А. А. Черняк, Резидуальная надежность P-пороговых графов, *Дискретн. анализ и исслед. опер.*, 1999, том 6, выпуск 3, 71–86

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 1999. Серия 1. Том 6, № 3, 71–86

УДК 519.71

РЕЗИДУАЛЬНАЯ НАДЕЖНОСТЬ Р-ПОРОГОВЫХ ГРАФОВ

А. А. Черняк

Задача вычисления резидуальной надежности (RES-проблема) решена для всех классов Р-пороговых графов, для которых ранее были получены эффективные структурные характеризации, основанные на декомпозиции этих графов на неразложимые компоненты. В частности, дано конструктивное доказательство существования линейных алгоритмов вычисления резидуальной надежности для псевдодоминантно-пороговых, доминантно-пороговых, матрогенных и матроидальных графов. В то же время доказано, что RES-проблема является #Р-полной в классе бирегулярных графов. Этот результат означает #Р-полноту RES-проблемы в классах неразложимых бокс-пороговых и псевдопороговых графов.

Введение

В статье рассматриваются неориентированные, без петель и кратных ребер графы. Пусть G — граф с множеством вершин VG и множеством ребер EG, $T = VG$ или $T = EG$, $\mathscr{P}(T)$ — некоторое семейство непустых подмножеств множества T. Тогда пара $[T, \mathscr{P}(T)]$ называется *графоидной системой* с носителем T и множеством путей $\mathscr{P}(T)$. Если $\mathscr{P}(T)$ совпадает с множеством

$$\{X \mid X \subseteq T \text{ и существует } Y \in \mathscr{P}(T) \text{ такое, что } Y \subseteq X\},$$

то система $[T, \mathscr{P}(T)]$ называется *иерархической*. Предположим, что каждый элемент $s_i \in T$ независимо от других элементов может исключаться (отказывать) из T с вероятностью $1 - p_i$, $0 \leqslant p_i \leqslant 1$. Обозначим через $R(T, \mathscr{P}(T), \overline{p})$, где $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_k)$, $k = |T|$, вероятность события, заключающегося в том, что множество неисключенных (исправных) элементов является путем.

Будем считать, что $\mathscr{P}(T)$ состоит из тех подмножеств в T, которые индуцируют связные подграфы графа G. В этом случае величины $R(EG, \mathscr{P}(EG), \overline{p})$ и $R_v(G, \overline{p}) = R(VG, \mathscr{P}(VG), \overline{p})$ известны как олтерминальная и резидуальная надежности графа G соответственно. При этом отличие второго понятия от других классических критериев надежности состоит в том, что оно определяется для системы $[VG, \mathscr{P}(VG)]$, не являющейся иерархической.

Алгоритмические аспекты задачи вычисления резидуальной надежности (называемой в дальнейшем RES-проблемой) изучались ранее в [6, 8, 10, 11]. В этих работах были получены полиномиальные алгоритмы определения $R_v(G, \overline{p})$ для деревьев, интервальных графов и графов подстановок. В то же время была доказана #P-полнота RES-проблемы для расщепляемых и двудольных графов.*)

В данной статье RES-проблема решена для тех классов P-пороговых графов, для которых в [3, 4, 7, 12, 13] были получены эффективные структурные характеризации, основанные на декомпозиции этих графов на неразложимые компоненты. Более конкретно: дано конструктивное доказательство существования линейных алгоритмов вычисления резидуальной надежности для матрогенных и псевдодоминантно-пороговых графов. Из этих результатов следует существование аналогичных алгоритмов для доминантно-пороговых, матроидальных и пороговых графов. Получены также эффективные рекуррентные соотношения, позволяющие вычислять коэффициенты полиномов надежности перечисленных выше классов графов. В то же время доказано, что RES-проблема является #P-полной даже в классе бирегулярных графов, в которых вероятности отказов всех вершин одинаковы и равны 1/2. Этот результат означает #P-полноту RES-проблемы в классах неразложимых бокс-пороговых и псевдопороговых графов.

1. Основные определения

Все неопределяемые в статье понятия теории графов можно найти в [2]. В приведенных ниже определениях, связанных с P-пороговыми графами, мы следуем монографии [9].

Пусть R^+ обозначает множество неотрицательных действительных чисел. Граф G называется *псевдодоминантно-пороговым,* если для каждого индуцированного подграфа H графа G существуют функция $w_H\colon VH \to R^+$, не равная тождественно нулю, и число $t \in R^+$ такие, что для каждого подмножества $S \subseteq VH$ истинны утверждения:

$$\begin{aligned}&\text{если } S \text{ — доминирующее множество в } H, \text{ то } \sum_{v \in S} w_H(v) \geqslant t,\\ &\text{если } S \text{ — не доминирующее множество в } H, \text{ то } \sum_{v \in S} w_H(v) \leqslant t.\end{aligned} \qquad (1)$$

*) Понятие #P-полноты относится к перечислительным задачам (см., например, [1, с. 208–212]).

Если одно из неравенств в (1) заменить на строгое неравенство, то получим определение *доминантно-порогового* графа.

