ является пороговой для H.

Дальше в доказательстве неоднократно используется следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть (f_r, f_k, Q) — произвольная тройка, в которой Q — минимальный путь в G,*

$$f_r \notin DQ, \quad f_k \in DQ, \quad r < k, \quad f_r = zw, \quad f_k = uv.$$

Тогда $z, w \in VQ$ и любая (v,t)-цепь в Q содержит дугу из $D^+(w,Q)$, а вершина z не достижима из v в Q.

Доказательство предложения. Обозначим через R подграф $Q - f_k + f_r$. Предположим, что R не содержит в качестве подграфов минимальных путей графа G. Тогда $DG \setminus DR$ — сечение в G. Но $w(f_r) \geqslant w(f_k)$. Поэтому множество $((DG\setminus DR)\setminus f_k)\cup f_r$ — также сечение в G, т. е. дополнительное к нему множество, которым как раз и является DQ, не должно содержать множества дуг какого-либо минимального пути. Получаем противоречие. Итак, R содержит в качестве подграфа некоторый минимальный путь T графа G. Это означает, что $z, w \in VQ$ и, следовательно, T должен быть построен процедурой $\mathrm{Proc}(s, \mathscr{L}(f_r, Q))$, примененной к графу $Q + f_r = R + f_k$ (см. лемму 1). Обозначим через $\mathrm{Reach}(v)$ множество всех вершин, достижимых из v в Q. Так как $t \in \mathrm{Reach}(v)$ и все вершины из $\mathrm{Reach}(v)$, исключая v, являются c-вершинами в $Q + f_r$, ввиду определения $\mathrm{Proc}(s, \mathscr{L}(f_r, Q))$, вершина $f_k \in DT$, если найдется хотя бы одна (v,t)-цепь в Q, не содержащая w. Получаем противоречие. По той же причине $z \notin \mathrm{Reach}(v)$. Предложения доказано.

Вернемся к доказательству теоремы. Докажем, что граф G ациклический. Так как G является (s,t)-графом, существует минимальный путь Q, содержащий дугу $f_n = uv$ наименьшего веса. Так как любая d-вершина в G имеет входящую дугу, не принадлежащую Q, в силу предложения 1, все вершины из G принадлежат Q и любая d-вершина достижима из v в Q, т. е. принадлежит $\mathrm{Reach}(v)$. Обозначим через φ_1 и φ_2 ранговые функции подграфов графа Q, индуцированных множествами вершин $\mathrm{Reach}(v)$ и $VG\setminus\mathrm{Reach}(v)$ соответственно. Без ограничения общности можно считать, что $\varphi_1(x) > \varphi_2(y)$ для любых $x \in \mathrm{Reach}(v)$, $y \in VG \setminus \mathrm{Reach}(v)$. Обозначим через φ_3 такую функцию, что

$$\varphi_3 | \mathrm{Reach}(v) \equiv \varphi_1, \qquad \varphi_3 | (VG \setminus \mathrm{Reach}(v)) \equiv \varphi_2.$$

Очевидно, φ_3 — ранговая функция для Q. Кроме того, для любой дуги $e = zw$ из $DG \setminus DQ$, в силу предложения 1,

$$w \in \mathrm{Reach}(v), \quad z \in VG \setminus \mathrm{Reach}(v),$$

т.е. $\varphi_3(w) > \varphi_3(z)$. Таким образом, φ_3 — ранговая функция для G.

Так как любая (v,t)-цепь C в G состоит из вершин, ранги которых превосходят ранг вершины v, граф C не может содержать дуг, не принадлежащих DQ (см. доказанное выше). Другими словами, C является (v,t)-цепью в Q. Из предложения 1 теперь следует, что G — каркасный граф.

Обозначим через $f_k = zw$ дугу, имеющую наименьший вес среди дуг в $DG \setminus DQ$, а через T минимальный путь, построенный процедурой $\mathrm{Proc}(s, \mathscr{L}(f_k, Q))$. Применяя предложение 1 для тройки (f_k, f_n, Q), заключаем, что $DT \setminus DQ = \{f_k\}$. Очевидно, любая d-вершина y в G, отличная от w, имеет в $D^+(y, G)$ дугу f_s, не принадлежащую DT. В силу предложения 1 для тройки (f_s, f_k, T), вершина y достижима из w в T и, следовательно, y достижима из v в Q. Поэтому вершина w — ближайшая к v в графе Q d-вершина графа G. Рассмотрим два случая.

