Р. И. Тышкевич, А. А. Черняк, Еще один метод перечисления непомеченных комбинаторных объектов, *Матем. заметки*, 1990, том 48, выпуск 6, 98–105

Математические заметки

том 48 выпуск 6 декабрь 1990

ЕЩЕ ОДИН МЕТОД ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ НЕПОМЕЧЕННЫХ КОМБИНАТОРНЫХ ОБЪЕКТОВ

Р. И. Тышкевич, А. А. Черняк

Главным инструментом в теории перечисления непомеченных комбинаторных объектов служит широко известная перечислительная теорема Пойа. Эта теорема применима в задачах, которые сводятся к перечислению классов эквивалентных отображений f: $D \to R$, индуцируемых действием на множестве D группы перестановок. Достаточно широкий диапазон применения теоремы Пойа связан с ее различными обобщениями и интерпретациями, не всегда подчиняющимися общим принципам.

Мы предлагаем метод перечисления, основанный на непосредственном применении отправного пункта теоремы Пойа — леммы Бернсайда и решении простых матричных уравнений. Разумеется, возможности этого метода ограничены, однако для достаточно широкого класса перечислительных задач он позволяет получать простыми единообразными средствами как уже известные результаты, так и новые перечислительные формулы. В подтверждение этого тезиса здесь перечисляются расщепляемые графы и смешанные (r, s)-графы. Как прямые следствия получаются перечислительные формулы для графов, диграфов, направленных и смешанных графов, турниров. Тем же способом можно получить известные формулы для перечисления эйлеровых графов, корневых графов и т. д. На этой же основе в [5] перечислены бокс-пороговые графы.

Суть метода в следующем. Перечисляемые объекты отождествляются с матрицами из некоторого множества матриц D. На D задается действие (Γ, D) подходящей группы Γ таким образом, чтобы изоморфизм перечисляемых объектов означал принадлежность соответствующих матриц одной орбите этого действия. Число перечисляемых объектов совпадает с числом орбит рассматриваемого действия и определяется по лемме Бернсайда:

$$|\operatorname{Orb}(\Gamma, D)| = \frac{1}{|\Gamma|} \cdot \sum\nolimits_{\gamma \in \Gamma} \operatorname{char} \gamma.$$

Остается найти характер $\operatorname{char} \gamma$ произвольного элемента $\gamma \in \Gamma$, т. е. число всех матриц из D, неподвижных относительно элемента γ. Действие (Γ, D) определено так, что $\gamma(X) = fXg^{-1}$ для $X \in D$, где $f = f_\gamma$ и $g = g_\gamma$ — матрицы подходящих перестановок. Таким образом, char γ равен числу решений в D матричного уравнения

$$fXg^{-1} = X. \tag{1}$$

Стало быть, мы решим перечислительную задачу всякий раз, когда сможем подобрать соответствующие множество D и действие (Γ, D) и найти число решений уравнения (1).

1. Обозначения, предварительные факты. Ниже $|V|$ — мощность множества V, $\mathbf{Z}_n$ — аддитивная группа классов целых чисел по модулю n, (a, b) — наибольший общий делитель чисел a и b. Если не оговорено иное, то через X_{ij} обозначается элемент матрицы X, расположенный на пересечении i-й строки и j-го столбца.

Перестановки обычным способом отождествляются с (0,1)-матрицами. Если перестановка s действует на $\mathbf{Z}_n$, то ей соответствует (0, 1)-матрица $s = [s_{ij}]$ $(i, j \in \mathbf{Z}_n)$, определяемая условиями

$$(s_{ij} = 1) \Leftrightarrow (s(j) = i).$$

Через h_n обозначаются цикл длины n и соответствующая ему матрица:

$$h_n = (0, 1, \ldots, n-1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

через $I_{m,n}$ обозначается $m \times n$-матрица, составленная из одних единиц; $I_{m,n} \times A$ — кронекерово произведение матриц:

$$I_{m,n} \times A = \underbrace{\begin{pmatrix} A & \ldots & A \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A & \ldots & A \end{pmatrix}}_{n} \Bigg\} m .$$

Список $(m_1, \ldots, m_k)$ длин независимых циклов, в произведение которых разлагается перестановка $s \in S_m$, называет *цикловым типом перестановки* s и обозначают через $j(s)$. S_m обозначает симметрическую группу m-й степени.