Граф G называется *псевдопороговым,* если существуют функция $w : VG \to R^+$, не равная тождественно нулю, и число $t \in R^+$ такие, что для каждого подмножества $S \subseteq VG$ истинны утверждения:

$$\begin{gathered}\text{если } S \text{ — независимое множество в } G \text{ то } \sum_{v \in S} w(v) \leqslant t,\\ \text{если } S \text{ — зависимое множество в } G \text{ то } \sum_{v \in S} w(v) \geqslant t.\end{gathered} \tag{2}$$

Если одно из неравенств в (2) заменить на строгое неравенство, то получим определение порогового графа. Эквивалентное определение пороговых графов может быть дано в терминах предпорядка $\geqslant$: если $u, v \in VG$, то $v \geqslant u$ тогда и только тогда, когда каждая вершина, смежная с u и отличная от v, смежна с вершиной v.

Граф G называется *бокс-пороговым,* если любые две вершины в G, не сравнимые относительно предпорядка $\geqslant$, имеют одинаковые степени.

Граф G называется *матрогенным,* если семейство всех подмножеств в VG, индуцирующих пороговые подграфы, образует систему независимости матроида с носителем VG. Граф G называется *матроидальным,* если семейство всех таких подмножеств в EG, что вершины, инцидентные ребрам одного подмножества, индуцируют пороговые подграфы, образует систему независимости матроида с носителем EG.

Если $p_1 = \cdots = p_n = p$ и $n = |VG|$, то по определению

$$R_v(G,p) = \sum_{i=0}^{n} c_i(G) p^i (1-p)^{n-i}, \tag{3}$$

где $c_i(G)$ — число i-вершинных связных индуцированных подграфов в G. Выражение в правой части (3) называется *полиномом* (*резидуальной*) *надежности* графа G с коэффициентами $c_i(G)$ и будет обозначаться через $\mathrm{Pol}(G,p)$.

2. Трудноразрешимые случаи RES-проблемы

Здесь используются классические понятия #P-полноты и полиномиальной сводимости, применяемые к перечислительным задачам; подробности можно найти в [1, 14].

Сначала дадим несколько определений. Граф G называется *расщепляемым,* если существует разбиение $VG = A \cup B$ его вершинного множества на клику A и независимое множество B. Если при этом A и B — орбиты в G, то G называется *бирегулярным* (орбита в графе —

это множество его вершин одинаковой степени d; при этом d называется *степенью орбиты*).

Будем говорить, что вершина v *насыщается* паросочетанием P, если v инцидентна некоторому ребру из P. Обозначения: $\mathscr{L}_k(G)$ — множество всех паросочетаний в G, состоящих из k ребер; $\mathscr{L}(G) = \bigcup_k \mathscr{L}_k(G)$; $\mathrm{con}(G) = \sum_k c_k(G)$; $\mathscr{E}(G)$ — множество всех совершенных паросочетаний в G. Задачу определения числа $|\mathscr{E}(G)|$ в классе графов с множеством $\{d_1, \ldots, d_r\}$ степеней орбит обозначим через $\mathrm{PM}(d_1, \ldots, d_r)$. Пусть H — индуцированный подграф в G и $P \in \mathscr{L}(H)$. Скажем, что P *индуцируется* некоторым паросочетанием T из $\mathscr{L}(G)$, если $T \cap EH = P$. *Длиной* рационального числа p/q, где p и q — взаимно простые целые числа, называется величина $1 + \log_2(|p| + 1) + \log_2(|q| + 1)$.

Лемма 1 [14]. *Пусть b — n-вектор, A — невырожденная квадратная матрица порядка n и компоненты матрицы A и вектора b — рациональные числа, длины которых ограничены некоторым числом m. Тогда система линейных уравнений $Ax = b$ может быть решена за время, полиномиально зависящее от m и n.*

Теорема 1. RES-*проблема является #P-полной в классе бирегулярных графов, вероятности вершин которых одинаковы и равны* $1/2$.

Доказательство. В [5] была доказана #P-полнота задачи PM(2,3). Сначала докажем полиномиальную сводимость PM(2,3) к задаче PM(3). Пусть G — произвольный граф с множеством степеней вершин $\{2,3\}$, содержащий совершенное паросочетание. Так как число $|VG|$ четно и сумма степеней вершин любого графа также четна [2], то орбита степени 2 в G состоит из четного числа вершин. Пусть $\{v_1, \ldots, v_{2l}\}$ — орбита степени 2. Введем обозначения: F — $2l$-вершинный простой цикл, $VF = \{u_1, \ldots, u_{2l}\}, VF \cap VG = \varnothing$, H — граф с множеством вершин $VH = VF \cup VG$ и множеством ребер

$$EH = EG \cup EF \cup \{u_i v_i : i = 1, \ldots, 2l\}$$

(степени всех вершин в H равны 3). Пусть $\mathscr{E}_k(H)$ — множество всех совершенных паросочетаний в H, в каждом из которых содержится k ребер цикла F; $g_k = |\mathscr{E}_k(H)|$. Так как $|\mathscr{E}(F)| = 2$ и $|\mathscr{E}_l(H)| = |\mathscr{E}(G)| \cdot |\mathscr{E}(F)|$, то $2|\mathscr{E}(G)| = |\mathscr{E}_l(H)|$.

