***А.А. Черняк**, д.ф-м.н., профессор кафедры математики Белорусского государственного педагогического университета им. Максима Танка,*
***А.В. Кутырева**, студентка физического факультета Белорусского государственного педагогического университета им. Максима Танка*

Решение уравнений и неравенств в Mathcad. Часть 2

3. Решение уравнений в символьном виде

Одно из мощнейших средств Mathcad – это *символьный* процессор, позволяющий получать результаты вычислений в символьном виде (аналитически). Возможны два способа таких вычислений: с помощью команд меню **Symbolics** (Символика); с помощью кнопок подпанели **Symbolic** (Символьный) (рис. 2) и оператор символьного вывода →, который вводится комбинацией клавиш **Ctrl+.** или кнопкой → подпанели **Symbolic**. Наличие меню **Symbolics** – скорее дань традициям устаревших версий Mathcad, в которых доступ к символьным вычислениям осуществлялся только первым способом. Его использование хотя и имеет свои особенности, но крайне неудобно, поскольку в этом случае символьный процессор «не видит» и не учитывает ничего на рабочем листе, кроме того выражения, которое охвачено синим курсором ввода. Поэтому дальше мы будем применять только второй способ символьных вычислений.

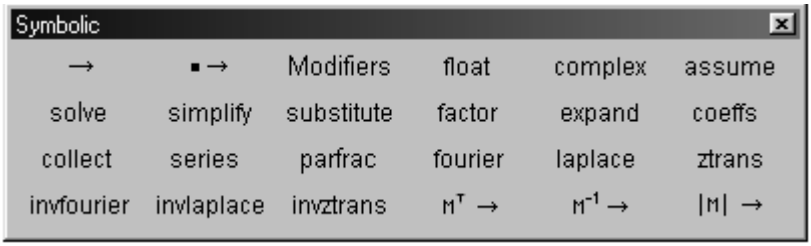

Рис. 2

Продолжение. Начало в номере 3'2007.

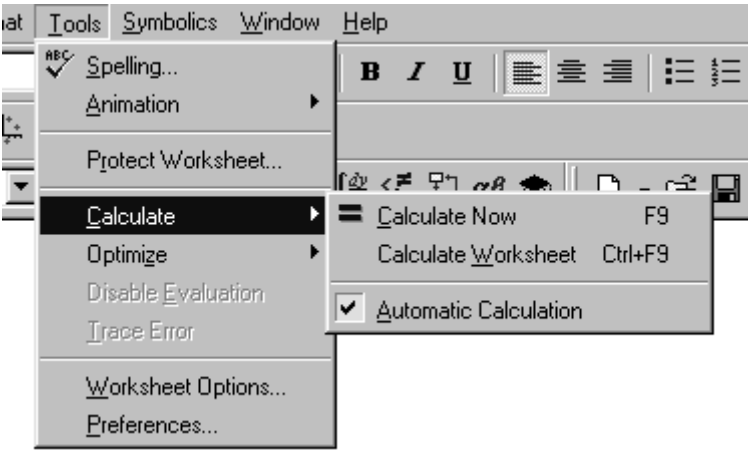

Рис. 3

Но вначале познакомимся с режимами вычислений в Mathcad. Эти режимы задаются в меню, вызываемом командой **Tools→Calculate** (Инструменты→Вычислить) (рис. 3).

В автоматическом режиме результаты всех вычислений, а также графики, обновляются каждый раз, когда изменения вносятся в формульные блоки. О том, что включен именно этот режим, свидетельствует флажок слева от команды **Automatic Calculation** (Автоматический режим вычислений). При отключении автоматического режима вы должны самостоятельно инициировать обновление вычислений. Команда **Calculate Worksheet** (Вычислить рабочий лист) или комбинация клавиш **Ctrl+F9** позволяют это делать каждый раз для всего Mathcad-документа. Команда **=Calculate Now** (Вычислить сейчас) или клавиша **F9** производят перерасчет только до видимого участка (включительно) рабочего листа. Слишком затянувшиеся вычисления можно прервать нажатием клавиши **Esc** и возобновить затем командой **Tools→Calculate→=Calculate Now**. В случае символьных вычислений до завершения редактирования вводимых выражений рекомендуется отключать команду **Tools→Calculate→Automatic Calculation**, поскольку при некорректном вводе возможны зацикливания выполняемых алгоритмов.

