А. А. Черняк, Минимальные гамильтоновы графы с предписанными степенными множествами, *Матем. заметки*, 1990, том 47, выпуск 4, 115–127

Математические заметки

том 47 выпуск 4 апрель 1990

# МИНИМАЛЬНЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ ГРАФЫ С ПРЕДПИСАННЫМИ СТЕПЕННЫМИ МНОЖЕСТВАМИ

**А. А. Черняк**

Хорошо известна проблема определения наименьшего порядка $\mu_{\text{н}}(S)$ гамильтонова графа, имеющего предписанное множество $S$ степеней вершин (степенное множество). Частичное ее решение было получено Лисняк, Полимени и Вандерьяктом [1] и Зверовичем [2]. В настоящей работе эта задача решена полностью (теорема 1). Из теоремы 1 вытекает исчерпывающее описание наборов $\{S \mid p\}$, для которых существуют $p$-вершинные гамильтоновы графы со степенным множеством $S$ (реализации набора $\{S \mid p\}$).

На основе теоремы 1 получено полное описание наборов $\{S \mid p\}$, реализуемых вычерчиваемыми $p$-вершинными графами, т. е. графами с гамильтоновой цепью (теорема 2). Отметим, что гамильтоновость и вычерчиваемость, а также проходимость графов (см. [1, 3]) — все известные в настоящее время теоретико-графовые свойства $P$ (не считая тривиально решаемых случаев [4, 5]), для которых удалось полностью решить задачу определения $\mu_p(S)$ — наименьшего порядка графа со степенным множеством $S$ и со свойством $P$.

Пусть $1 \leqslant k_1 < \ldots < k_n < p$, $k_i$, $p \in \mathrm{N}$ $(i = \overline{1, n})$. Набор

$$\{S \mid p\} = \{k_1, \ldots, k_n \mid p\} \tag{1}$$

называют *графическим*, если существует $p$-вершинный граф со степенным множеством $S$ — реализация набора (1). Набор (1) называют *гамильтоновым*, если он реализуем гамильтоновым графом.

Все рассматриваемые здесь графы конечные, неориентированные, без петель и кратных ребер.

Обозначения: $VG$ — множество вершин графа $G$; $K_{m,n}$, $K_n$ — соответственно полные двудольный $(m, n)$-вершинный и $n$-вершинный графы; $G(W)$ — подграф, порожденный подмножеством $W \subseteq VG$; $\oplus$ — бинарная операция «присоединения» на графах: $F = G \oplus H$, где $VG \cap VH = \varnothing$, $VF = VG \cup VH$, $F(VG) = G$, $F(VH) = H$ и каждая вершина из $VG$ смежна в $F$ с каждой вершиной из $VH$; $\deg_G u$ — степень вершины $u$ в графе $G$; $(u, v)$ — ребро с концевыми вершинами $u$, $v$.

Скажем, что набор (1) допускает усечение, если $k_1 = 1$, $n \geqslant 3$, $p = k_n + 1$, при этом набор $\{k_2 - 1, \ldots, k_{n-1} - 1 \mid p - 2\}$ будем называть *усечением набора* (1). Конечная цепочка усечений приводит к набору, не допускающему усечений, который назовем *производной первоначального набора*.

ЛЕММА 1 [1]. *Наборы*

$$\{2, t \mid t + 1\}, \ t \geqslant 4, \tag{2}$$

*негамильтоновы*.

ЛЕММА 2. *Наборы*

$$\{2, \ldots, j, t, \ldots, t + j - 2 \mid t + j - 1\}, j \geqslant 3, t \geqslant 2j - 1, \tag{3}$$

*негамильтоновы*.

Доказательство. Предположим противное: существует гамильтонова реализация $G$ набора (3). Пусть $VG = V_1 \cup V_2$, где $V_1$ — множество вершин со степенями из $\{2, \ldots, j\}$, $V_2$ — множество вершин со степенями из $\{t, \ldots, t + j - 2\}$, $H$ — двудольный подграф, полученный из $G$ удалением ребер подграфов $G(V_1)$ и $G(V_2)$, $S_i$ — сумма степеней вершин из $V_i$ в графе $H$ $(i = 1, 2)$. Положим $|V_2| = x + j - 1$, $|V_1| = t - x$, где $0 \leqslant x \leqslant t - j + 1$. Тогда

$$S_2 \geqslant (x + 1)(t - x - j + 2) + \sum_{i=1}^{j-2}((t + i) - (x + j - 2)) = \mathrm{MIN}.$$

Оценим сверху $S_1$. Если $C$ — гамильтонов цикл в $G$, то подграф $G(V_1)$ содержит по крайней мере $y$ ребер цикла $C$, где

$$y = \max\{0, \ t + j - 1 - 2(x + j - 1)\}. \tag{4}$$

Поэтому

$$S_1 \leqslant \sum_{i=1}^{j-1}(1 + i) + j(t - x - j + 1) - 2y = \mathrm{MAX}.$$

Очевидно, $\mathrm{MIN} \leqslant S_2 = S_1 \leqslant \mathrm{MAX}$. Из предыдущего непосредственно вытекает, что последнее неравенство равносильно неравенству

$$0 \leqslant x^2 - x(3 + t - j) + t - 2y = f(x). \tag{5}$$

Если $y = 0$, то

$$(t - j + 1)/2 \leqslant x \leqslant t - j + 1, \quad f(t - j + 1) = -(t - 2j + 2) < 0,$$

$$f((t - j + 1)/2) = -(t(t - 2j + 1) + (j - 3)^2 + (t - 4)) < 0,$$

что противоречит (5). То же самое при $y > 0$ $(0 \leqslant x \leqslant (t - j + 1)/2)$. Лемма доказана.