Далее каждое ребро $u_i u_{i+1}$ из EF в графе H заменим подграфом M_{ir}, изображенным на рис. 1 (множества $VM_{ir} \backslash \{u_i, u_{i+1}\}$ считаются попарно непересекающимися). Полученный граф обозначим через H_r. Пусть $S \in \mathscr{E}(H_r)$. Непосредственно проверяется, что ребра e_{01} и e_{02} одновременно либо содержатся, либо не содержатся в S. Поэтому корректно

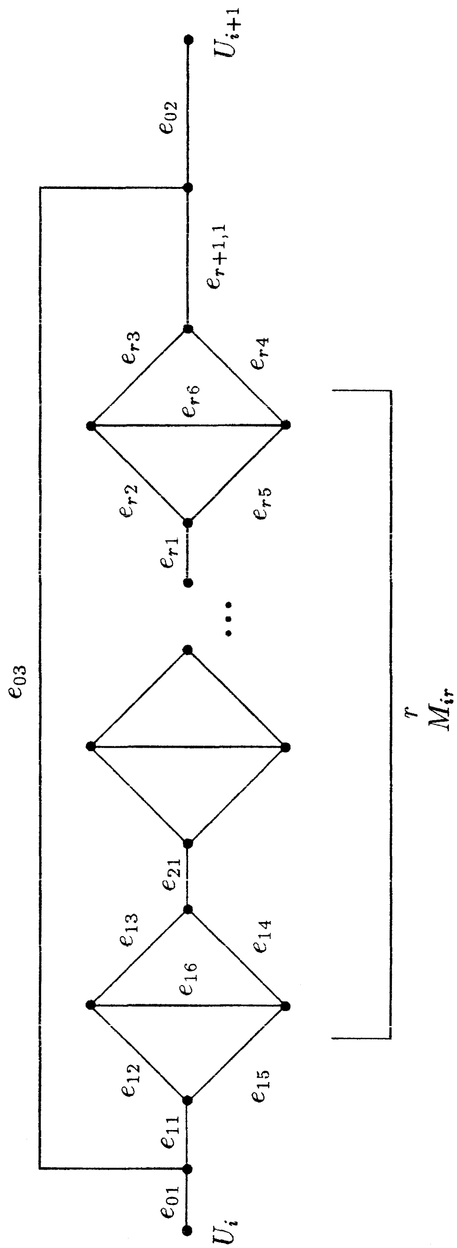

Рис. 1

сюръективное отображение $\varphi\colon \mathscr{E}(H_r) \to \mathscr{E}(H)$, определяемое следующим образом: ребро $e = u_i u_{i+1}$ из EF принадлежит множеству $\varphi(S)$ тогда и только тогда, когда $\{e_{01}, e_{02}\} \subseteq S$; ребро e из $EH \backslash EF$ принадлежит множеству $\varphi(S)$ тогда и только тогда, когда $e \in S$.

Из вида графов M_{ir} вытекает истинность следующих импликаций:

$$(\text{либо } e_{01} \notin S \text{ и } e_{03} \in S, \text{ либо } e_{01} \in S) \Rightarrow \begin{pmatrix} \text{либо } \{e_{j2}, e_{j4}\} \subseteq S, \\ \text{либо } \{e_{j3}, e_{j5}\} \subseteq S, \\ \text{для каждого } j = 1, \dots, r \end{pmatrix},$$

$$(e_{01} \notin S, e_{03} \notin S) \Rightarrow \left(S \cap E\, M_{ir} = \bigcup_{j=1}^{r} \{e_{j1}, e_{j6}, e_{j+1,1}\}\right).$$

Отсюда имеем

$$|\varphi^{-1}(\mathscr{E}_k(H))| = g_k (2^r)^k (2^r + 1)^{2l-k}.$$

Следовательно,

$$|\mathscr{E}(H_r)| = |\varphi^{-1}(\mathscr{E}(H))| = (2^r + 1)^{2l} \sum_{k=0}^{l} \left(\frac{2^r}{1 + 2^r}\right)^k g_k$$

или

$$|\mathscr{E}(H_r)|/(2^r + 1)^{2l} = \sum_{k=0}^{l} \left(\frac{2^r}{2^r + 1}\right)^k g_k, r = 1, \dots, l + 1. \tag{4}$$

Коэффициенты системы линейных уравнений (4) образуют матрицу Вандермонда. Отсюда и из леммы 1 следует, что система (4) разрешима за время, полиномиально зависящее от l и $|EH_r|$. Но, как показано выше, $|\mathscr{E}(G)| = g_l/2$, что доказывает полиномиальную сводимость PM(2,3) к задаче PM(3).

Теперь докажем полиномиальную сводимость задачи PM(3) к задаче IPReg определения числа всех паросочетаний (необязательно совершенных) в классе регулярных графов. Пусть G — произвольный кубический граф и $VG = \{v_1, \dots, v_n\}$. С каждой вершиной v_i свяжем граф L_{ir}, изображенный на рис. 2, положив вершину v_i смежной с вершинами u_{r1} и u_{r2} графа L_{ir} (множества VL_{ir} считаются попарно непересекающимися). Полученный граф обозначим через F_r. По построению граф F_r является регулярным. Обозначим теперь через a_k, b_k, c_k число паросочетаний в L_{ik}, насыщающих соответственно обе вершины u_{k1}, u_{k2}, только вершину u_{k1} и ни одной вершины u_{k1}, u_{k2}. Непосредственно проверяются следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} a_k &= 22a_{k-1} + 56b_{k-1} + 36c_{k-1}, & a_1 &= 24, \\ b_k &= 14a_{k-1} + 40b_{k-1} + 28c_{k-1}, & b_1 &= 16, \\ c_k &= 8a_{k-1} + 24b_{k-1} + 18c_{k-1}, & c_1 &= 10. \end{aligned} \tag{5}$$

