А. А. Черняк, Комбинаторно-графовый метод анализа надежности сложных систем с монотонными булевыми функциями, *Автомат. и телемех.*, 1991, выпуск 4, 165–174

УДК 62-1925519.01

А. А. ЧЕРНЯК, канд. физ.-мат. наук

(Институт проблем надежности машин АН БССР, Минск)

КОМБИНАТОРНО-ГРАФОВЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА НАДЕЖНОСТИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ С МОНОТОННЫМИ БУЛЕВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Разработан алгоритмический метод анализа надежности структурно-сложных систем, элементы которых допускают произвольную логику функционирования, определяемую монотонными булевыми функциями. При этом обобщены результаты ряда зарубежных работ по расчету надежности сложных систем с сетевой структурой, использующих математический аппарат теории графов.

1. Введение и постановка задачи

Универсальной математической моделью при анализе надежности многих классов сложных систем (коммуникационных, энергетических, сетей связи, сетей ЭВМ и т. д.) является вероятностный граф G. Вершины такого графа соответствуют узлам реальной системы, дуги — каналам связи. Элементы s графа G (его вершины и дуги) могут находиться с заданными вероятностями p_s в состояниях исправности (состояние 1) и отказа (состояние 0), что определяется возможными состояниями соответствующих элементов реальной системы. Так как работоспособность упомянутых выше систем определяется проводимостью сигнала между узлами некоторого фиксированного подмножества узлов T, то в качестве основного показателя их надежности берется вероятность $P(G)$ наличия в соответствующих графовых моделях G исправных минимальных путей между парами вершин из T.

Проблеме определения $P(G)$ посвящена обширная библиография в СССР и за рубежом (см., например, монографии и обзоры [1—7]). Интерес к этой проблеме в некотором смысле объясняет следующий основополагающий результат, полученный в [8, 9]: задача точного расчета $P(G)$ является NP-трудной. Другими словами, доказано, что временная сложность всех существующих алгоритмов точного расчета $P(G)$ экспоненциально растет с ростом размерности графа G. Таким образом, этот результат предполагает разработку все более искусных аглоритмических методов расчета $P(G)$, позволяющих укладываться в исходные характеристики используемых ЭВМ при решении практических задач надежности.

Рассмотрим ориентированный граф G, работоспособность которого определяется исправностью хотя бы одного (направленного) минимального пути между фиксированными вершинами s и t (s — исток, t — сток). Такие графы называются (s,t)-графами. С каждой вершиной v графа G с k входящими в нее дугами $e_1, \ldots, e_k$ свяжем булеву функцию f_v (будем называть ее вершинной функцией):

$$(1) \qquad f_v(x_1, \ldots, x_k) = \begin{cases} x_1 \vee \ldots \vee x_k, & \text{если } v \neq s, \\ 1, & \text{если } v = s, \end{cases}$$

где x_i — булева переменная, соответствующая дуге e_i. Графы с вершинными функциями вида (1) называются сетевыми. Назовем выходным состоянием вершины v величину

$$y_v = f_v(x_1, \ldots, x_k) z_v,$$

где $z_v \in \{0, 1\}$, $z_v = 1$, если и только если v исправна. Условимся состояния исправных дуг, исходящих из вершины v, отождествлять с выходным состоянием y_v (т. е. берется логическое произведение y_v и состояния исходящей дуги). Теперь можно дать удобную эквивалентную формулировку критерия надежности G: граф G работоспособен, если и только если $y_t = 1$.

Очевидна ограниченность приведенной выше модели: вершинными функциями сетевых графов могут быть только элементарные дизъюнкции. Таким образом, из сферы применимости известных методов расчета $P(G)$ выпадают целые классы систем со сложной логикой функционирования узлов (например, пилотажно-навигационные системы).

Расширим описанную выше модель, допустив в качестве вершинных функций произвольные монотонные булевы функции. Соответствующие вероятностные (s, t)-графы назовем монотонными. Для точного аналитического расчета $P(G)$ монотонных графов G, в принципе, может быть применен громоздкий метод построения структурных функций [10]. Однако применимость этого метода становится проблематичной даже для систем небольшой размерности из-за значительных требований к временным и емкостным ресурсам используемых ЭВМ. Кроме того, он не учитывает порядка состояний дуг, входящих в вершины графа.

В данной статье разработан алгоритмический метод точного расчета $P(G)$ в классе монотонных ациклических (s, t)-графов. Метод обобщает результаты, полученные в [11—14] для сетевых графов. Его эффективность определяется основной расчетной формулой, полученной в теореме 1. Формула оперирует только с попарно несокращаемыми членами, которые находятся во взаимно-однозначном соответствии с правильными подграфами графа G. Теоремы 2—3 обосновывают корректность приводимого алгоритма, генерирующего все правильные подграфы без дублирования. Конструктивные доказательства теорем 1—3 вскрывают свойства монотонных (s, t)-графов, имеющие самостоятельный теоретический интерес.