Пусть T — произвольное множество. Матрица порядка n, имеющая вид

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_{n-1} & \ldots & a_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \ldots & a_0 \end{pmatrix}, \quad a_i \in T, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

называют n-циркулянтом над T.

Произведение матрицы перестановки и матрицы над T определяется как обычно, при этом для $a \in T$ полагается

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \quad 0 \cdot a = a \cdot 0 = 0, \ a + 0 = 0 + a = a.$$

ЛЕММА 1. *Множество $m \times n$-матриц X над T, удовлетворяющих условию*

$$h_m X h_n = X, \tag{3}$$

совпадает с множеством кронекеровых произведений вида

$$I_{p,\,q} \times c, \tag{4}$$

где c — произвольный d-циркулянт над T, $p = m/d$, $q = n/d$, $d = (m,\ n)$.

Доказательство. Условие (3) равносильно системе условий

$$X_{i+1,\,j+1} = X_{i,\,j}, \ \ i \in \mathbf{Z}_m, \ \ j \in \mathbf{Z}_n. \tag{5}$$

Из (5) следует

$$X_{i,\,j} = X_{i+d,\,j} = X_{i,\,j+d} = X_{i+d-1,\,j-1}, \tag{6}$$

поскольку совместна каждая из трех систем сравнений

$$\left.\begin{matrix} x \equiv d \pmod m \\ x \equiv 0 \pmod n \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} x \equiv 0 \pmod m \\ x \equiv d \pmod n \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} x \equiv d-1 \pmod m \\ x \equiv -1 \pmod n \end{matrix}\right\}.$$

В свою очередь, условия (6) влекут (5).

С другой стороны, искомую матрицу X, удовлетворяющую равенству (3), разобьем на блоки Y_{kl} порядка d:

$$X = [Y_{kl}], \quad k \in \mathbf{Z}_p, \quad l \in \mathbf{Z}_q.$$

Равенства (6) означают, что все блоки Y_{kl} равны друг другу и являются d-циркулянтом. Следовательно, $X = I_{p,\,q} \times c$, где c — циркулянт.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть*

$$f = \operatorname{diag}\,[h_{m_1}, \ \ldots, \ h_{m_k}] \tag{7}$$

— блочно-диагональная матрица порядка m, где h_{m_i} — матрица вида (2), *соответствующая циклу* $(0, 1, \ \ldots, m_i - 1)$ $\quad (i = 1, \ldots$ $\ldots, k)$,

$$g = \operatorname{diag}\,[h_{n_1}, \ \ldots, \ h_{n_l}] \tag{8}$$

— аналогичная матрица порядка n. Тогда множество $m \times n$-матриц X над T, удовлетворяющих условию

$$f X g^{-1} = X, \tag{9}$$

совпадает с множеством блочных матриц

$$X = [Z_{ij}], \ i \in \mathbf{Z}_k, \ j \in \mathbf{Z}_l, \tag{10}$$

где $\mathbf{Z}_{ij}$ — $m_i \times n_j$*-матрица вида* (4):

$$Z_{ij} = I_{i'j'} \times c_{d_{ij}},$$

$$d_{ij} = (m_i,\ n_j),\ i' = id_{ij}^{-1},\ j' = jd_{ij}^{-1},$$

$c_{d_{ij}}$ — *произвольный* d_{ij}*-циркулянт над* T.

Доказательство. Искомую матрицу X, удовлетворяющую условию (9), запишем в блочном виде (10). Условие (9) приобретает вид

$$h_{m_i} Z_{ij} h_{n_j}^{-1} = Z_{ij}, \quad i \in \mathbf{Z}_k, \quad j \in \mathbf{Z}_l. \tag{11}$$

Так как каждая из клеток Z_{ij} фигурирует только в одном из условий (11), то достаточно рассмотреть случай $k = l = 1$. Но этот случай рассмотрен в лемме 1.

В качестве иллюстрации применим изложенную выше технику для перечисления смешанных $(r,\ s)$-графов.