В первом случае $v = w$. Пусть DF — редуцируемая часть $\mathrm{Red}(f_k, f_n, T, Q)$. Если существует внутренняя вершина $x \in VF$ такая, что

$$D^-(x, G) \setminus D^-(x, Q) \neq \varnothing,$$

то имеется дуга $f_s = xy$ такая, что $f_s \notin DT$ и y — d-вершина в G. Но тогда тройка (f_s, f_k, T) противоречит предложению 1, ибо $x \notin VT$. Итак, $\tau_1 = \mathrm{Red}(f_k, f_n, T, Q)$ — редукция. Пусть H — результат этой редукции, а дуга f_r имеет наименьший вес среди дуг в $DG \setminus (DT \cup DF)$. Так как $r < k$, в случае $| D^+(v, H) | > 1$ применимы предыдущие рассуждения, а в случае $| D^+(v, H) | = 1$ мы находимся в рамках применимости рассуждений, используемых ниже во втором случае. В любом случае доказано, что к H применима редукция $\mathrm{Red}(f_r, f_k, R, T)$, которая смежна с τ_1.

Во втором случае $v \neq w$. Обозначим через f_t дугу из $D^+(w, Q)$. Если $t < k$, то в силу предложения 1 для тройки (f_t, f_k, T) начальная вершина дуги f_t должна принадлежать VT. Но все вершины (v, w)-цепи, кроме w, являются c-вершинами в G. Поэтому и $f_n \in DT$, что невозможно (см. доказательство предложения 1, где в роли f_n берется дуга f_k и где показано, что $f_k \notin DT$).

Итак, $t > k$ и применимы рассуждения, использованные в первом случае, в силу которых к G применима редукция $\tau_1 = \mathrm{Red}(f_k, f_t, T, Q)$. Дальунейшие рассуждения аналогичны соответствующим рассуждениям первого случая.

Продолжая этот процесс, через конечное число шагов построим искомую редуцирующую цепочку. Теорема доказана.

Замечание 2. В общем случае возможно экспоненциально большое число цепочек, редуцирующих dc-тривиальный граф с пороговой живучестью. Однако приводимая ниже теорема 2 гарантирует эффективное построение некоторой канонической цепочки редукций такого графа, что автоматически означает эффективную разрешимость задачи распознавания dc-тривиальных графов с пороговой живучестью.

Приведем обозначения, используемые ниже в леммах 2 и 3. Граф G — каркасный dc-тривиальный (s, t)-граф; $v_1, \ldots, v_r$ — d-вершины графа G, занумерованные в порядке возрастания их рангов; C — (v_1, t)-цепь, содержащая дуги $g_i = u_i v_i$ графа G, $i = 2, \ldots, r$; $\tau_i = \mathrm{Red}(e_{i+1}, e_i, Q_{i+1}, Q_i)$; P — подграф графа G, построенный процедурой $\mathrm{Proc}(\{s, v_1\}, \mathscr{L}(C))$ в соответствии со следующим правилом выбора $\mathscr{L}(C)$:

– если $z = v_i$, $i > 1$, то $Ch(z) = g_i$.

Так как G — каркасный граф, подграф P определяется однозначно.

Дугу uv_1 назовем вырожденной (невырожденной) относительно P, если $u \in VP$ $(u \notin VP)$.

Лемма 2. *Пусть G обладает пороговой живучестью и $\Omega = \tau_1, \ldots, \tau_s$ — редуцирующая его цепочка, в которой $DP \subseteq DQ_1$. Предположим, что τ_i — некоторая редукция первого звена в Ω. Тогда вырожденность e_i влечет вырожденность e_{i+1},* *и если e_{i+1} невырождена, то начальная вершина дуги e_i достижима в G из начальной дуги e_{i+1}.*

Доказательство. Если DF_i — редуцируемая часть редукции τ_i, то, ввиду вырожденности e_i, $DF_i = \{e_i\}$. Так как $DP \subseteq DQ_1$, справедливо включение $DP \subseteq DQ_i$, откуда следует, что $DQ_i = DP \cup \{e_i\}$. Но, по определению редукции, начальная вершина w дуги e_{i+1} принадлежит VQ_i. Отсюда, $w \in VP$, что означает вырожденность дуги e_{i+1}.