Отметим, что монотонные графы включают в себя так называемые сетевые (s, T)-графы и оверлейные графы. Так, работоспособность сетевого (s, T)-графа H определяется проводимостью между всеми парами вершин s, t_i, $i = \overline{1, k}$, где $T = \{t_1, \ldots, t_k\}$. Добавив к H вершину t и k входящих в нее дуг (t_i, t), $i = \overline{1, k}$ и положив $f_t = x_1 \ldots x_k$, получим монотонный (s, t)-граф, эквивалентный (в смысле надежности) исходному.

2. Вспомогательные результаты, терминология

Все рассматриваемые ниже графы отриентированные (т. е. каждая дуга (v, w) имеет направление от v к w), ациклические (т. е. без направленных циклов) и без изолированных вершин. Дуга (v, w) называется входящей в вершину w и исходящей из вершины v. VH, DH — соответственно множества вершин и дуг графа H. Кратные дуги без ограничения общности из рассмотрения исключаются. $D_H^-(v)$, $D_H^+(v)$ — соответственно множества исходящих и входящих дуг вершины v в графе H. $\Pr(H)$ — произведение вероятностей состояний исправности всех элементов графа H. Запись $F \subseteq H$ означает, что F является подграфом графа H. $P(H)$ —

вероятность работоспособности (s,t)-графа H. $H-DF$ — граф, полученный из H удалением дуг DF и вершин $VF\setminus VH$.

Граф A назовем минимальным, если A является (s, t)-графом, обладающим следующим свойством: A работоспособен, если и только если исправны все его элементы. Если к тому же $A\subseteq H$, то A будет называться минимальным подграфом в графе H. Граф H называется правильным, если H — (s, t)-граф и любая его дуга принадлежит некоторому его минимальному подграфу. Всюду ниже G — правильный граф; $R(G)$ — множество правильных подграфов графа G; переменные вершинных функций f_v и соответствующие им дуги из $D^+(v)$ не различаются и будут обозначаться одинаковыми символами.

Разложением (s, t)-графа H назовем представление H в виде объединения минимальных подграфов, называемых компонентами разложения. При этом четность разложения определяется четностью числа компонент в нем. Обозначим $\mathrm{od}(H)$ и $\mathrm{ev}(H)$, соответственно, число нечетных и число четных разложений H, $r(H)=\mathrm{od}(H)-\mathrm{ev}(H)$. Параметр $r(H)$ назовем коэффициентом разложений графа H.

Булева функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ называется монотонной, если истинна импликация:

$$(x_i^1\leqslant x_i^2,\ i=\overline{1,\ n})\Rightarrow(f(x_1^1,\ldots,x_n^1)\leqslant f(x_1^2,\ldots,x_n^2)).$$

Переменная x_i в f называется фиктивной, если

$$f(x_1,\ldots,x_{i-1},\ 0,\ x_{i+1},\ldots,x_n)=f(x_1,\ldots,x_{i-1},\ 1,\ x_{i+1},\ldots,x_n)$$

для любых x_j, $j\neq i$. Каждая булева функция, кроме тождественно равных 0 или 1, имеет единственную сокращенную дизъюнктивно нормальную форму (ДНФ) [15], обозначаемую $c(f)$. Все элементарные конъюнкции сокращенной ДНФ монотонной булевой функции f являются простыми импликантами, не содержащими отрицаний переменных [15].

Скажем, что множество переменных $K=\{x_1,\ldots,x_r\}$ функции f индуцирует функцию g (от $n-r$ переменных) из f, если

$$g(x_{r+1},\ldots,x_n)=f(0,\ldots,0,\ x_{r+1},\ldots,x_n).$$

Если $x_{i_1}\ldots x_{i_k}$ — элементарная конъюнкция в $c(g_v)$, где g_v — вершинная функция в H, то множество

$$\{x_{i_1},\ldots,x_{i_k}\}\subseteq D_H^+(v)$$

будем называть минимальным набором вершины v (или функции g_v) в H. Другими словами, минимальный набор вершины v — это минимальное (по включению) подмножество в $D_H^+(v)$, обеспечивающее при $z_v=1$ исправность выходного состояния y_v. Вершину v, имеющую ровно один минимальный набор в H или совпадающую с s, назовем насыщенной в H.

Свободным набором вершины v в H назовем минимальное (по включению) непустое подмножество в $D_H^+(v)$, индуцирующее из вершинной функции g_v функцию, отличную от тождественно равной 0 или 1 и не содержащую фиктивных переменных.