Смешанным $(r,\ s)$*-графом* называют мультиграф без петель, в котором кратности дуг не превосходят s, а кратности неориентированных ребер не превосходят r. Пусть G — смешанный $(r,\ s)$-граф с множеством вершин $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$. Определим $n \times n$-матрицу $A = A\ (G)$ условиями

$$A_{ii} = 0, \qquad i = 1,\ \ldots,\ n,$$

$$A_{ij} = (\alpha,\ \beta,\ \gamma), \qquad 1 \leqslant i \neq j \leqslant n,$$

где α — кратность дуги $(i,\ j)$, β — кратность дуги $(j,\ i)$, γ — число ребер $\{i,\ j\}$. Обозначим через S множество матриц $A\ (G)$, где G пробегает множество смешанных $(r,\ s)$-графов порядка n, и определим действие $(S_n,\ S)$ следующим образом

$$f\ (X) = fXf^{-1}, \qquad f \in S_n, \qquad X \in S.$$

Очевидно, что число попарно неизоморфных смешанных $(r,\ s)$-графов порядка n равно $|\ \mathrm{Orb}\ (S_n,\ S)\ |$.

ЛЕММА 2. *Если* $f \in S_n$, $j\ (f) = (n_1,\ \ldots\ n_k)$, *то число решений матричного уравнения*

$$fXf^{-1} = X,\ X \in S, \tag{12}$$

определяется формулой

$$c\,(f) = c\,(n_1, \ldots, n_k) = (s+1)^{2\sum_{i<j}(n_i,\ n_j) + \sum_{i=1}^{k} n_i - k} \cdot$$

$$\cdot (r+1)^{\sum_{i<j}(n_i,\ n_j) + \sum_{i=1}^{k} [n_i/2]} \tag{13}$$

(через $[m]$ обозначается наибольшее целое, не превосходящее число m).

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что f имеет вид (7). Тогда искомое решение уравнения (12) представимо в блочном виде $X = [Y_{ij}]$, $i,\ j \in \mathbf{Z}_k$, где Y_{ij} — $n_i \times n_j$-

матрица. Очевидно, что блок Y_{ij} однозначно определяется блоком Y_{ij}.

Рассмотрим блок Y_{ij} с $i < j$. Согласно теореме 1 этот блок составлен из одинаковых (n_i, n_j)-циркулянтов. Элемент цикрулянта — произвольная тройка (α, β, γ), где $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant s$, $0 \leqslant \gamma \leqslant r$. Поэтому число возможностей для блока Y_{ij} равно

$$((s+1)^2 (r+1))^{(n_i,\, n_j)}.$$

Блок Y_{ii} — циркулянт порядка n_i с нулем на диагонали:

$$Y_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & a_{n_i-1} & \ldots & a_1 \\ a_1 & 0 & \ldots & a_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n_i-1} & a_{n_i-2} & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $n_i = 2l + 1$, то элементы a_i с $i \leqslant l$ определяют симметричные им элементы a_i с $i > l$, поэтому число возможностей для Y_{ii} равно

$$((s+1)^2 (r+1))^l.$$

Если же $n_i = 2l$, то элементы a_i с $i < l$ однозначно определяют симметричные им элементы a_i с $i > l$, а a_l занимает симметричные позиции. Это возможно лишь при $a_l = (\alpha, \alpha, \gamma)$. Поэтому число возможностей для Y_{ii} равно

$$(s+1)^2 (r+1)^{l-1} (s+1) (r+1).$$

Учитывая попарную независимость блоков Y_{ij} при $i \leqslant j$ и произведя необходимые выкладки, получим формулу (13).

ТЕОРЕМА 2. *Число u_n попарно неизоморфных n-вершинных смешанных (r, s)-графов определяется равенством*

$$u_n = (1/n!) \sum_{(n_1, \ldots, n_k)} h(n_1, \ldots, n_k) \cdot$$
$$\cdot (s+1)^{2\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant k} (n_i,\, n_j) + \sum_{i=1}^{k} n_i - k} (r+1)^{\sum_{i<j} (n_i,\, n_j) + \sum_{i=1}^{k} [n_i/2]}, \qquad (14)$$

где $(n_1, \ldots, n_k)$ пробегает множество разбиений числа n.

Теорема вытекает из леммы Бернсайда и леммы 2.