Те же счетные аргументы применимы при доказательстве следующей леммы.

ЛЕММА 3. *Наборы*

$$\{2,\ 3,\ t,\ t+2 \mid t+3\}, \quad t \geqslant 7; \tag{6}$$

$$\{2,\ 4,\ t,\ t+1 \mid t+2\}, \quad t \geqslant 8, \tag{7}$$

*негамильтоновы.*

ЛЕММА 4 [2]. *Если* $pk_1 \cdot \ldots \cdot k_n$ *четно и либо* $k_1 \geqslant 3$, *либо* $n$ *нечетно*, $k_1 = 2$, *то набор* (1) *гамильтонов, за исключением случая* $\{3,\ 2t \mid 2t+2\}$, $t \geqslant 4$. *Если* $k_1 = 2$, $n$ *четно*, $p \geqslant k_n + 2$, *то набор* (1) *также гамильтонов.*

ЛЕММА 5. *Наборы* (6) *при* $t = 4,\ 5,\ 6$ *и* (7) *при* $t = 5,\ 6,\ 7$ *гамильтоновы.*

Гамильтоновы реализации некоторых из наборов, перечисленных в лемме 5, приведены на рис. 1.

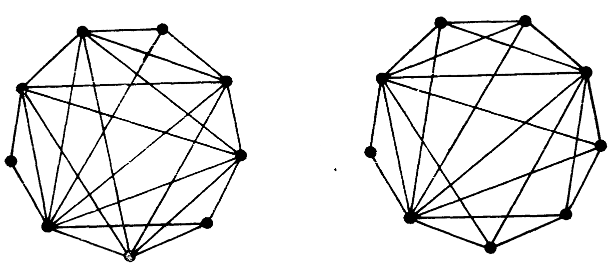

Рис. 1

ЛЕММА 6. *Наборы*

$$\{2, 3, \ldots, j+1, t+1, \ldots, t+j-1, t+j+1 \mid t+j+2\}, \quad j \geqslant 3, \quad t \geqslant 2j-1; \tag{8}$$

$$\{2,\ 4,\ \ldots,\ j+2,\ t+2,\ \ldots,\ t+j,\ t+j+1 \mid t+j+2\}, \quad j \geqslant 3,\ t \geqslant 2j-1; \tag{9}$$

$$\{2,\ 3,\ 5,\ 2t+2,\ 2t+4,\ 2t+5 \mid 2t+6\},\ t \geqslant 4; \tag{10}$$

$$\{2,\ 3,\ 4,\ t+1,\ t+3,\ t+5 \mid t+6\},\ t \geqslant 7; \tag{11}$$

$$\{2,\ 3,\ 5,\ t+1,\ t+2,\ t+4 \mid t+5\},\ t \geqslant 8; \tag{12}$$

$$\{2, 4, 5, t+2, t+4, t+5 \mid t+6\}, t \geqslant 7; \tag{13}$$

$$\{2, 3, 4, 5, t+2, t+4, t+5, t+6 \mid t+7\}, \quad t \geqslant 7; \tag{14}$$

$$\{2, 3, 4, 6, t+2, t+3, t+4, t+5 \mid t+6\}, \quad t \geqslant 8; \tag{15}$$

$$\{2,\ 4,\ 6,\ t+2,\ t+3,\ t+4 \mid t+5\}, \quad t \geqslant 8; \tag{16}$$

*гамильтоновы.*

Доказательство. 1) Рассмотрим набор (8). В силу леммы 4 набор $\{2, \ldots, j, t, \ldots, t+j-2 \mid t+j\}$ гамильтонов. Пусть $H$ — его гамильтонова реализация. В $H$ найдутся две вершины одинаковой степени. Пусть $v$ — одна из них, $u$ — соседняя с $v$ вершина по гамильтонову циклу. Очевидно, граф $G \oplus w$ — реализация набора

$$\{3, \ldots, j+1, t+1, \ldots, t+j-1, t+j \mid t+j+1\},$$

и $G$ имеет гамильтонов цикл $C$, в котором вершины $u$, $w$, $v$ расположены последовательно. Если $\deg_G(v) \notin \{j+1, t+j-1\}$, то граф $G+(z, w)+(z, v)$ — гамильтонова реализация (8) $(z \notin VG)$. Если же $\deg_G v \in \{j+1, \ t+j-1\}$, то граф $G+(z, w)+(z, u)-(u, v)$ — гамильтонова реализация набора (8).