Утверждение 1. Пусть K и X — соответственно свободный и минимальный наборы вершины v с функцией $g_v(x_1,\ldots,x_n)$ без фиктивных переменных. Тогда либо $K\cap X=\varnothing$, либо $K\subseteq X$.

Доказательство утверждения 1 дано в приложении.

Утверждение 2. Пусть вершинная функция $g_v(x_1,\ldots,x_n)$ $(v\neq s)$ в H не имеет фиктивных переменных. Тогда v насыщенная в H, если и только если v не имеет свободных наборов.

Доказательство утверждения 2 дано в приложении.

Ниже понадобится процедура $\mathrm{Proc}(x, Y)$ построения «усеченного» минимального подграфа T графа $H\in R(G)$, где $x\in VH$, $Y\subseteq VH$ фиксированы (вершины из Y будем называть граничными). Считаем, что граф H ранжирован, т. е. задана инъективная функция $\mathrm{rang}: VH\to$ {множество натуральных чисел}, такая, что для любой дуги $(v, w)\in DH$ $\mathrm{rang}(v)<\mathrm{rang}(w)$. Для ациклического ориентированного графа такая функция всегда существует [16]. Индуктивно процедура описывается следующим образом. Вначале положим $VT=\{x\}$, $DT=\phi$. Предположим, что на некотором шаге уже построены множества VT, DT. Среди вершин VT выберем вершину u, не являющуюся ни граничной, ни помеченной и имеющую максимально возможное значение $\mathrm{rang}(u)$. (Если такой вершины нет, то процедура завершена.) Пусть $M(u)$ — некоторый минимальный набор вершины u. Тогда положим:

$$DT = DT \bigcup M(u),\ VT = VT \bigcup \begin{Bmatrix}\text{множество концевых вершин}\\ \text{дуг из } M(u)\end{Bmatrix}.$$

Назвав вершину u помеченной, переходим к следующему шагу.

Очевидно следующее

Утверждение 3. При $x=t$, $Y=\{s\}$ процедура $\mathrm{Proc}(x, Y)$ строит минимальный подграф.

3. Основные результаты

Принципиальное значение для дальнейшего имеет процедура редукции.

Редукция графа H из $R(G)$ (H ранжирован).

Шаг 1. Зафиксировать свободный набор K некоторой вершины $w\in VH$ (K будем называть начальным набором редукции).

Шаг 2. Положить $VF=$ {множество концевых вершин дуг из K}, $DF=K$. Назвать вершину w помеченной.

Шаг 3. Среди вершин из VF, не являющихся ни помеченными, ни опорными, выбрать вершину u с наибольшим значением $\mathrm{rang}(u)$. Если такой вершины нет, то редукция закончена, иначе — перейти к шагу 4.

Шаг 4. Если $D_H^-(u)\setminus DF\neq\phi$, то объявить вершину u опорной и перейти к шагу 3. Если $D_H^-(u)\subseteq DF$, то перейти к шагу 5.

Шаг 5. Если вершина u насыщенная, то положить $VF=VF$ {множество концевых вершин дуг из $D_H^+(u)$}, $DF=DF\cup D_H^+(u)$, объявить вершину u помеченной и перейти к шагу 3. Если u ненасыщенная, то редукция с начальным набором K считается невозможной.

Результатом редукции считаем граф $H-DF$. Граф F, построенный редукцией, назовем простым.

Обозначим $\bar{R}(H, F)$ и $R(H, F)$ — множества правильных подграфов в H, имеющих соответственно пустое и непустое пересечение с некоторым простым подграфом F. Тогда сверткой $\bar{R}(H, F)\otimes R(H, F)$ назовем число, равное $-\sum_{(X, Y)} r(X)r(Y)$, где сумма берется по всем парам (X, Y), таким, что $X\in\bar{R}(H, F)$, $Y\in R(H, F)$, $X\cup Y=H$, $\bar{R}(Y, F)=\phi$.

Теорема 1:

$$P(G) = \sum_{H\in R(G)} \Pr(H)\, r(H), \tag{2}$$

$$r(H) = \begin{cases}\bar{R}(H, F)\otimes R(H, F), & \text{если } H \text{ отличен от минимального},\\ 1, & \text{если } H \text{ минимальный};\end{cases} \tag{3}$$

здесь F — некоторый простой подграф в H.

Теорема 2. Граф H принадлежит $R(G)$, если и только если H может быть получен из G конечным числом последовательных редукций.

Доказательства теорем 1, 2 даны в приложении.