Обозначим через N_{ir} подграф в F_r, индуцированный множеством вершин $VG \cup VL_{ir}$. Пусть $S \in \mathscr{L}(G)$. Если v_i насыщена паросочетанием S, то S индуцирует $|\mathscr{L}(L_{ir})|$ паросочетаний в N_{ir}, число которых равно

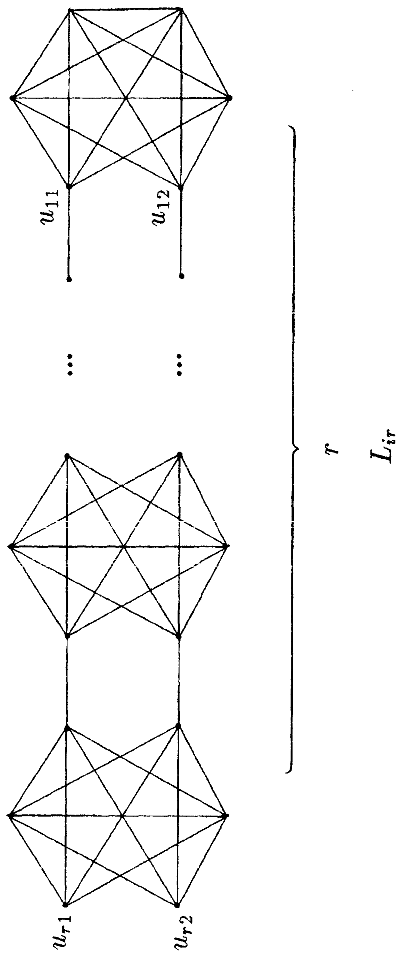

Рис. 2

$a_r+2b_r+c_r$. Если же v_i не насыщена паросочетанием S, то S индуцирует $a_r+4b_r+3c_r$ паросочетаний в N_{ir} (при этом ровно $|\mathscr{L}(L_{ir})|$ из них не содержат ребер v_iu_{r1}, v_iu_{r2}; остальные $2b_r+2c_r$ паросочетаний содержат только одно из этих ребер). Положим $m_i = |\mathscr{L}_i(G)|$. Тогда общее число паросочетаний в F_r

$$|\mathscr{L}(F_r)| = \sum_{i=0}^{n/2} m_i(a_r+2b_r+c_r)^{2i}(a_r+4b_r+3c_r)^{n-2i}.$$

Следовательно,

$$|\mathscr{L}(F_r)|/(a_r+4b_r+3c_r)^n = \sum_{i=0}^{n/2} m_i\left(\frac{a_r+2b_r+c_r}{a_r+4b_r+3c_r}\right)^{2i}. \qquad (6)$$

Докажем, что существует такая константа r_0, определяемая за полиномиальное время, что $d_i \neq d_j$ для любых $i, j > r_0$, где

$$d_r = \frac{a_r + 2b_r + c_r}{a_r + 4b_r + 3c_r}.$$

Поскольку

$$2\Big(\frac{1}{d_r} - 1\Big)^{-1} - 1 = \frac{a_r + b_r}{c_r + b_r} = \frac{a_r/b_r + 1}{c_r/b_r + 1},$$

то достаточно доказать, что $a_r \setminus b_r$ и $b_r \setminus c_r$ — строго убывающие последовательности при $r > r_0$.

Введем обозначения:

$$B = \begin{pmatrix} 22 & 56 & 36 \\ 14 & 40 & 28 \\ 8 & 24 & 18 \end{pmatrix}, \quad x_r = \begin{pmatrix} a_r \\ b_r \\ c_r \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 24 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Непосредственными вычислениями находятся следующие величины: характеристический полином матрицы $B/2$ равен $\lambda^3 - 40\lambda^2 + 63\lambda - 8$; собственные значения матрицы B суть $\lambda_1 = 76,72648$, $\lambda_2 = 2,995$, $\lambda_3 = 0,27854$;

$$\xi^1 = \begin{pmatrix} 2,3576 \\ 1,6611 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi^2 = \begin{pmatrix} -2,92146 \\ 0,3486 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi^3 = \begin{pmatrix} 1,75144 \\ -1,32221 \\ 1 \end{pmatrix}$$

— собственные векторы матрицы B; $\alpha_1 = 9,8564$, $\alpha_2 = -0,10937$, $\alpha_3 = 0,25297$ — компоненты разложения вектора x_0 в базисе ξ^1, ξ^2, ξ^3. Так как

$$x_r = B^r x_0 = B^r \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \xi^i = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \lambda_i^r \xi^i,$$

то

$$f(r) = \frac{a_r}{b_r} = \frac{\alpha_1 \xi_1^1 + \alpha_2 \xi_1^2 \gamma^r + \alpha_3 \xi_1^3 \Theta^r}{\alpha_1 \xi_2^1 + \alpha_2 \xi_2^2 \gamma^r + \alpha_3 \xi_2^3 \Theta^r},$$