Докажем второе утверждение. Пусть w — начальная вершина дуги e_{i+1}. По предположению, $w \notin VP$. Но по определению редукции $w \in VQ_i$ и $DQ_i \setminus DQ_{i+1} = DF_i$. Поэтому w инцидентна некоторой дуге из DF_i, что и означает достижимость начальной вершины дуги e_i из w. Лемма доказана.

Порогом вырожденности назовем число t такое, что $t-1$ — наибольший индекс, при котором e_{t-1} невырождена (e_0 считаем невырожденной фиктивной дугой).

Из определения звена цепочки редукций непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть G обладает пороговой живучестью и $\tau_1, \dots, \tau_r$ — первое звено некоторой цепочки $\tau_1, \dots, \tau_s$, редуцирующей G, причем $DP \subseteq DQ_1$. Пусть θ — произвольная перестановка чисел $t, t+1, \dots, r+1$. Тогда $\tau_1, \dots, \tau_{t-2}, \tau'_{t-1}, \tau_{\theta(t)}, \dots, \tau_{\theta(r)}, \tau'_{r+1}, \dots, \tau_s$ — цепочка, редуцирующая G, где*

$$\begin{aligned} \tau'_{t-1} &= \mathrm{Red}(e_{\theta(t)}, e_{t-1}, Q_{\theta(t)}, Q_{t-1}), \quad t>1,\\ \tau_{\theta(i)} &= \mathrm{Red}(e_{\theta(i+1)}, e_{\theta(i)}, Q_{\theta(i+1)}, Q_{\theta(i)}),\\ \tau'_{r+1} &= \mathrm{Red}(e_{r+2}, e_{\theta(r+1)}, Q_{r+2}, Q_{\theta(r+1)}). \end{aligned}$$

В теореме 2 сохраняем смысл обозначений C, P, $v_1, \dots, v_r$, $g_2, \dots, g_r$. Кроме того, полагаем, что $D^+(v_1, G) = \{c_1, \dots, c_{j+1}\}$, и дуги $c_1, \dots, c_{j+1}$ занумерованы в порядке убывания рангов их начальных вершин.

Теорема 2. *Пусть G является dc-тривиальным (s,t)-графом. Тогда G обладает пороговой живучестью, если и только если G — каркасный граф и к G применима редукция вида $\tau = \mathrm{Red}(c_2, c_1, R_2, R_1)$, где $DP \subseteq DR_1$, и результат редукции τ также обладает пороговой живучестью.*

Доказательство. Используем индукцию по числу дуг.

Докажем необходимость. В силу теоремы 1, граф G каркасный и к нему применима редуцирующая цепочка, начинающаяся с редукции $\tau_1 = \mathrm{Red}(f_k, f_m, T, Q)$; здесь T, Q, f_k, f_n, f_t имеют тот же смысл, что и в доказательстве теоремы 1 (при этом $m = n$ или $m = t$ в зависимости от ситуации, рассматриваемой в доказательстве теоремы 1). Очевидно, $DP \subseteq DQ$.

Предположим вначале, что f_m вырождена. Тогда, в силу леммы 2, все дуги из $D^+(v_1, G)$ вырождены. Из леммы 3 теперь следует, что существует цепочка, редуцирующая G, которая начинается с τ.

Пусть теперь f_m невырождена. Тогда, в силу леммы 2, начальная вершина дуги f_m имеет наибольший ранг среди всех начальных вершин невырожденных дуг, откуда, согласно выбору c_1, $f_m = c_1$. Аналогично, в случае невырожденности f_k, $f_k = c_2$, т. е. $\tau_1 = \tau$. Если же f_k вырождена, то из леммы 3 следует существование редуцирующей цепочки, начинающейся с τ.

Докажем достаточность. Пусть H — результат редукции τ. Если $|D^+(v_1, G)| \geqslant 3$, то по индуктивному предположению (ибо H обладает пороговой живучестью как монотонный (s,t)-подграф графа G) к H применима редукция $\mathrm{Red}(c_3, c_2, R_3, R_2)$, которая смежна с τ, причем $DP \subseteq DR_2$.

Пусть $|D^+(v_1, G)| = 2$. Обозначим через P' подграф графа H, построенный процедурой $\mathrm{Proc}(\{s, v_2\}, \mathscr{L}(C))$. Если дуга g_2 невырождена относительно P', то ее начальная вершина u_2 имеет максимальный ранг среди начальных вершин других дуг из $D^+(v_2, G)$, невырожденных относительно P' (в доказательстве теоремы 1 показано, что u_i имеет наибольший ранг среди всех начальных вершин дуг из $D^+(v_i, G)$). Поэтому, в силу индуктивного предположения, к H применима редукция $\mathrm{Red}(x, g_2, R_3, R_2)$, которая смежна с τ, причем $DP' \subseteq DR_2$.