Для применения формулы (2) необходимо иметь способы генерации правильных подграфов и вычисления коэффициентов разложения. Алгоритмы A и B решают эти задачи.

Алгоритм A генерации правильных подграфов из $R(G)$.

Шаг 1. Обозначить G через H и положить $N(H)=\phi$. Определить в H с помощью редукции простой подграф F. Если такого подграфа нет, то алгоритм завершает работу, иначе — перейти к шагу 2.

Шаг 2. Положить $N(H)=N(H)\cup DF$, $M=H-DF$, $\mathrm{pre}(M)=H$.

Шаг 3. Обозначить через $G_1, G_2, \ldots, G_s$ соответственно графы M, $\mathrm{pre}(M)$, $\mathrm{pre}(\mathrm{pre}(M))=\mathrm{pre}^2(M), \ldots, \mathrm{pre}^{s-1}(M)=1$.

Шаг 4. Определить в M с помощью редукции простой подграф F, такой, что

(4) $$DF\cap(\cup_{i=1}^{s} N(G_i))=\varnothing.$$

Если такого простого графа F в M нет, то перейти к шагу 6, иначе — к шагу 5.

Шаг 5. Обозначить M через H, положить $N(H)=\phi$ и перейти к шагу 2.

Шаг 6. Если $M=G$, то алгоритм завершает работу. Если $M\neq G$, то положить $M=\mathrm{pre}(M)$ и перейти к шагу 3 («возвращение» назад).

Алгоритм B: определение коэффициентов разложения графов из $R(G)$ (считаем графы из $R(G)$ занумерованными в порядке неубывания числа дуг в них).

Шаг 1. Положить $i=0$.

Шаг 2. Положить $i=i+1$.

Шаг 3. Если G_i минимальный, то $r(G_i)=1$ и перейти к шагу 2, иначе — к шагу 4.

Шаг 4. Зафиксировать произвольный простой подграф F_i в графе G_i, положить $j=0$, $r(G_i)=0$, $N_1(G_i)=N_2(G_i)=\phi$.

Шаг 5. Положить $j=j+1$.

Шаг 6. Если $j=i$, то перейти к шагу 2. Если $j<i$ и G_j не является подграфом графа G_i, то перейти к шагу 5, иначе — к шагу 7.

Шаг 7. Если $G_j\in\overline{R}(G_i, F_i)$, то вычислить $r(G_i)$ по формуле

(5) $$r(G_i)=r(G_i)-r(G_j)\sum r(E),$$

где сумма берется по всем таким $E\in N_2(G_i)$, что $E\cup G_j=G_i$ (если $N_2(G_i)=\phi$, то сумма полагается равной нулю); положить $N_1(G_i)=N_1(G_i)\cup\{G_j\}$. Если же $G_j\in R(G_i, F_i)$, $\overline{R}(G_j, F_i)=\phi$, то вычислить $r(G_i)$ по формуле (5), где сумма берется уже по всем таким $E\in N_2(G_i)$, что $E\cup G_j=G_i$ (эта сумма равна нулю, если $N_2(G_i)=\phi$); положить $N_1(G_i)=N_2(G_i)\cup\{G_j\}$. Перейти к шагу 5.

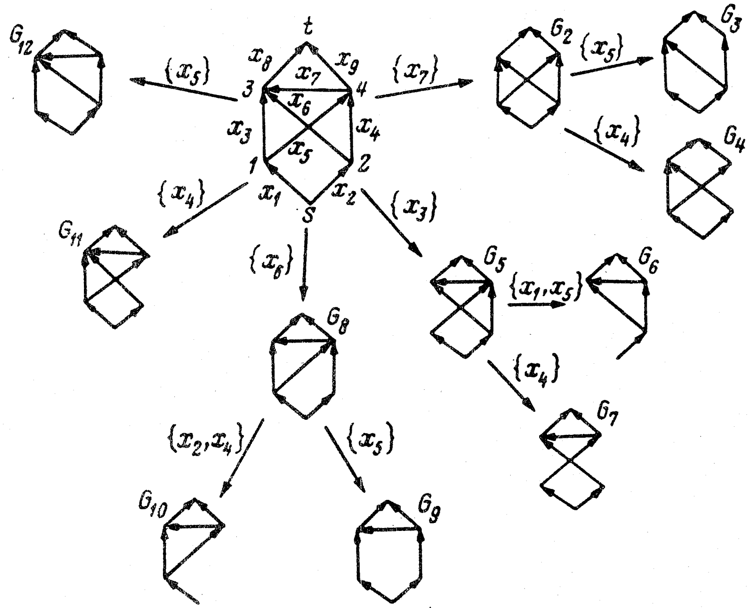
Теорема 3. Алгоритм A генерирует все графы из $R(G)$ без дублирования.