Полагая в (14) $s = 0$, $r = 1$, имеем

Следствие 1 [2]. *Число n-вершинных обыкновенных графов равно*

$$(1/n!) \sum_{(n_1, \ldots, n_k)} h(n_1, \ldots, n_k)\, 2^{\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant k} (n_i,\, n_j) + \sum_{i=1}^{k} [n_i/2]}.$$

Полагая в (14) $r = 0$, $s = 1$, получаем

Следствие 2 [2]. *Число n-вершинных диграфов равно*

$$(1/n!) \sum_{(n_1, \ldots, n_k)} h(n_1, \ldots, n_k) 2^{2\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant k} (n_i,\, n_j) + \sum_{i=1}^{k} n_i - k}.$$

С л е д с т в и е 3 [2]. *Число n-вершинных направленных графов равно*

$$(1/n!)\sum_{(n_1,\ldots,n_k)} h(n_1,\ldots,n_k)\,\zeta^{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}(n_i,\,n_j)+\sum_{i=1}^{k}[(n_i-1)/2]}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — направленный граф порядка n. В обозначениях теоремы 2 недиагональные элементы матрицы $A(G)$ могут принимать только следующие значения: (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 0). Поэтому общее число возможностей для центральных блоков X_{ii} равно

$$\zeta^{\sum_{i=1}^{k}[(n_i-1)/2]}.$$

Дальше по аналогии с доказательством теоремы 2.

С л е д с т в и е 4 [4]. *Число n-вершинных турниров равно*

$$(1/n!)\sum^{*}_{(n_1,\ldots,n_k)} h(n_1,\ldots,n_k)\cdot 2^{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}(n_i,\,n_j)+\sum_{i=1}^{k}[(n_i-2)/2]},$$

где сумма $\sum^*$ *берется только по разбиениям с четными частями.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — турнир порядка n. В обозначениях теоремы 2 недиагональные элементы матрицы $A(G)$ могут принимать только следующие значения: (1, 0, 0), (0, 1, 0). Поэтому все блоки X_{ii} четного порядка. Дальше по аналогии с доказательством теоремы 2.

2. Перечисление расщепляемых графов. Граф G, не имеющий петель и кратных ребер, называют *расщепляемым*, если существует разбиение

$$VG = A \cup B \tag{15}$$

множества VG его вершин на клику A и независимое множество B. Разбиение (15) называют *полярным*, а его части A и B называют *верхней* и, соответственно, *нижней долями графа* G. Одна из долей может быть пустой, так что полный и пустой графы расщепляемые [3].

Полярное разбиение не определяется расщепляемым графом однозначно, и такие графы удобно рассматривать вместе с фиксированными верхней и нижней долями, т. е. в виде триад (G, A, B). Естественно определяется изоморфизм триад. Пусть (G, A, B) и (H, C, D) — триады, $f\colon G\to H$ — графовый изоморфизм. Если f сохраняет доли, т. е. $f(A) = C$ (и, стало быть, $f(B) = D$), то f называют изоморфизмом триад.

ЛЕММА 3. *Число попарно неизоморфных расщепляемых графов порядка* $n > 1$ *равно*

$$1+\sum_{m=1}^{n-1} t_{m,\,n-m},$$

где $t_{m,\,n-m}$ *— число попарно неизоморфных триад* (G, A, B) *таких, что* $|A| = m$, $|B| = n - m$, *и для любой вершины* b *из нижней доли ее окружение* $N(b)$ *не равно* A.

В самом деле, как показано в [1], любой расщепляемый граф G порождает не более двух триад. При этом триады (G, A, B) и (G, C, D) изоморфны, если $|A| = |C|$. Если же $|A| < |C|$, то $C = A \cup \{b\}$, $b \in B$, $N(b) = A$. Следовательно, поставив в соответствие каждому расщепляемому графу G триаду (G, A, B) с максимально возможным значением $|A|$, мы получим биекцию множества расщепляемых графов, различаемых до графового изоморфизма, на множество триад, в нижних долях которых нет вершин, смежных с каждой вершиной из верхней доли, различаемых до изоморфизма триад.

Обратимся к числу $t_{m, n-m}$. Пусть (G, A, B) — триада, $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_{n-m}\}$. Определим $m \times (n - m)$-матрицу $M = M(G, A, B)$ этой триады, положив

$$M_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i \text{ и } b_j \text{ смежны}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что две триады изоморфны, если и только если их матрицы получаются одна из другой перестановками строк и столбцов. В нижней доле триады нет вершины, смежной с каждой вершиной из верхней доли, тогда и только тогда, когда в матрице этой триады нет столбца, состоящего сплошь из единиц.

Пусть S — множество всех (0, 1)-матриц размеров $m \times (n - m)$, не содержащих столбцов из одних единиц. Определим действие на S прямого произведения $S_m \times S_{n-m}$ симметричных групп следующим образом:

$$(f, g)\, X = fXg^{-1}, \qquad f \in S_m,\ g \in S_{n-m},\ X \in S.$$

Из сказанного выше вытекает

ЛЕММА 4. $t_{m, n-m} = |\operatorname{Orb}(S_m \times S_{n-m}, S)|$.