Итак, приведенные выше рассуждения применимы и к графу H. Поэтому, продолжая этот процесс, через конечное число шагов построим цепочку, редуцирующую граф G. Это и означает, в силу теоремы 1, что G обладает пороговой живучестью. Теорема доказана.

4. Следствия

Следствие 1. *Задача распознавания dc-тривиальных графов G, обладающих пороговой живучестью, разрешима за время $O(|DG| \cdot |VG|)$.*

Доказательство. Проверка ацикличности графа G, а также его ранжирование осуществимы за время $O(|DG|)$ [11]. За это же время определяется (v_1, v_r)-цепь C (если она существует), содержащая d-вершины графа G, а также подграф P и порог вырожденности t. Таким образом, результат редукции τ (см. формулировку теоремы 2) можно определить за время $O(|DG|)$. Остальное следует из теоремы 2.

Следствие 2. *Оллтерминальный (s,t)-граф G обладает пороговой живучестью, если и только если он ациклический и имеет не более одной d-вершины.*

Доказательство. Докажем необходимость. В силу теоремы 1, граф G каркасный. Наличие двух d-вершин u и v означало бы существование (v,t)-цепи, состоящей из единственной дуги vt и не проходящей через вершину u (считаем, что ранг u больше ранга вершины v). Получаем противоречие.

Докажем достаточность. Граф G является каркасным, так как имеет не более одной d-вершины. Если d-вершин нет, то все доказано. Пусть v — d-вершина в G, $D^+(v, G) = \{e_1, \ldots, e_r\}$. Обозначим через Q произвольный минимальный путь в G, содержащий дугу e_1. По определению, Q — остовный подграф. Положим

$$\tau_i = \mathrm{Red}(e_{i+1}, e_i, Q - e_1 + e_{i+1}, Q - e_1 + e_i).$$

Непосредственно проверяется, что $\tau_1, \ldots, \tau_{r-1}$ — цепочка, редуцирующая G. Достаточность теперь следует из теоремы 1.

Пусть H — (s,t)-граф с ранговой функцией φ. Граф H назовем арфа-графом, если H содержит остовную (s,t)-цепь и для любых дуг uv и zw, не принадлежащих этой цепи (такие дуги назовем хордами арфа-графа) либо

$$\varphi(u) \leqslant \varphi(z), \qquad \varphi(v) \geqslant \varphi(w),$$

либо

$$\varphi(u) \geqslant \varphi(z), \qquad \varphi(v) \leqslant \varphi(w).$$

Следствие 3. *Пороговой живучестью 2-терминальный (s,t)-граф G обладает, если и только если он является арфа-графом.*

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по числу дуг. Докажем необходимость. Так как минимальными путями графа G являются (s,t)-цепи, утверждение очевидно, если G — минимальный путь. Предположим теперь, что G содержит d-вершины. Тогда, в силу теоремы 1, существует цепочка, редуцирующая G. Пусть $\tau = \mathrm{Red}(f,e,T,Q)$ — первая редукция в этой цепочке. Тогда Q — остовный минимальный путь, т.е. Q — остовная (s,t)-цепь. Пусть H — результат редукции τ, $f = wv$, DF — редуцируемая часть. Из определения редукции следует теперь, что DF является (w,v)-цепью в G, ибо $DQ = (DT \setminus \{f\}) \cup DF$. Кроме того, из доказательства теоремы 1 следует, что для любой дуги $g = zx$ из $DG \setminus (DQ \cup f)$ ранг вершины z меньше ранга вершины v. Но по предположению индукции, H является арфа-графом с остовной цепью DT (в арфа-графах остовная цепь определяется однозначно), в которой начальные вершины всех хорд предшествуют вершине v. Это означает, что G — также арфа-граф с остовной цепью DQ, так как множество хорд в G в точности состоит из хорд графа H и дуги f.

Докажем теперь достаточность. Пусть Q — остовная (s,t)-цепь арфа-графа G, $g = wv$ — хорда с минимальным расстоянием между вершинами w и v в цепи Q, $D^+(v,Q) = \{e\}$. Очевидно, к G применима редукция $\mathrm{Red}(g,e,T,Q)$. При этом результат редукции H также является арфа-графом с остовной (s,t)-цепью DT. Остальное следует из индуктивного предположения и теоремы 1.