Доказательство теоремы 3 дано в приложении.

Корректность алгоритма B непосредственно следует из формулы (3). Отметим только, что формула (3) позволяет определять коэффициент разложений графа рекуррентно через коэффициенты разложения его строго меньших подграфов. Это следует из того, что $\overline{R}(H, F)\neq\phi$ для простого подграфа F в H, ибо в силу теоремы 2 $H-DF$ — правильный граф.

4. Пример

На рисунке изображен монотонный (s, t)-граф G со следующими вершинными функциями: $f_s=1$, $f_1(x_1)=x_1$, $f_2(x_2)=x_2$, $f_3(x_3, x_6, x_7)=x_3x_6\vee\vee x_3x_7\vee x_6x_7$, $f_4(x_4, x_5)=x_4\vee x_5$, $f_t(x_8, x_9)=x_8x_9$. Графы из $R(G)$ занумерованы в порядке их построения алгоритмом A. Над стрелками изображены списки дуг простых подграфов, удаление которых приводит к соответствующим правильным подграфам.



Графы G_{11} и G_{12} содержат простые подграфы. Однако каждый из этих простых подграфов имеет непустое пересечение с $N(G)=\{x_3, x_6, x_7\}$ (т. е. не выполняется условие (4)). Поэтому дальнейшая генерация правильных подграфов из G_{11} или G_{12} привела бы к дублированию. Таким образом, согласно формуле (2), в выражении для $P(G)$ будет 12 членов. Интересно сопоставить это с числом членов в выражении для $P(G)$, если пользоваться формулой включения-исключения (см. (П.1)): так как минимальных подграфов в данном графе G ровно 6, то число слагаемых в (П.1) будет $2^6-1=63$.

Далее, алгоритм B определяет коэффициенты разложений правильных подграфов: $r(G_6)=r(G_{10})=r(G_3)=r(G_4)=r(G_7)=r(G_9)=1$, $r(G_2)=r(G_5)=r(G_8)=-1$. Рассмотрим G_{11}. Очевидно, $\{G_{10}, G_7, G_4, G_{11}\}=R(G_{11})$. Фиксируем простой подграф F_{11} в G_{11}: $DF_{11}=\{x_7\}$. Тогда $\bar{R}(G_{11}, F_{11})=\{G_4\}$, $R(G_{11}, F_{11})=\{G_{10}, G_7\}$. При этом $\bar{R}(G_{10}, F_{11})=\bar{R}(G_7, F_{11})=\emptyset$, $G_4\cup G_{10}=G_4\cup G_7=G_{11}$.

Поэтому $r(G_{11})=-r(G_4)r(G_{10})-r(G_4)r(G_7)=-2$. Аналогично $r(G_{12})=-2$.

Осталось рассмотреть граф G. Фиксируем в нем простой подграф F: $DF=\{x_4\}$. Тогда

$$\bar{R}(G, F)=\{G_{11}, G_{10}, G_7, G_4\}.$$

Среди остальных подграфов выберем такие H, для которых $\bar{R}(H, F)=$ $=\phi$ – это G_{12}, G_9, G_6, G_3. Отсюда

$$r(G)=-r(G_{11})(r(G_{12})+r(G_9)+r(G_6)+r(G_3))-r(G_{10})(r(G_{12})+ +r(G_6)+r(G_3))-r(G_7)(r(G_{12})+r(G_9)+r(G_3))- -r(G_4)(r(G_{12})+r(G_9)+r(G_6))=2.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Предположим, что $K\cap X\neq\phi$ и $S=K\setminus X\neq\phi$. Если теперь h_v – функция, индуцированная из g_v множеством S, то $c(h_v)$ содержит все переменные из X. Кроме того, $c(h_v)$ содержит все переменные из $Y=\{x_1,\dots, x_n\}\setminus K$, ибо это верно и для функции, индуцированной из g_v множеством K. А так как $\phi\subset \subset S\subset K$, $Y\cup X=\{x_1,\dots, x_n\}\setminus S$, то S обладает свойствами свободного набора. Последнее противоречит минимальности K. Утверждение доказано.

Доказательство утверждения 2. Пусть X – произвольный минимальный набор вершины v. Тогда множество $Y=\{k_1,\dots, k_n\}\setminus X$ индуцирует из g_v функцию, содержащую точно один минимальный набор X и, следовательно, не содержащую фиктивных переменных. Поэтому, если $Y\neq\phi$, то Y обязательно содержит свободный набор вершины v в H. Утверждение доказано.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\{A_1,\dots, A_n\}$ – множество минимальных подграфов в G. В силу классической формулы включения-исключения [1] имеем:

$$P(G)=\sum_i \Pr(A_i)-\sum_{i<j}\Pr(A_i\cup A_j)+\dots+(-1)^n \Pr(A_1\cup\dots\cup A_n). \tag{П.1}$$

По определению, $H\in R(G)$, если и только если H представим в виде $H=$ $=A_{i_1}\cup\dots\cup A_{i_k}$ для некоторых $1\leqslant i_1<\dots<i_k\leqslant n$. Отсюда (П.1) эквивалентно (2).