ЛЕММА 5. *Если* $f \in S_m$, $g \in S_{n-m}$, $j(f) = (m_1, \ldots, m_k)$, $j(g) = (n_1, \ldots, n_l)$, *то число решений в* S *матричного уравнения* (9) *определяется формулой*

$$c(f, g) = c(m_1, \ldots, m_k; n_1, \ldots, n_l) = \prod_{j=1}^{l} \left(2^{\sum_{i=1}^{k} (m_i, n_j)} - 1\right). \tag{16}$$

Доказательство. Пусть

$$\bar{f} = sfs^{-1}, \qquad \bar{g} = rgr^{-1},\ s \in S_m,\ r \in S_{n-m},$$

$$\bar{A} = sAr^{-1},\ A \in S.$$

Тогда $A \in S$ и матрица $\bar{A}$ является решением уравнения $\bar{f}X\bar{g}^{-1} = X$ тогда и только тогда, когда A есть решение уравнения (9). При этом f и $\bar{f}$, как и g и $\bar{g}$, имеют совпадающие цикловые типы. Следовательно, мы можем заменить перестановки f и g любыми сопряженными перестановками. В частности, без ограничения общности считаем f и g имеющими вид (7) и (8) соответственно.

Запишем теперь искомое решение уравнения (9) в виде строк $X = [X_1 \ldots X_l]$, где столбец X_j имеет размеры $m \times n_j$. Согласно теореме 1 столбец X_j составлен из $(m_i,\ n_j)$-циркулянтов c_{ij}, $i = 1, \ldots, k$, причем циркулянт c_{ij} входит в этот столбец $m_i \times n_j \times (m_i, n_j)^{-2}$ раз. В остальном эти циркулянты произвольны. Циркулянт имеет единичный столбец только тогда, когда он составлен сплошь из единиц, следовательно, число возможностей для столбца X_j равно

$$2^{\sum_{i=1}^{k}(m_i,\ n_j)} - 1.$$

Так как столбцы X_j не зависят друг от друга, то для числа решений уравнения (9) получаем формулу (16).

ТЕОРЕМА 3. *Число t_n попарно неизоморфных расщепляемых графов порядка $n > 1$ определяется равенством*

$$t_n = 1 + \sum_{m=1}^{n-m} 1/(m!\,(n-m)!) \sum_{\substack{(m_1, \ldots, m_k)\\ (n_1, \ldots, n_l)}} h(m_1, \ldots, m_k) \cdot h(n_1, \ldots, n_l) \prod_{j=1}^{l} (2^{\sum_{i=1}^{k}(m_i,\ n_j)} - 1), \qquad (17)$$

где $(m_1, \ldots, m_k)$ и $(n_1, \ldots, n_l)$ пробегают множество разбиений числа m и множество разбиений числа $n - m$ соответственно, $h(m_1, \ldots, m_k)$ — число перестановок в S_m, имеющих цикловой тип $(m_1, \ldots, m_k)$.

Доказательство. Учитывая леммы 3, 4 и лемму Бернсайда, имеем

$$t_n = 1 + \sum_{m=1}^{n-m} 1/(m!\,(n-m)!) \sum_{\substack{(m_1, \ldots, m_k)\\ (n_1, \ldots, n_l)}} h(m_1, \ldots, m_k) \cdot h(n_1, \ldots, n_l)\, c(m_1, \ldots, m_k;\ n_1, \ldots, n_l).$$

Далее с помощью формулы (16) получаем равенство (17).

Отметим, что явное выражение для $h(m_1, \ldots, m_n)$ можно найти в [2].

Белорусский госуниверситет

Институт проблем надежности
и долговечности машин АН БССР

Поступило
26.01.88
Переработанный вариант
12.01.89

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Тышкевич Р. И. Алгебраический подход к проблемам теории графов: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. Киев, 1983.
[2] Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. М.: Мир, 1977.
[3] Foldes S., Hammer P. L. Split graphs // Proc. 8-th South—Eastern Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Utilities Math, 1977. P. 311—315.
[4] Moon J. Topics on tournaments. New York: Holt, 1968.
[5] Tyshkevich R. I., Chernyak A. A. Box-threshold graphs // 30-th Intern. Wiss. Koll. FH Ilmenau. Graphen und Netzwerke-Theorie und Anwendungen. Ilmenau, 1985. P. 119—121.