Теорема 3. *Задача распознавания монотонных (s,t)-графов, обладающих пороговой живучестью, разрешима за время, полиномиально зависящее от их размерности и числа минимальных путей.*

Доказательство. Отметим, что доказательство ацикличности графа G в теореме 1 применимо к произвольному монотонному графу, обладающему пороговой живучестью: для этого в доказательстве достаточно только d-вершины заменить вершинами, отличными от c-вершин. Поэтому можно считать G ранжированным монотонным (s,t)-графом. Следующий алгоритм порождает множество $\mathscr{P} = \{P_1, \dots, P_m\}$ всех его минимальных путей.

Шаг 1. Объявить вершину s помеченной. Положить $VP := \varnothing$, $DP := \varnothing$, $\mathrm{back}(t) := \varnothing$, $u := t$. Для каждой вершины $v \in VG \setminus \{s\}$ занумеровать все пороговые наборы в $\mathrm{th}(v,G)$ целыми числами от 1 до $|\mathrm{th}(v,G)|$. Положить $\mathrm{count}(v) := 1$ для каждой вершины $v \in VG \setminus \{s\}$ и перейти к шагу 2.

Шаг 2. Объявить вершину u помеченной. Выбрать в $\mathrm{th}(u,G)$ пороговый набор $\mathrm{Ch}(u)$ с номером $\mathrm{count}(u)$, множество начальных вершин всех дуг из $\mathrm{Ch}(u)$ обозначить через $B(u)$. Положить $DP := DP \cup \mathrm{Ch}(u)$, $VP := VP \cup B(u) \cup \{u\}$, $\mathrm{count}(u) := \mathrm{count}(u) + 1$, и перейти к шагу 3.

Шаг 3. Если все вершины в VP помечены, то вывести минимальный путь P с множеством вершин VP и множеством дуг DP и перейти к шагу 4. Если не все вершины в VP помечены, то выбрать среди непомеченных вершин в VP вершину v наибольшего ранга. Положить $\mathrm{back}(v) := u$, $u := v$, и перейти к шагу 2.

Шаг 4. Выбрать в $\mathrm{th}(u, G)$ пороговый набор $\mathrm{Ch}(u)$ с номером $\mathrm{count}(u) - 1$, множество начальных вершин дуг из $\mathrm{Ch}(u)$ обозначить через $B(u)$. Положить $DP := DP \setminus \mathrm{Ch}(u)$, $VP := VP \setminus (B(u) \cup \{u\})$. Снять метку с вершины u. Перейти к шагу 5.

Шаг 5. Если $\mathrm{count}(u) > |\mathrm{th}(u, G)|$, то перейти к шагу 6. Если $\mathrm{count}(u) \leqslant |\mathrm{th}(u, G)|$, то перейти к шагу 2.

Шаг 6. Если $\mathrm{back}(u) = \varnothing$, то алгоритм завершает работу. Если $\mathrm{back}(u) \neq \varnothing$, то положить $u := \mathrm{back}(u)$ и перейти к шагу 4.

В силу леммы 1 данный алгоритм порождает множество $\mathscr{P}$ всех минимальных путей графа G, так как шаги 1–3 соответствуют процедуре $\mathrm{Proc}(s, \mathscr{L})$, а шаги 4–6 организуют перебор всех минимальных путей, основанный на принципе поиска в глубину [11]. Кроме того, временная сложность алгоритма равна $O(|DG|\, m)$, так как число операций между двумя последовательными выводами минимальных путей есть $O(|DG|)$.

Для дальнейшего понадобится определение сдвига некоторого множества $\mathscr{E} = \{e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\}$, $i_1 < \ldots < i_k$. Подмножество $\mathscr{E}' = \{e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}\}$, $j_1 < \ldots < j_k$, называется левым сдвигом множества $\mathscr{E}$ (или $\mathscr{E}$ называется правым сдвигом $\mathscr{E}'$), если $j_1 \leqslant i_1, \ldots, j_k \leqslant i_k$. Предположим, что любой левый сдвиг сечения также является сечением. Тогда это равносильно тому, что любой левый сдвиг множества, содержащего некоторый минимальный путь из $\mathscr{P}$, также содержит некоторый минимальный путь из $\mathscr{P}$. Пары множеств $[DG, \mathscr{P}]$ с таким свойством известны как 2-монотонные системы [12], а соответствующая нумерация элементов из DG называется регулярной [12].