где ξ_i^j — i-я координата вектора ξ^j, $\gamma = \lambda_2/\lambda_1$, $\Theta = \lambda_3/\lambda_1$. Следовательно,

$$\frac{b_r^2 f'(r)}{\gamma^r} = \left(\alpha_2 \xi_1^2 \ln\gamma + \alpha_3 \xi_1^3 \ln\Theta \Big(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\Big)^r\right) b_r - a_r \left(\alpha_2 \xi_2^2 \ln\gamma + \alpha_3 \xi_2^3 \ln\Theta \Big(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\Big)^r\right). \quad (7)$$

Так как $\lambda_3/\lambda_2 < 1/10$, то из (7) следует существование такого целого r_1, что $\operatorname{sign}(f'(r)) = \operatorname{sign}(\alpha_1\alpha_2\xi_1^2\xi_2^1 \ln\gamma - \alpha_1\alpha_2\xi_2^2\xi_1^1 \ln\gamma) < 0$ для $r > r_1$.

Аналогично показывается существование такого целого r_2, что если $r > r_2$, то $\operatorname{sign}(g'(r)) = \operatorname{sign}(\alpha_1\alpha_2\xi_3^1\xi_2^2 \ln\gamma - \alpha_1\alpha_2\xi_3^2\xi_2^1\ln\gamma) < 0$, где $g(r) = b_r/c_r$. Положив $r_0 = \max\{r_1, r_2\}$, получим искомое утверждение.

Итак, доказано, что при $r = r_0 + 1, \dots, r_0 + 1 + n/2$ коэффициенты системы линейных уравнений (6) образуют матрицу Вандермонда. Поэтому в силу леммы 1 система разрешима за время, полиномиально зависящее от $|EF_r|$ и n. Это означает полиномиальную сводимость PM(3) к задаче IPReg, так как $m_{n/2} = |\mathscr{E}(G)|$.

Осталось доказать полиномиальную сводимость IPReg к RES-проблеме в классе бирегулярных графов с вероятностями исправности вершин, равными $1/2$. Для этого возьмем произвольный регулярный граф G и его реберный граф F; положим $m = |VF|$, $n = |EF|$. Обозначим через $\mathscr{M}_k(F)$ множество вершинных подмножеств в F, каждое из которых покрывает ровно k ребер; $t_k = |\mathscr{M}_k(F)|$. По определению реберных графов F является регулярным графом. Пусть S — произвольное подмножество ребер в EG, T — соответствующее ему вершинное подмножество в реберном графе F. Непосредственно проверяется, что $T \in \mathscr{M}_n(F)$ тогда и только тогда, когда $EG \setminus S \in \mathscr{L}(G)$. Поэтому $t_n = |\mathscr{L}(G)|$. К F добавим n r-элементных множеств V_{ir}, состоящих из новых вершин степени 2, положив каждую вершину из V_{ir} смежной с концевыми вершинами i-го ребра из F. Затем подграф F пополним ребрами до полного подграфа (с множеством вершин VF). Полученный граф обозначим через H_r. Очевидно, что H_r — бирегулярный граф.

Пусть $C(H_r)$ — множество всех связных индуцированных подграфов в H_r, содержащих некоторые вершины из VF (в H_r имеется еще $nr = \left|\bigcup_i V_{ir}\right|$ связных индуцированных одновершинных подграфов). Зададим отображение $\varphi\colon C(H_r) \to 2^{VF}\colon \varphi(M) = VF \cap VM$ и выберем произвольное ребро $e_i \in EF$. Если ребро e_i не покрывается множеством $\varphi(M)$, то ввиду связности M имеем $VM \cap V_{ir} = \varnothing$. Если же e_i покрывается множеством $\varphi(M)$, то любое подмножество из V_{ir} (включая и пустое) может принадлежать множеству VM. Отсюда следует, что

$$|\varphi^{-1}(\mathscr{M}_k(F))| = t_k(2^r)^k, \quad |C(H_r)| = \sum_{k=0}^{n} t_k 2^{rk}$$

или

$$\operatorname{con}(H_r) - nr = \sum_{k=0}^{n} t_k 2^{rk}, \quad r = 1, \dots, n+1$$

(напомним, что $\operatorname{con}(H_r)$ есть число всех связных индуцированных подграфов в H_r). Теперь из леммы 1 следует полиномиальная сводимость IPReg к задаче определения числа связных индуцированных подграфов в бирегулярных графах. Но

$$\frac{\operatorname{con}(H_r)}{2^{m+nr}} = \operatorname{Pol}\Big(H_r, \frac{1}{2}\Big),$$

что и завершает доказательство теоремы 1.

Так как бирегулярный граф является бокс-пороговым графом [12], то из теоремы 1 непосредственно следует

Теорема 2. *RES-проблема является #P-полной в классе бокс-пороговых графов, в которых вероятности исправности вершин одинаковы и равны* 1/2.