Рассмотрим граф H из $R(G)$. Если H минимальный, то $r(H)=1$. Пусть H отличен от минимального. Тогда H содержит ненасыщенные вершины, среди которых можно выбрать вершину v с наименьшим значением $\operatorname{rang}(v)$. В силу утверждения 2 и определения редукции H допускает редукцию с начальным набором, совпадающим с некоторым свободным набором вершины v в H. Простой подграф, полученный в результате этой редукции, обозначим F.

С каждым разложением R_α графа H свяжем два подмножества компонент этого разложения:

$$U_\alpha(F)=\{A\in R_\alpha,\quad DF\subseteq DA\},$$

$$V_\alpha(F)=\{A : A\in R_\alpha,\quad DF\cap DA=\phi\}.$$

Из определения редукции и утверждения 1 следует, что каждый простой подграф содержится в некотором минимальном. Поэтому множество $U_\alpha(F)\cup V_\alpha(F)$ содержит все компоненты разложения R_α.

Скажем, что два разложения R_α, R_β связаны отношением $\sim$, если и только если $U_\alpha(F)=U_\beta(F)$. Очевидно, $\sim$ – отношение эквивалентности, разбивающее все разложения графа H на классы эквивалентности. Рассмотрим два типа классов эквивалентности.

1. Пусть L – класс эквивалентности, содержащий все разбиения R_α, для которых не выполняется условие

$$\bar{R}(Y_L, F)=\phi; \tag{П.2}$$

здесь $Y_L=A_1\cup\dots\cup A_t$, $U_\alpha(F)=\{A_1\cup\dots\cup A_t\}$, $t\geqslant1$. Пусть B минимальный и $B\in\bar{R}(Y_L, F)$. Зададим функцию $\varphi : L\to L$:

$$\varphi(R_\alpha)=\begin{cases} R_\alpha\cup\{B\}, & \text{если } B\equiv R_\alpha,\\ R_\alpha\setminus\{B\}, & \text{если } B\in R_\alpha.\end{cases}$$

В любом случае $\varphi(R_\alpha)$ является разложением H. Кроме того, φ – инъекция и, следовательно, φ – биективное отображение. Так как φ изменяет четность отображаемых разложений, то число четных разложений в L равно числу нечетных.

2. Пусть L – класс эквивалентности, содержащий разбиения, для которых выполняется условие (П.2). Фиксируем разбиение R_α из L. Пусть X_L – объединение элементов множества $V_\alpha(F)$. Очевидно, $X_L\cup Y_L=H$. Обозначим через $m_0(L)$ и $m_e(L)$

соответственно число нечетных и число четных разложений в классе L. Имеем:

$$m_0(L)-m_e(L)=\sum_{R_\alpha\in L}(-1)^t\,r(X_L)=\sum_{X\in\bar{R}(H,F),\;X_L\cup Y_L=H}\times$$

$$\times(-1)^t r(X);\text{ здесь } t=|U_\alpha(F)|.$$

Учитывая это, а также условие (П.2), имеем:

$$r(H)=\mathrm{od}(H)-\mathrm{ev}(H)=\sum_L m_0(L)-m_e(L)=-\sum_{\substack{L\\ \bar{R}(Y_L,F)=\varnothing}}\times$$

$$\times\sum_{\substack{X\in\bar{R}(H,F)\\ X\cup Y_R=H}}(-1)^{t+1}\,r(X)=-\sum_{\substack{X\in\bar{R}(H,F)\\ X\cup Y_L=H}}r(X)\sum_{\substack{L\\ \bar{R}(Y_L,F)=\varnothing}}(-1)^{t+1}=$$

$$=-\sum_{\substack{X\in\bar{R}(H,F)\\ X\cup Y=H}}r(X)\sum_{\substack{Y\in\bar{R}(H,F)\\ \bar{R}(Y,F)=\varnothing}}r(Y)=\bar{R}(H,F)\otimes R(H,F).$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Необходимость. Предположим, что теорема справедлива для графов из $R(G)$ с большим, чем у H, числом дуг. Если $H=G$, то все доказано. Пусть $H\subset G$. Тогда в G имеется минимальный подграф A, не принадлежащий H. Из утверждения 3 следует, что A может быть построен некоторой процедурой $\mathrm{Proc}(t,\ \{s\})$. Последнее делает очевидным тот факт, что в H найдется вершина v, такая, что $X=D_G{}^+(v)\setminus D_H{}^+(v)=\phi$. Обозначим Y – минимальный набор вершины v в G, имеющий наименьшее (по мощности) пересечение с X.