Для набора (9) рассуждения аналогичны.

2) Рассмотрим набор (10). Добавим к $K_{2t+3}$ вершины $v_1$, $v_2$, $v_3$, обозначив полученный граф $H$. Пусть $z_i \in VH$ $(i=\overline{1, 5})$. Добавим к $H$ ребра $(z_j, v_i)$ $(i=\overline{1, 3}, j=1, 2)$; $(z_i, v_i)$ $(i=2, 3)$; $(v_3, z_i)$ $(i=4, 5)$ и исключим $(z_4, z_5)$. Полученный граф — искомая реализация набора (10).

Рассуждения для наборов (11) — (14) аналогичны.

3) Рассмотрим набор (15). Пусть $H$ — двудольный граф с долями $b=\{v_1, v_2, v_3\}$, $A=\{a_1, \ldots, a_{t+1}\}$, полученный из $K_{3, t+1}$ удалением ребер $(v_3, a_{t+1})$, $(v_3, a_t)$, $(v_2, a_{t+1})$. Добавим к $H$ ребра $(v_1, v_2)$, $(v_2, v_3)$, $(v_1, v_3)$, а также $t-2$ ребер $(a_i, a_{i+1})$ $(i=\overline{1, t-3})$, $(a_{t-2}, a_1)$. Добавим также концевое ребро $(z, a_{t+1})$ $(z \notin VH)$. Полученный граф $G$ — реализация с гамильтоновой цепью набора

$$\{1, 2, 3, 5, t+1, t+2, t+3 \mid t+5\}.$$

Граф $G \oplus w$ — гамильтонова реализация набора (15).

Построения для (16) аналогичны. Лемма доказана.

Невозрастающую последовательность целых чисел

$$d=(d_1, \ldots, d_m), \quad d_1 \geqslant \ldots \geqslant d_m \geqslant 0, \tag{17}$$

называют *графической*, если существует $m$-вершинный граф — реализация (17), невозрастающая последовательность степеней вершин которого совпадает с (17).

ЛЕММА 7 [6, 7]. *Последовательность* (17) *графическая, если и только если* $\sum_{i=1}^{m} d_i$ *четно и выполняются неравенства*

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leqslant k(k-1)+\sum_{i=k+1}^{m} \min\{k, d_i\}, \qquad k=\overline{1, h(d)}, \tag{18}$$

*где* $h(d)=\max\{i\colon d_i \geqslant i\}$.

ЛЕММА 8 [8, 9]. *Пусть* (17) — *графическая последовательность,* $r \leqslant d_m$. *Тогда* (17) *имеет реализацию, содержащую r-фактор, если и только если последовательность* $d-r=(d_1-r, \ldots, d_m-r)$ *графическая.*

ЛЕММА 9 [10]. *Пусть последовательность* (17) *имеет реализацию, содержащую k-фактор. Тогда* (17) *имеет реализацию, содержащую связный k-фактор, если и только если выполняются неравенства*

$$\sum_{i=1}^{r} d_i < r(m-r-1)+\sum_{i=m-r+1}^{m} d_i, \qquad r=\overline{1, [m/2]-1}. \tag{19}$$

ЛЕММА 10. *Наборы*

$$\{2, \ldots, j, 2j-3, \ldots, 3j-5 \mid 3j-4\}, \quad j \geqslant 4, \tag{20}$$

$$\{2, \ldots, j, 2j-2, \ldots, 3j-4 \mid 3j-3\}, \quad j \geqslant 3, \tag{21}$$

*гамильтоновы.*

Доказательство. Докажем, что последовательность

$$d = (d_1, \ldots, d_m) = (3j-5, \ldots, 2j-3, \underbrace{j, \ldots, j}_{j-2}, j-1, j-1, \ldots, 2) \tag{22}$$

имеет гамильтонову реализацию. Отсюда будет следовать гамильтоновость набора (20).

1) Графичность. Очевидно, $h(d) = j$. Пусть $1 \leqslant k \leqslant \geqslant j-1$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{k} d_i = k(6j-k-9)/2,$$

$$\sum_{i=k+1}^{m} \min\{k, d_i\} = (m-2\cdot k+2)k + 2 + \ldots + (k-1).$$

Выполнимость (18) проверяется теперь непосредственно.

При $k = j$ рассуждения аналогичны.

2) 2-фактор. Докажем графичность последовательности

$$d - 2 = c = (c_1, \ldots, c_m), \tag{23}$$

для которой $h(c) = j-1$. Предположим, что $1 \leqslant k \leqslant j-3$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{k} c_i = k(6j-k-13)/2,$$

$$\sum_{i=k+1}^{m} \min\{k, c_i\} = 0 + \ldots + (k-1) + k(m-2k).$$

Выполнимость (18) для $c$ теперь проверяется непосредственно.

При $k \in \{j-2, j-1\}$ рассуждения аналогичны.