Так как всякий бирегулярный граф является псевдопороговым, то верно

Следствие 1. *В классе псевдопороговых графов RES-проблема является #P-полной.*

3. Полиномиально разрешимые случаи RES-проблемы

Граф G с упорядоченным разбиением $VG = A \cup B$ вершинного множества называется *триадой* и обозначается через (G, A, B). Множество триад и множество всех графов будем обозначать через $\mathscr{P}$ и $\mathscr{I}$ соответственно. Операция композиции $\circ : \mathscr{P} \times \mathscr{I} \to \mathscr{I}$ определяется следующим образом: если $VG \cap VH = \varnothing$, $G \in \mathscr{P}$ и $H \in \mathscr{I}$, то

$$(G, A, B) \circ H = G \cup H \cup K_{A,VH},$$

где $K_{A,VH}$ — полный двудольный граф с долями A и VH. Если при этом $H \in \mathscr{P}$, то

$$(G, A, B) \circ (H, C, D) = ((G, A, B) \circ H,\ A \cup C,\ B \cup D).$$

Композиция $\circ$ является ассоциативной операцией [3].

Триада (G, A, B) называется *сетевым графом,* если $|A| = |B|$, G — расщепляемый граф с долями A и B, а множество ребер, полученное из EG удалением всех ребер из A, есть совершенное паросочетание в G. Вершины $a \in A$ и $b \in B$ в сетевом графе (G, A, B) (или в дополнительном к сетевому графу (G, A, B)) назовем *соответствующими,* если a и b смежны в G. $\overline{G}$ — граф, дополнительный к G. Триада $\overline{F} = (\overline{G}, A, B)$ называется *дополнительной* к триаде $F = (G, A, B)$.

Введем обозначения: $O_n = (G, \varnothing, B)$, где $n = |B|$ и B — независимое множество в G; $Q_n = (G, A, \varnothing)$, где $n = |A|$ и A — независимое множество в G; $\mathscr{M}$ — множество сетевых и дополнительных графов; $P_4 = (G, A, B)$, где $|A| = |B| = 2$ и $(G, A, B) \in \mathscr{M}$; $\mathscr{R}$ — множество графов, дополнительных к простым циклам и простым цепям; $P_5(C_5)$ — простая 5-вершинная цепь (цикл); если (G, A, B) — триада, то $u_k(G)$ есть число k-вершинных индуцированных подграфов, в которых каждая компонента связности содержит не менее одной вершины из A, а $P_u(G, \overline{p})$ есть вероятность того, что компоненты связности подграфа, индуцированного исправными вершинами, обладают этим свойством; p_v — вероятность исправности вершины v; $P_f(G, \overline{p}) = \prod\limits_{v \in VG} (1 - p_v)$;

$$\mathrm{Upol}(G, p) = \sum_{k=0}^{n} u_k(G) p^k (1-p)^{n-k}, \quad n = |VG|.$$

Лемма 2 [4, 7]. *Граф G является псевдодоминантно-пороговым тогда и только тогда, когда G представим в виде*

$$G = X_1 \circ \cdots \circ X_m \circ Y_1 \circ \cdots \circ Y_n \circ Z, \quad m \geqslant 0, \quad n \geqslant 0,$$

где $X_i \in \{Q_2, Q_1, O_1, P_4\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $Y_j = (F_j, A_j, \varnothing)$, $F_j \in \mathscr{R}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $Z \in \mathscr{R} \cup \{P_5\}$, причем это разложение осуществимо за время $O(|VG| + |EG|)$.

Лемма 3 [13]. *Граф G является матрогенным тогда и только тогда, когда G представим в виде*

$$G = X_1 \circ \cdots \circ X_m \circ Y_1 \circ \cdots \circ Y_n$$

или

$$G = X_1 \circ \cdots \circ X_m \circ Z,$$

где $X_i \in \{Q_1, O_1\} \cup \mathscr{M}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $Y_1 = \cdots = Y_n = Y$, $Y \in \{Q_2, \overline{O_2}\}$, $Z \in \{C_5\}$, причем это разложение осуществимо за время $O(|VG| + |EG|)$.

Лемма 4. *Пусть $G \in \mathscr{P}$. Тогда*

$$R_v = (G \circ H, \overline{p}) = R_v(H, \overline{p}) \cdot P_f(G, \overline{p}) + R_v(G, \overline{p}) \cdot P_f(H, \overline{p}) \\ + P_u(G, \overline{p})(1 - P_f(H, \overline{p})). \quad (8)$$

Доказательство. Пусть F — произвольный связный индуцированный подграф в графе $G \circ H$. Тогда $F = (F_1, A, B) \circ F_2$, где F_1 и F_2 — индуцированные подграфы в G и H соответственно. Если $VF_1 = \varnothing$ ($VF_2 = \varnothing$), то F_2 (F_1) — связный индуцированный подграф в H (G), и эта ситуация учитывается в первых двух слагаемых формулы (8). Предположим, что $VF_i \neq \varnothing$, $i = 1, 2$. Тогда ввиду связности графа F каждая компонента связности в F_1 должна содержать некоторую вершину из A. При этом F_2 может быть любым (непустым) индуцированным подграфом в H. Эта ситуация учитывается в третьем слагаемом формулы (8). Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть* $G \in \mathscr{P}$, $m = |VG|$ *и* $n = |VH|$. *Тогда*

$$c_k(G \circ H) = c_k(H) + c_k(G) + \sum_{i=1}^{k-1} u_i(G)\binom{n}{k-i}, \quad 1 \leqslant k \leqslant m+n. \tag{9}$$

Доказательство. В силу леммы 4 имеем

$$\mathrm{Pol}(G \circ H, p) = \mathrm{Pol}(H,p)(1-p)^m + \mathrm{Pol}(G,p)(1-p)^n + \mathrm{Upol}(G,p)(1-(1-p)^n).$$

Пользуясь этим фактом и тем, что

$$1-(1-p)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i},$$

получаем (9). Лемма доказана.