В графе G процедурой $\mathrm{Proc}(v,\ VH\setminus\{v\})$ построим подграф T. При этом внесем только одну модификацию в эту процедуру: в вершине v вместо минимального набора берется множество $K=X\cap Y$. Обозначим $E=H\cup T$. В графе E множество K обладает свойствами свободного набора, кроме, быть может, свойства минимальности. Предположим существование множества K, $\phi\subset K'\subset K$, индуцирующего из вершинной функции графа E функцию без фиктивных переменных. Тогда должен существовать минимальный набор Z, такой, что $Z\cap X=K\setminus K'$. Последнее противоречит выбору Y. Таким образом, K – свободный набор в E. Далее, все вершины графа E, не принадлежащие H, по построению являются насыщенными в E. Кроме того, для каждой граничной вершины $w\in VH\setminus\{v\}$ $D^-(w)\cap DT\neq\phi$. Теперь видно, что если в E провести редукцию с начальным набором K, получим граф H (опорные вершины совпадают с граничными). Это доказывает, что T – простой подграф в E. Дальше предположение индукции.

Для доказательства достаточности понадобится следующая:

Лемма 1. Пусть H является $(s,\ t)$-графом. Тогда H является правильным, если и только если $D_H{}^+(w)\neq\phi$ для каждой вершины $w\neq t$ и вершинные функции g_v в H не имеют фиктивных переменных для каждой вершины.

Доказательство леммы. Необходимость очевидна. Достаточность. Предположим, что имеются дуги в H, не принадлежащие минимальным подграфам. Среди них выберем дугу $e=(v,\ u)$ с максимально возможным значением $\mathrm{rang}(v)$. Тогда при $u\neq t$ дуги из $D_H{}^+(u)$ принадлежат минимальным подграфам. Поэтому процедуру $\mathrm{Proc}(t,\ \{s\})$ можно провести так, что обязательно будет пройдена вершина u, причем при ее прохождении будет выбираться минимальный набор $M(u)$, содержащий e (g_u не имеет фиктивных переменных). В силу утверждения 3 дуга e принадлежит минимальному подграфу. Противоречие. Лемма доказана.

Из леммы 1 и определения редукции следует, что граф $H-DF$ принадлежит $R(G)$, если $H\in R(G)$ и F-простой граф в H, т. е. свойство «быть правильным подграфом» инвариантно относительно редукции. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Предварительно докажем две леммы.

Лемма 2. Пусть K индуцирует из g_v функцию h_v, N – свободный набор g_v, $K\cap N=\phi$, функции g_v и h_v без фиктивных переменных и отличны от тождественно равных 0 или 1. Тогда для любого свободного набора P функции h_v истинна импликация:

$$(P\cap N\neq\phi)\Rightarrow(N\subseteq P).$$

Доказательство леммы 2. В силу утверждения 1 для любого минимального набора Y функции h_v либо $Y \cap P = \phi$, либо $P \subseteq Y$. То же верно для Y и N. Поэтому, если $P \cap N \neq \phi$ и $P \subseteq Y$, то $N \subseteq Y$. Отсюда следует, что P индуцирует из h_v функцию с фиктивными переменными из множества $N \setminus P$. Следовательно, $N \setminus P = \phi$. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $H \in R(G)$, F и L – простые подграфы в H и G соответственно. Тогда если $DF \cap DL \neq \phi$, то $DL \subseteq DF$.

Доказательство леммы 3. В силу теоремы 2 H можно получить из G последовательными редукциями. Пусть $H_1 = G, \dots, H_s = H$ – получаемые при этом правильные подграфы, $F_1, \dots, F_s$ $(F_s = F)$ – соответствующие им простые подграфы. Выберем наименьший такой индекс i, что $DF_i \cap DL \neq \phi$. Такое i существует, ибо $DF_s \cap DL \neq \phi$. Среди дуг из $DF_i \cap DL$ выберем дугу $g = (u, v)$ с максимально возможным значением $\mathrm{rang}(v)$. Обозначим через w вершину, в которую входят дуги начального набора N редукции, строящей простой подграф L в G. Предположим, что $w \neq v$. Тогда по определению редукции v – насыщенная в G и, следовательно, в H_i. Отсюда $D^-_{H_i}(v) \subseteq$ $\subseteq DF_i$, $D_G^-(v) \subseteq DL$ (так как v не является опорной ни в F_i, ни L), что противоречит выбору g. Таким образом, $v = w$.