3) Связность 2-фактора. Пусть $1 \leqslant r \leqslant j-2$. Тогда

$$A = \sum_{i=1}^{r} d_i - \sum_{i=m-r+1}^{m} d_i = \sum_{i=1}^{r} (d_i - d_{m-r+i}) =$$
$$= r(3j-r-6) < r(3j-4-1).$$

Если $j-1 \leqslant r \leqslant [m/2]$, то

$$A = \sum_{i=1}^{j-1} (d_i - d_{m-j+i+1)}) = (j-1)(2j-5) + 1 < r(m-r-1),$$

ибо последнее неравенство верно при $r \in \{j-1, [m/2]\}$.

Гамильтоновость последовательности

$$(3j-4, \ldots, 2j-2, \underbrace{j, \ldots, j}_{j-1}, j, \ldots, 2) \tag{24}$$

проверяется по аналогии с предыдущим и влечет гамильтоновость набора (21). Лемма доказана.

ЛЕММА 11. *Если в* (1) $k_1 = 2$, $n = 2r$, $r \in \mathrm{N}$, $p = k_n +$ *и набор* (1) *отличен от* (2), (3), (6), (7), *то набор* (1) *гамильтонов.*

Доказательство. Набор $\{s_1, \ldots, s_m \mid q\}$, $0 < s_1 < \ldots$ $\ldots < s_m < q$, назовем исключительным, если он совпадает с одним из наборов (2), (3), (6), (7), (25), где

$$\{3,\ 2t \mid 2t + 2\},\ t \geqslant 4, \tag{25}$$

или для него выполняется хотя бы одно из условий

$$s_1 \cdot \ldots \cdot s_m \cdot q \text{ нечетно}, \tag{26}$$

$$s_1 = 1. \tag{27}$$

Обозначим $\mathfrak{L}$ множество наборов, отличных от исключительных и гамильтоновых. Если $\mathfrak{L} = \varnothing$, то лемма доказана. Предположим, что $\mathfrak{L} \neq \varnothing$. Пусть (1) — набор из $\mathfrak{L}$ минимальной длины $n$. Тогда любой набор меньшей длины либо гамильтонов, либо исключительный. В силу леммы 4 $n$ четно, $k_1 = 2$, $p = k_n + 1$. Так как набор $\{2, 3 \mid 4\}$. гамильтонов, то также $n \geqslant 4$. Рассмотрим несколько случаев.

1) $k_n \neq k_{n-1} + 1$. Если для набора

$$\{k_2 - 1,\ \ldots,\ k_{n-1} - 1 \mid k_n - 2\} \tag{28}$$

выполняется (26) или он вида (25), то $k_2 \geqslant 4$, $k_n$ и $k_{n-1}$ разной четности. Если набор (28) одного из видов (2), (3), (6), (7), то (1) совпадает с одним из наборов, перечисленных в леммах 5, 6. Если $H$ — гамильтонова реализация набора (28), $(a, b)$ — ребро гамильтонова цикла, $u, w, v \notin VH$, то граф

$$(H - (a,\ b) + (u,\ a) + (w,\ b)) \oplus v$$

есть гамильтонова реализация набора (1). Противоречие.

2) $k_n$, $k_{n-1}$ разной четности, $k_2 \geqslant 4$. Рассмотрим набор

$$\{k_2 - 2,\ \ldots,\ k_{n-1} - 2 \mid k_n - 2\}. \tag{29}$$

Очевидно, он не удовлетворяет условиям (26), (27) и отличен от (25). Если (29) одного из видов (2), (3), (6), (7), то (1) совпадает с одним из наборов, перечисленных в леммах 3, 5, 6. Если же $H$ — гамильтонова реализация набора (29), $u \notin VH$, то граф

$$((H \oplus v) \oplus w) + (u,\ v) + (u,\ w)$$

есть гамильтонова реализация (1). Противоречие.

3) $k_n = k_{n-1} + 1$, $k_2 = 3$. В этом случае (1) запишется так:

$$\{2,\ 3,\ k_3,\ \ldots,\ k_{n-2},\ k_{n-1},\ k_n \mid k_n + 1\}, \tag{30}$$

причем $n$ четно, $n \geqslant 6$ (при $n = 4$ имеем противоречие леммам 2, 10). Если набор

$$\{k_3 - 2,\ \ldots,\ k_{n-2} - 2 \mid k_n - 3\} \tag{31}$$

удовлетворяет условиям (26), то $k_3 \cdot \ldots \cdot k_{n-2}$ нечетно, $k_n$ четно (этот случай рассмотрен ниже). Если (31) одного из видов (25), (6), (7), то (30) одного из видов (10), (14), (15). Если (31) одного из видов (2), (3), то (30) одного из видов (3), (20), (21), что противоречит лемме 10 или определению $\mathfrak{L}$.

Если $H$ — гамильтонова реализация набора (31), то граф

$$((H \oplus v) \oplus w) + (u,\ w) + (u,\ v) + (z,\ u) + (z,\ v) \quad (z,\ u \notin VH)$$

есть гамильтонова реализация (30). Противоречие.