Лемма 6. *Если* A — *клика в* (G, A, B), *то*

$$R_v(G \circ H, \overline{p}) = R_v(H, \overline{p}) \cdot P_f(G, \overline{p}) + R_v(G, \overline{p}),$$
$$c_k(G \circ H) = c_k(H) + \sum_{i=1}^{k} c_i(G)\binom{n}{k-i}, \quad 1 \leqslant k \leqslant m+n.$$

Доказательство. Если A — клика в триаде (G, A, B), то в любом несвязном индуцированном подграфе графа G есть компонента связности, не содержащая вершин из A. Поэтому $P_u(G, \overline{p}) = R_v(G, \overline{p})$ и первая формула в лемме следует из леммы 4. Вторая формула следует из равенства

$$c_k(G) + \sum_{i=1}^{k-1} c_i(G)\binom{n}{k-i} = \sum_{i=1}^{k} c_i(G)\binom{n}{k-i}.$$

Лемма 7. *Если в триаде* (G, A, B) *множество* B *пусто, то*

$$R_v(G \circ H, \overline{p}) = R_v(H, \overline{p}) \cdot P_f(G, \overline{p}) + R_v(G, \overline{p}) \cdot P_f(H, \overline{p}) + (1 - P_f(G, \overline{p}))(1 - P_f(H, \overline{p})),$$

$$c_k(G \circ H) = c_k(H) + c_k(G) + \binom{m+n}{k} - \binom{m}{k} - \binom{n}{k}.$$

Если в триаде (G, A, B) *множество* A *пусто, то*

$$R_v(G \circ H, \overline{p}) = R_v(H, \overline{p}) \cdot P_f(G, \overline{p}) + R_v(G, \overline{p}) \cdot P_f(H, \overline{p}),$$
$$c_k(G \circ H) = c_k(H) + c_k(G).$$

Справедливость этой леммы непосредственно следует из лемм 4 и 5.

В лемме 8 все индексы приводятся к числам $1,\dots,n$ по модулю n.

Лемма 8. *Пусть $H \in \mathscr{R}$ и $VH = \{1,\dots,n\}$, где $n \geqslant 5$, причем вершины занумерованы так, что вершины i и $i+1$ не смежны, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда*

$$R_v(H,\overline{p}) = 1 - \sum_{i=1}^{l} p_i p_{i+1} p_{i+2} \prod_{j \notin \{i,i+1,i+2\}} (1-p_j) - \sum_{i=1}^{k} p_i p_{i+1} \prod_{j \notin \{i,i+1\}} (1-p_j),$$

$$c_k(H) = \binom{n}{k}, \quad k \neq 2,3, \quad c_2(H) = \binom{n}{2} - k, \quad c_3(H) = \binom{n}{3} - l,$$

где $l = k = n$, если $\overline{H}$ — цикл, и $l = n-2$, $k = n-1$, если $\overline{H}$ — цепь.

Доказательство. Пусть F — произвольный несвязный индуцированный подграф в H. Так как в $\overline{F}$ степени вершин не превосходят 2, то все компоненты связности в F являются 1- или 2-вершинными. Кроме того, так как $\overline{F}$ не содержит треугольников, то имеется не более двух таких компонент. Если бы F состоял из двух 2-вершинных компонент, то $\overline{F}$ содержал бы индуцированный подграф C_4, что невозможно. Таким образом, либо $VF = \{i, i+1\}$, либо $VF = \{i, i+1, i+2\}$. Остальное очевидно.

Лемма 9. *Пусть (G, A, B) — сетевой граф, $A = \{1,\dots,n\}$, $B = \{n+1,\dots,2n\}$, причем вершины i и $n+i$ являются соответствующими, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда*

$$R_v(G,\overline{p}) = \prod_{i=1}^{n}(1-(1-p_i)p_{n+i}) - \prod_{i=1}^{2n}(1-p_i) + \sum_{i=n+1}^{2n} p_i \prod_{j\neq i}(1-p_j), \quad (10)$$

$$R_v(\overline{G},\overline{p}) = 1 - \prod_{i=n+1}^{2n}(1-p_i) - \sum_{i=1}^{n} p_i p_{n+i} \prod_{\substack{j \neq n+i \\ j=n+1}}^{2n} (1-p_j),$$

$$c_1(G) = c_1(\overline{G}) = 2n,$$

а при любом $k > 1$

$$c_k(G) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{k-i}, \quad c_k(\overline{G}) = \binom{2n}{k} - \binom{n}{k} - n\binom{n-1}{k-2}.$$

Доказательство. Пусть F — произвольный индуцированный подграф в сетевом графе G. Тогда граф F является связным тогда и только тогда, когда либо $|VF| = 1$, либо $VF \neq \varnothing$ и для каждой вершины $i \in A$