Пусть P – начальный набор для F_i в H_i. Так как $g \in P \cap N$, то по лемме 2 $N \subseteq P$. Из определения редукции теперь следует, что $DL \subseteq DF_i$. Последнее возможно только при $i = s$. Лемма доказана.

Рассмотрим некоторый шаг алгоритма A. Предположим, что на этом шаге осуществляется «возвращение» назад из M в $H = \mathrm{pre}(M)$. Сделаем индуктивное предположение, что для каждого графа E, из которого уже было осуществлено «возвращение» назад на предыдущих шагах, алгоритмом уже построены все подграфы $T \subseteq E$ из $R(G)$ (база индукции имеется, так как первое «возвращение» алгоритм осуществляет из минимального подграфа). Среди непостроенных еще алгоритмом правильных подграфов графа M выберем подграф T с наибольшим числом дуг. Тогда в силу теоремы 2 $T = M - DF$, где F – простой подграф в M. Поскольку должно нарушаться условие (4) алгоритма, то $DF \cap N(G_i) \neq \phi$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant s$ (см. обозначения в алгоритме А), т. е. $DL \cap DF \neq \phi$ для некоторого простого подграфа L в G_i. По лемме 3 $DL \subseteq DF$, откуда $T = M - DF \subseteq G_i - DL = E$. Но граф E уже был построен алгоритмом и из него уже было осуществлено «возвращение» назад. Последнее противоречит индуктивному предположению.

Осталось показать, что графы из $R(G)$ генерируются алгоритмом A без дублирования. Пусть на некотором шаге генерируется граф M, который совпадает с ранее полученным графом E. Тогда для некоторого j $G_j = \mathrm{pre}^k(E)$. Пусть $\mathrm{pre}^{k-1}(E) = G_j - DL$, где L – простой подграф в G_j $(DL \subseteq N(G_j))$. Условие (4) гарантирует, что $DL \subseteq DM$. Но $DL \cap DF = \phi$. Противоречие. Теорема доказана.

Автор искренне благодарен рецензенту, сделавшему ряд ценных замечаний по первоначальному варианту рукописи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Байхельт Ф., Франкен П.* Надежность и техническое обслуживание: математический подход. М.: Радио и связь, 1988.
2. *Барлоу Р., Прошан Ф.* Статистическая теория надежности и испытания на безотказность. М.: Наука, 1985.
3. *Райншке К., Ушаков И. А.* Оценка надежности систем с использованием графов. М.: Радио и связь, 1988.
4. *Рябинин И. А., Черкесов Г. Н.* Логико-вероятностные методы исследования надежности структурно сложных систем. М.: Радио и связь, 1981.
5. *Ушаков И. А., Гадасин В. А.* Анализ надежности структурно-сложных систем. М.: Знание, 1979.
6. *Ball M. O.* Computational complexity of network reliability analysis: a survey // IEEE Trans. Reliab. 1986. V. 35. № 3. P. 230–239.
7. *Hwang C. L., Tillman F. A., Lee M. H.* System reliability evaluation techniques for complex systems – a survey // IEEE Trans Reliab. 1981. V. R-30. № 5. P. 416–423.
8. *Provan J. S., Ball M. O.* The complexity of countig cuts and of computing the probability that a graph is connected // SIAM J. Comput. 1983. V. 12. № 4. P. 777–788.
9. *Valiant L. G.* The complexity of enumeration and reliability problems // SIAM J. Comput. 1979. V. 8. № 2. P. 410–421.
10. *Велигурский Г. А.* Аппаратурно-программные методы анализа надежности структурно-сложных систем. Минск: Наука и техника, 1986.

11. *Satyanarana A., Prabhakar A.* New topological formula and rapid algorithm for reliability analysis of complex networks // IEEE Trans. Reliab. 1978. V. R-27. № 2. P. 82–100.
12. *Satyanarayana A., Hagstrom J. N.* A new algorithm for the reability analysis of multi-terminal networks // IEEE Trans. Reliab. 1981. V. R-30. № 4. P. 325–334.
13. *Satyanarayama A.* A unified formula for analysis of some network reliability problems // IEEE Trans. Reliab. 1982. V. R-31. № 1. P. 23–33.
14. *Satyanarayuna A., Haystrom J. N.* Combinaturial properties of directed graphs useful in computing network reliability // Networks. 1981. V. 11. № 3. P. 357–366.
15. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.
16. *Рейнольд Э., Нивергельт Ю., Део Н.* Комбинаторные алгоритмы: теория и практика. М.: Мир, 1980.

Поступила в редакцию 12.01.90