Осталось предположить, что в (30) $k_3 \cdot \ldots \cdot k_{n-2}$ нечетно, $k_n$ четно. Очевидно, $k_3 \geqslant 5$. Набор

$$\{k_3 - 3,\ \ldots,\ k_{n-2} - 3 \mid k_n - 4\} \tag{32}$$

не может быть исключительным. Если же $H$ — его гамильтонова реализация, то граф

$$(((H \oplus v_1) \oplus v_2) \oplus v_3) + (z,\ v_1) + (z,\ v_2) + \\ + (z,\ v_3) + (w,\ v_1) + (w,\ v_2)$$

есть гамильтонова реализация (30). Противоречие. Лемма доказана.

Из лемм 1—4, 11 следует

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $S = \{k_1, \ldots, k_n\}$, *где* $2 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_n$. *Тогда* $\mu_н(S) = k_n + 2$, *если и только если* $S$ *одного из следующих видов*:

$$\{2,\ t\},\ t \geqslant 4; \quad \{2,\ 3,\ t,\ t+2\},\ t \geqslant 7; \quad \{2,\ 4,\ t,\ t+1\},\ t \geqslant 8;$$
$$\{2,\ \ldots,\ j,\ t,\ \ldots,\ t+j-2\},\ j \geqslant 3,\ t \geqslant 2j-1.$$

*В остальных случаях* $\mu_н(S) = k_n + 1$.

ЛЕММА 12. *Наборы*

$$\{2,\ \ldots,\ j,\ t,\ \ldots,\ t+j-2 \mid t+j-1\},\quad j \geqslant 3,\ t \geqslant 2j+1;$$
$$\{2,\ 3,\ t,\ t+2 \mid t+3\},\quad t \geqslant 7; \quad \{2,\ 4,\ t,\ t+1 \mid t+2\},\ t \geqslant 10; \tag{33}$$

$$\{2,\ t \mid t+1\},\quad t \geqslant 5, \quad \{3,\ 2t \mid 2t+2\},\ t \geqslant 5;$$
$$\{1,\ 2,\ t \mid t+2\},\quad t \geqslant 4; \quad \{1,\ 3,\ 2t \mid 2t+2\},\quad t \geqslant 4;$$
$$\{1 \mid 2t\},\ t \geqslant 2;$$
$$\{1,\ 2,\ t \mid t+3\},\quad t \geqslant 6; \quad \{1,\ t \mid t+1\},\ t \geqslant 3;$$
$$\{1,\ 2,\ 3,\ t,\ t+1 \mid t+3\},\ t \geqslant 6; \tag{34}$$

*не реализуются вычерчиваемыми графами.*

Лемма 12 доказывается по аналогии с леммами 2, 3: достаточно переопределить величину $y$ так: $y = \max\{0,\ t+j-2-2(x+j-1)\}$.

ЛЕММА 13. *Наборы*

$$\{2,\ 4,\ t,\ t+1 \mid t+2\} \text{ при } t = 8,\ 9; \quad \{3,\ 8 \mid 10\};$$
$$\{1,\ 3,\ 2t \mid 2t+2\} \text{ при } t = 2,\ 3; \quad \{1,\ 2,\ 3 \mid 5\};$$
$$\{1,\ 2,\ t \mid t+3\} \text{ при } t = 3,\ 4,\ 5; \quad \{1,\ 2 \mid 3\};$$
$$\{1,\ 2,\ 3,\ t,\ t+1 \mid t+3\} \text{ при } t = 4,\ 5; \quad \{1 \mid 2\}$$

*реализуются вычерчиваемыми графами.*

Искомые реализации для некоторых из перечисленных в лемме 13 наборов приведены на рис. 2 (для остальных наборов леммы 13 такие реализации очевидны).

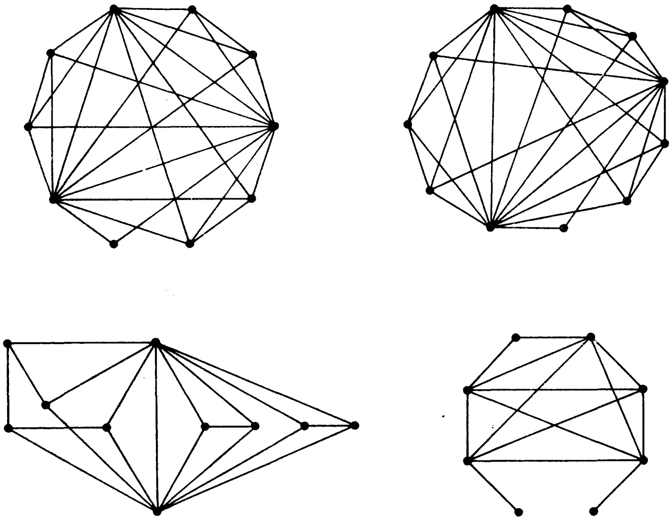

Рис. 2

ЛЕММА 14 [11]. *Набор* (1) *графический, если и только если он отличен от* $\{1, 2t \mid 2t+2\}$, $t \geqslant 2$, *и* $k_1 \cdot \ldots \cdot k_n \cdot p$ *четно.*