истинна импликация

$$(n+i \in VF) \Rightarrow (i \in VF).$$

Вероятность этого события определяется формулой (10). Поэтому, положив $t = p/(1-p)$, имеем

$$\operatorname{Pol}(G,p) = (1-p+p^2)^n - (1-p)^{2n} + np(1-p)^{2n-1}$$

$$= (1-p)^{2n}((t^2+t+1)^n - 1 + nt) = (1-p)^{2n}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}t^i\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}t^j - 1 + nt\right).$$

Следовательно, при любом $k > 1$

$$c_k(G) = \sum_{i+j=k}\binom{n}{i}\binom{i}{j}.$$

Пусть теперь F — несвязный индуцированный подграф в $\overline{G}$. Так как любые две вершины из B образуют в $\overline{G}$ доминирующее множество, то $|VF \cap B| \leqslant 1$. При этом если $n+i \in VF \cap B$, то $i \in VF \cap A$. Остальное очевидно.

Теорема 3. *В классах псевдодоминантно-пороговых и матрогенных графов* RES*-проблема разрешима за линейное (относительно размерности графов) время.*

Доказательство. Пусть G является либо псевдодоминантно-пороговым, либо матрогенным графом. Тогда в силу лемм 2 и 3 за время $O(|VG|+\|EG|)$ осуществимо представление G в виде $G = H_r \circ \ldots \circ H_2 \circ H_1$, где

$$H_i \in \{Q_2, Q_1, O_1, \overline{O_2}, P_4, P_5, C_5, \mathscr{M}, \mathscr{R}\}, \quad 1 \leqslant i \leqslant r,$$

причем если $i \geqslant 2$, то $H_i = (F_i, A_i, B_i)$ и либо A_i — клика, либо $A_i = \varnothing$, либо $B_i = \varnothing$ (все эти случаи были охвачены леммами 6 и 7). В силу лемм 8 и 9 величина $R_v(H_i, \overline{p})$, $1 \leqslant i \leqslant r$, вычисляется за линейное (относительно размерности H_i) время (если $|VH_i| \leqslant 5$, то $R_v(H_i, \overline{p})$ вычисляется непосредственно исходя из определения). Но тогда в силу лемм 6 и 7 величины $R_v(H_j \circ \ldots \circ H_1, \overline{p})$, $2 \leqslant j \leqslant r$, могут быть последовательно вычислены за линейное (относительно размерности графа G) время. Теорема 3 доказана.

Так как матроидальные графы являются матрогенными, а доминантно-пороговые и пороговые графы — псевдодоминантно-пороговыми, то из теоремы 3 вытекают следствия 2 и 3.

Следствие 2. *В классах матроидальных и доминантно-пороговых графов* RES*-проблема разрешима за линейное время.*

Следствие 3 [10]. *В классе пороговых графов* RES*-проблема разрешима за линейное время.*

Теорема 4. *Коэффициенты полинома надежности псевдодоминантно-порогового (матрогенного, доминантно-порогового, матроидального, порогового) графа G могут быть вычислены за время $O(|VG|^3)$.*

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
2. **Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.** Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
3. **Тышкевич Р. И., Черняк А. А.** Декомпозиция графов // Кибернетика. 1985. № 2. С. 67–74.
4. **Черняк А. А.** Псевдодоминантно-пороговые графы // Весці НАН Беларусі. Сер. физ.-мат. наук. 1988. № 4–5. С. 37–43, 18–22.
5. **Черняк А. А.** Двойственные задачи надежности k-униформных гиперграфов // Докл. НАН Беларуси. 1999. Т. 43, № 2. С. 34–35.
6. **Boesch F., Satyanarayana A., Suffel C. L.** On residual connectedness network reliability // Reliability of computer and communication networks. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1991. P. 51–59. (DIMACS. Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.; V. 5.).
7. **Chernyak A. A., Chernyak Zh. A.** Pseudodomishold graphs // Discrete Math. 1990. V. 84, N 2. P. 193–196.
8. **Colbourn C. J., Satyanarayana A., Suffel C., Sutner K.** Computing residual connectedness reliability for restricted networks // Discrete Appl. Math. 1993. V. 44, N 1–3. P. 221–232.
9. **Mahadev N. R., Peled U. N.** Threshold graphs and related topics. Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1995.
10. **Stivaros C.** On the residual node connectedness network reliability model. PhD Diss. Stevens Inst. Technol., 1990.
11. **Sutner K., Satyanarayana A., Suffel C.** The complexity of the residual node connectedness reliability problem // SIAM J. Comput. 1993. V. 20, N 1. P. 149–155.
12. **Tyshkevich R. I., Chernyak A. A.** Boxthreshold graphs: structure and enumeration // Graphen und Netzwerke — Theorie und Anwendungen: 30 Intern. Wissenschaftliches Kolloquium (Ilmenau, 1985). Ilmenau: Technische Hoohschule Ilmenau, 1985. S. 119–121.

13. **Tyshkevich R. I.** Once more on matrogenic graphs // Discrete Math. 1984. V. 51, N 1. P. 91–100.

14. **Valiant L.** The complexity of enumeration and reliability problems // SIAM J. Comput. 1979. V. 8, N 3. P. 410–421.

Адрес автора:

Белорусский государственный
университет,
220141 Минск, Беларусь.
E-mail:
zhanna_chernyak@usa.net

Статья поступила
11 ноября 1998 г.,
переработанный вариант —
9 марта 1999 г.