Распознавание 2-монотонных систем и построение соответствующей регулярной нумерации осуществимы за время $O(m^2\, |DG|)$ [13]. В [14] доказано, что 2-монотонные системы $[DG, \mathscr{P}]$ имеют $O(m\, |DG|)$ минимальных (относительно включения) сечений, которые могут быть определены за время $O(m\, |DG|)$.

Очевидно, что если для G существует пороговая пара (w, b), а дуги занумерованы в порядке невозрастания своих весов, то $[DG, \mathscr{P}]$ является 2-монотонной системой, т.е. 2-монотонность $[DG, \mathscr{P}]$ является необходимым условием для G иметь пороговую живучесть. Считаем, что это условие выполняется для G.

Множество всех минимальных сечений в G обозначим через $R = \{R_1, \ldots, R_n\}$. Пусть $\mathrm{ind}(\mathscr{E})$ обозначает множество индексов дуг из $\mathscr{E}$. Положим $x_i = w(e_i)$, $DG = \{e_1, \ldots, e_r\}$, $x_{r+1} = b$. Тогда, по определению пороговой пары (w, b), выполняются следующие неравенства:

$$
\begin{aligned}
\sum_{j \in ind(R_i)} x_j - x_{r+1} &\geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n,\\
\sum_{j \in ind(DG \setminus P_i)} x_j - x_{r+1} &< 0, \quad i = 1, \ldots, m,\\
x_i &> 0, \quad i = 1, \ldots, r+1.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Обратно, любое решение системы (3) соответствует пороговой паре. Это вытекает из следующих двух фактов: любое сечение содержит некоторое минимальное сечение, произвольное множество $\mathscr{E}$, не являющееся сечением, содержится в некотором множестве $DG \setminus P_i$.

Но совместность систем линейных неравенств является полиномиально разрешимой задачей [15], т.е. совместность системы (3) может быть определена за время, полиномиально зависящее от $m = |\mathscr{P}|$ и $r = |DG|$. Теорема доказана.

Список литературы

1. Черняк А.А., Комбинаторно-графовый метод анализа надежности сложных систем с положительными булевыми функциями. *Автоматика и телемеханика* (1991) №4, 165–175.
2. Chernyak A.A., A new graph-combinatorial method for reliability analysis of monotone graphs. In: *Proc. 8th Intern. Symposium on Reliability in Radioelectronics.* Budapest, 1991, pp. 135–140.
3. Chernyak A.A., Chernyak Zh.A., A unified domination approach for reliability analysis for networks with arbitrary logic in vertices. *IEEE Trans. Reliab.* (1996) **45**, 114–119.
4. Satyanarayana A., Unified formula for analysis of some network reliability problems. *IEEE Trans. Reliab.* (1982) **31**, 23–32.
5. Satyanarayana A., Hagstorm J.N., A new algorithm for the reliability analysis of multiterminal networks. *IEEE Trans. Reliab.* (1981) **30**, 325–334.
6. Байхельт Ф., Франкен П., *Надежность: математический подход.* Радио и связь, Москва, 1988.
7. Черняк А.А., Ациклические монотонные графы: доминирование и надежность. *Весцi НАН Беларусi, Сер. ф.-т.н.* (1998) №3, 108–114.
8. Гэри М., Джонсон Д., *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи.* Мир, Москва, 1982.
9. Иванов М.В., Можаев А.С., Рябинин Н.А., Вопросы судостроения. *Судовая автоматика* (1984) **10**, 18–24.
10. Hammer P.L., Maffrey F., Queyranne M., Cut-threshold graphs. *Discrete Appl. Math.* (1991) **30**, 163–179.
11. Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н., *Комбинаторные алгоритмы: теория и практика.* Мир, Москва, 1980.
12. Sheng C.L., *Threshold logic.* Academic Press, New York, 1969.
13. Hammer P.L., Peled U.N., Pollaczek F., An algorithm to dualize a regular switching function. *IEEE Trans. Comput.* (1979) **28**, 238–243.
14. Черняк А. А., Черняк Ж. А., Надежность бинарных систем. *Дискретная математика* (1999) **11**, №1, 129–139.
15. Схрейвер А., *Теория линейного и целочисленного программирования.* Мир, Москва, 1991.

Статья поступила 03.06.1998.
Переработанный вариант поступил 08.04.1999.