ЛЕММА 15 [12]. *Последовательность* (17) ($m \geqslant 4$) *реализуется вычерчиваемым графом, если и только если она графическая, графическая также последовательность*

$$d' = (d_1 - 2, \ldots, d_{m-2} - 2,\ d_{m-1} - 1,\ d_m - 1)$$

*и выполняются неравенства*

$$\sum\nolimits_{i=1}^{r} d_i < r(m-r-2) + \sum\nolimits_{i=m-r}^{m} d_i, \qquad r = \overline{1, [(m-1)/2]-1}. \tag{35}$$

ЛЕММА 16. *Наборы*

$$\{2, \ldots, j,\ 2j-1, \ldots, 3j-3 \mid 3j-2\}, \qquad j \geqslant 3; \tag{36}$$

$$\{2, \ldots, j,\ 2j, \ldots, 3j-2 \mid 3j-1\},\ j \geqslant 3, \tag{37}$$

*реализуются вычерчиваемыми графами.*

Доказательство. Применим лемму 15 к последовательности

$$d = (d_1, \ldots, d_m) = (3j-3, \ldots, 2j-1, \underbrace{j, \ldots, j}_{j}, j-1, j-1, \ldots, 2). \tag{38}$$

При $j = 3, 4, 5$ справедливость утверждения показывается непосредственно. Пусть $j \geqslant 6$. Графичность (38) вытекает из графичности (24): прибавление к реализации последовательности (24) вершины степени $j-1$, смежной с вершинами наибольших степеней, дает реализацию для (38). Положим

$$d' = (c_1, \ldots, c_m) = \\ = (3j-5, \ldots, 2j-3, \underbrace{j-2, \ldots, j-2}_{j}, j-3, j-3, \ldots, 2, 2, 1).$$

Очевидно, $h(d') = j-1$. Предположим, что $2 \leqslant k \leqslant j-3$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{k} c_i = k(6j-k-9)/2,$$

$$\sum_{i=k+1}^{m} \min\{k, c_i\} = 1 + \ldots + k + 2 + (m-2k-1)k.$$

Выполнимость неравенств (18) при $2 \leqslant k \leqslant j-3$ для $d'$ теперь очевидна. При $k \in \{1, j-2, j-1\}$ рассуждения аналогичны. Таким образом, по лемме 7 $d'$ графическая.

Осталось проверить выполнимость неравенств (35). Пусть вначале $2 \leqslant r \leqslant j-3$. Тогда

$$A = \sum_{i=1}^{r} c_i - \sum_{i=m-r}^{m} c_i = r(3j-r-4) - (r+2) < r(3j-r-4).$$

При $r \in \{1, j-2\}$ непосредственная проверка. Пусть $r \geqslant j-1$. Тогда

$$A = (j-1)(2j-3) - (j-1) < r(3j-r-4),$$

ибо последнее неравенство верно при $r \in \{j-1, [(m-1)/2]-1\}$.

Набор (37) рассматривается аналогично: достаточно применить лемму 15 к последовательности

$$(3j-2, \ldots, 2j, \underbrace{j, \ldots j}_{j+1}, j, \ldots, 2).$$

ЛЕММА 17. *Набор реализуется вычерчиваемым графом, если и только если таковой является его производная.*

Доказательство. Пусть (1) допускает усечение и набор

$$\{k_2 - 1, \ldots, k_{n-1} - 1 \mid p - 2\} \tag{39}$$

реализуется вычерчиваемым графом $H$. Тогда граф $H \oplus v + (v, w)$ $(w \notin VH)$ — искомая реализация набора (1).

Обратно, если (1) реализуется графом $G$ с гамильтоновой цепью $T = w, v, u, \ldots, z$, то $\deg_G w = 1$, $\deg_G v = k_n$. Отсюда $G - v - - w$ — реализация набора (39) с гамильтоновой цепью $T' = = u, \ldots, z$. Лемма доказана.

ЛЕММА 18. *Наборы*

$$\{1, 4, \ldots, j+2, t+2, \ldots, t+j, t+j+1 \mid t+j+3\},$$
$$\{1, 2, 3, \ldots, j+1, t+1, \ldots, t+j-1, t+j \mid t+j+2\},$$
$$\{1, 3, 4, \ldots, j+2, t+2, \ldots, t+j, t+j+1 \mid t+j+ \\ +3\}, \quad j \geqslant 3, \ t \geqslant 2j+1; \tag{40}$$

$$\{1, 2, 3, 5, t+1, t+2, t+3 \mid t+5\}, \{1, 3, 4, 6, t+2, t+3, t+4 \mid t+6\}, \quad t \geqslant 10;$$

$$\{1, 3, 4, t+2, t+3 \mid t+5\}, \{1, 3, 5, 2t+2, 2t+4 \mid 2t+6\},$$

$$\{1, 2, 4, 2t+1, 2t+3 \mid 2t+5\}, \ t \geqslant 5; \tag{41}$$

$$\{1, 5, 2t+2, 2t+4 \mid 2t+6\}, \{1, 3, 2t \mid 2t+4\}, \ t \geqslant 5; \tag{42}$$

$$\{1, 2, 3, 4, t+1, t+3, t+4 \mid t+6\},$$

$$\{1, 4, 5, t+2, t+4, t+5 \mid t+7\}, \ t \geqslant 7;$$

$$\{1, 4, t+2, t+3 \mid t+5\}, \quad t \geqslant 5;$$

$$\{1, 4, 6, t+2, t+3, t+4 \mid t+6\}, \ t \geqslant 10; \tag{43}$$

*реализуются вычерчиваемыми графами.*

Доказательство. 1) По теореме 2 существует гамильтонова реализация $H$ набора

$$\{4, \ldots, j+2, \ t+2, \ldots, t+j, \ t+j+1 \mid t+j+2\}.$$

В $H$ найдутся вершины одинаковой степени. Пусть $v$ — одна из них, $w$ — некоторая смежная с ней вершина. Добавим к $H$ висячую вершину $u$. Положим ее смежной с $v$, если $\deg v \notin \{j+2, t+j+1\}$. В противном случае положим ее смежной с $w$, исключив ребро $(v, w)$. Полученный граф — искомая реализация первого набора в списке (40). Остальные наборы в (40) рассматриваются аналогично.

2) Пусть $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_t\}$ — доли графа $K_{3,t}$. Присоединим цепь длины 2 к вершине $a_1$, удалим ребро $(b_t, a_3)$ и добавим ребра $(b_i, b_{i+1})$ $(i = \overline{1, t-3})$, $(a_1, a_2)$, $(a_2, a_3)$, $(a_1, a_3)$. Полученный граф — искомая реализация первого набора в списке (41). Остальные наборы этого списка рассматриваются аналогично.

3) Из графа $K_{2t+4}$ удалим ребра 1-фактора. В полученном графе $H$ выберем пять попарно смежных вершин $z_i$ $(i = \overline{1, 5})$ и добавим ребра $(v, z_i)$ $(i = \overline{1, 5})$, $(w, z_5)$ ($v$, $w$ — новые вершины), а затем исключим ребра $(z_1, z_2)$, $(z_3, z_4)$. Получена искомая реализация первого набора в списке (42). Для других наборов этого списка построения аналогичны.

4) Построения для наборов (43) проводятся по аналогии с п. 2) доказательства леммы 6.

ТЕОРЕМА 2. *Набор* (1) *реализуется вычерчиваемым графом, если и только если его производная графическая и отлична от наборов* (33), (34).

Доказательство. Необходимость следует из лемм 12, 17.

Достаточность. Наборы (33), (34), а также неграфические наборы назовем исключительными. Через $\mathfrak{M}$ обозначим множество наборов, производные которых отличны от исключительных и не реализуются вычерчиваемыми графами. Если $\mathfrak{M} = \varnothing$, то все доказано (лемма 17). Пусть $\mathfrak{M} \neq \varnothing$ и (1) — набор из $\mathfrak{M}$ минимальной длины $n$. Набор (1) отличен от наборов, перечисленных в леммах 12, 13. Из лемм 4, 13, 16 и теоремы 1 следует, что все наборы с $k_1 \geqslant 2$, не реализуемые вычерчиваемыми графами, являются исключительными. Поэтому $k_1 = 1$, $n \geqslant 2$, $p \geqslant k_n + 2$. Рассмотрим несколько случаев.

1) Либо $k_2 \geqslant 3$, $p \geqslant k_n + 3$, либо $k_2 = 2$, $p \geqslant k_n + 4$. Набор

$$\{k_2, \ldots, k_{n-1}, k_n \mid p - 2\} \tag{44}$$

графический (лемма 14) и, следовательно, реализуем гамильтоновым графом $G$ (лемма 4) при условии, что набор (44) отличен от (25). Граф

$$G + (v_1, w_1) + (v_2, w_2) - (w_1, w_2)$$

есть вычерчиваемая реализация набора (1); здесь $v_1, v_2 \notin VG$, $(w_1, w_2)$ — ребро гамильтонова цикла в $G$. Если же (44) совпадает с (25), то (1) находится в списке (42).

2) $k_2 = 2$, $k_n + 2 \leqslant p \leqslant k_n + 3$. Очевидно, $n \geqslant 4$. Если набор

$$\{k_3 - 1, \ldots, k_{n-1} - 1 \mid k_n - 1\} \tag{45}$$

реализуется вычерчиваемым графом $H$, то граф, полученный из $H \oplus v$ присоединением к вершине $v$ цепи длины $p - k_n$, является вычерчиваемой реализацией (1). Если набор (45) исключительный, то либо набор (1) содержится в списках леммы 18, либо $k_2, \ldots, k_n$ четны. Предположим последнее. Тогда в силу леммы 4 набор

$$\{k_3 - 1, \ldots, k_{n-1} - 1 \mid k_n - 2\}$$

реализуется гамильтоновым графом $H$. Пусть $v_1, v_2 \notin VH$. Положим

$$G = H + (v_1, w_1) + (v_2, w_2) - (w_1, w_2),$$

где $(w_1, w_2)$ — ребро гамильтонова цикла в $H$. Добавим к $G$ цепь $u_1, \ldots, u_{p-k_n}$, положив вершину $u_1$ смежной со всеми, кроме одной висячей, вершинами графа $G$. Полученный граф — вычерчиваемая реализация (1).

3) $k_2 \geqslant 3$, $p = k_n + 2$. Очевидно, $n \geqslant 3$ (при $n = 2$ набор (1) неграфический). Если набор

$$\{k_2 - 2, \ldots, k_{n-1} - 2 \mid k_n - 2\} \tag{46}$$

реализуется вычерчиваемым графом $H$, то ($a$, $b$ — новые вершины) граф

$$(H \oplus v) \oplus w + (v, a) + (w, b)$$

есть вычерчиваемая реализация (1).

Если $k_2 \geqslant 4$ и набор (46) исключительный, то он графический (ибо (1) графический), и, следовательно, набор (1) содержится в списках леммы 18. Если $k_2 = 3$, то $n \geqslant 4$. Если набор

$$\{k_3 - 2, \ldots, k_{n-1} - 2 \mid k_n - 2\} \tag{47}$$

реализуется вычерчиваемым графом $H$, то граф $(H \oplus v) \oplus w + (a, v) + (a, w) + (a, b)$ ($a$, $b$ — новые вершины) — вычерчиваемая реализация набора (1). Если набор (47) исключительный, то (1) содержится в списках леммы 18. Противоречие. Теорема доказана.

Замечание 1. Следует отметить, что условия теорем 1, 2 о реализуемости набора $\{S \mid p\}$ графом, имеющим гамильтонов цикл или цепь, проверяются за $O(|S| \log p)$ элементарных операций. Более того, из конструктивного доказательства теорем 1, 2 следует существование алгоритма с временной сложностью $O(p)$, строящего такие реализации (если последние существуют).

Замечание 2. Множества степеней вершин $S = \{k_1, \ldots, k_n\}$, не реализуемых $p$-вершинными гамильтоновыми графами, описаны в леммах 1—4. Из этих лемм и леммы 14 легко определяется число $u_p$ всех графических наборов $\{S \mid p\}$, $k_1 \geqslant 2$, не реализуемых гамильтоновыми графами:

$$u_p = \begin{cases} [(p-1)/3] + 5, & \text{если } p \geqslant 10, \\ 3, & \text{если } 7 \leqslant p \leqslant 9, \\ 1, & \text{если } 5 \leqslant p \leqslant 6, \\ 0, & \text{если } p \leqslant 4. \end{cases}$$

Интересно сопоставить $u_p$ с числом всех графических наборов $\{S \mid p\}$, $k_1 \geqslant 2$ (см. лемму 14), которое равно

$$(2^{p-2} - 1) - (2^{(p-3)/2} - 1)q,$$

где $q = 1$ при нечетном $p$ и $q = 0$ при четном $p$.

Автор выражает благодарность рецензенту, подсказавшему несколько важных дополнений к первоначальному варианту статьи.

Институт проблем надежности
машин АН БССР

Поступило
17.10.86
Переработанный вариант
06.06.88

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Lesniak L., Polimeni A., Vanderjagt D. Degree set and traversability // Rend. Mat. 1977. V. 10, N 2—3. P. 193—204.
[2] Зверович И. Э. Реализуемость конечного множества натуральных чисел как множества степеней вершин гамильтонова графа // Изв. АН БССР. Сер. Физ.-мат. 1986. № 4. С. 32—37.
[3] Зверович И. Э. Степенное множество и проходимость графа // Ред. журн. Изв. АН БССР. Сер. Физ.-мат. 1986. Деп. в ВИНИТИ. 20 с.
[4] Kapoor S., Polimeni П., Wall C. Degree sets for graphs // Fund. Math. 1977. V. 95, N 3. P. 189—194.
[5] Gould R., Lick D. Degree sets and graph factorizations // Collog. Math. 1984. V. 69, N 2. P. 269—277.
[6] Hammer P., Ibaraki T., Simeone B. Threshold sequences // SIAM J. Alg. Discrete Math. 1981. V. 2, N 1. P. 39—49.
[7] Ruch E., Gutman I. The branching extent of graphs // J. Comb. Inform. Syst. Sci. 1979. V. 4, N 4. P. 285—295.

[8] K l e i t m a n D., W a n g D. Algorithms for constructing graphs with given valences and factors // Discrete Math. 1973. V. 6. P. 79—88.
[9] K u n d u S. The *k*-factor conjecture is true // Discrete Math. 1965. V. 6. P. 367—376.
[10] R a o A. R., R a o S. B. On factorable degree sequences // J. Combin. Theory. 1972. V. B13. P. 185—191.
[11] S i p k a T. The orders of graphs with prescribed degree sets // J. Graph Th. 1980. V. 4, N 3. P. 301—307.
[12] S c h m e i c h e l E., H a k i m i S. On the existence of a traceble graph with prescribed vertex degrees // Ars. Combinatorica, 1977. V. 4. P. 69—80.