Итак, перейдем к аналитическому решению уравнений. Отметим, что если бы система

$$\begin{cases} 4x^4 + y^2 = 4 \\ x^3 - 3xy - 5y^3 = 0.5 \end{cases}$$

решалась в Excel инструментом **Поиск решения**, то предварительно пришлось бы свести ее к равносильному уравнению и произвести затем локализацию корней. При этом не было бы никакой гарантии, что найденные после табулирования «подозрительные» промежутки содержат искомые корни. Решим эту систему в Mathcad аналитически с помощью встроенной функции **find**. Положим системную переменную **ORIGIN** равной 1, введем ключевое слово **Given** и уравнения системы: $ORIGIN:=1$ $4x^4+y^2=4$ $x^3-3xy-5y^3=0.5$. Затем введем выражение $A:=find(x,y)$. Комбинацией клавиш **Ctrl+.** введем оператор символьного вывода →. После нажатия клавиши **Enter** справа от знака → появятся все решения данной системы (включая и комплексные), которые содержатся в матрице A, состоящей из двух строк и n столбцов, каждый из которых содержит по одной паре решений (x_k, y_k).

Отметим, что последние версии Mathcad не допускают совместного использования операторов присваивания := и символьного вывода →, как это было сделано выше. Поэтому в качестве альтернативы можно скопировать в буфер результат символьного вычисления и затем вставить его в выражение A:= справа от оператора присваивания.

Число столбцов матрицы A можно подсчитать с помощью встроенной функции **cols**: введем выражение cols(A)=, после нажатия клавиши **Enter** получим cols(A)=12 (кстати, число строк матриц определяет функция **rows**). Поскольку комплексные корни нас не интересуют, извлечем действительные числа из матрицы A следующим образом. Введем ранжированную переменную $k:=1..cols(A)$, перебирающую номера столбцов матрицы A, затем введем выражения:

$$x_k := \mathbf{if}\left(\mathrm{Im}\left(A_{1,k}\right) = 0, A_{1,k}, \text{"комплексное "}\right)$$
$$y_k := \mathbf{if}\left(\mathrm{Im}\left(A_{2,k}\right) = 0, A_{2,k}, \text{"комплексное "}\right).$$

Здесь условие (логическое выражение) $Im(A_{i,j})=0$ проверяет, является ли число $A_{1,k}$ на позиции (1,k) матрицы A действительным. Дело в том, что встроенная функция **Im(z)** определяет так называемую мнимую часть числа z. И если мнимая часть равна нулю, то число z – действительное. Поэтому в случае $Im(A_{1,k})=0$ переменной x_k присваивается действительное решение $A_{1,k}$ (оно соответствует неизвестной x). В противном случае переменной x_k присваивается строковая константа "комплексное", которая вводится после нажатия клавиши ". Аналогично, в случае $Im(A_{2,k})=0$ переменной y_k присваивается действительное решение $A_{2,k}$ (оно соответствует неизвестной y), в противном случае – строковая константа "комплексное". Теперь, после ввода выражений x= и y=, можно получить наглядный список всех искомых решений (рис. 4).

Следующая задача показывает, что аналитически в Mathcad можно решать *системы уравнений с параметрами*. Два спортсмена бегают по одной замкнутой дорожке стадиона. Скорость каждого постоянна, но на пробег всей дорожки первый тратит на a секунд меньше, чем второй. Если они начинают пробег с общего старта и в одном направлении, то сходятся через каждые b секунд. Требуется узнать, через какое время они встретятся, если побегут в противоположных направлениях по той же дорожке с прежними скоростями? Пусть x и y – скорости спортсменов, z – длина беговой

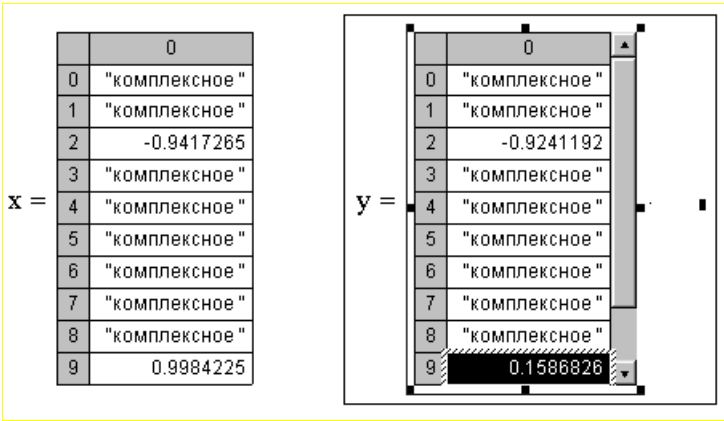

Рис. 4

дорожки. Тогда согласно условиям задачи $\frac{z}{y}-\frac{z}{x}=a$, $\frac{z}{x-y}=b$. Кроме того, $t=\frac{z}{x+y}$ – искомое время, через которое спортсмены встретятся, если побегут в противоположных направлениях. Следующий фрагмент рабочего листа Mathcad-документа решает эту задачу:

$$\text{ORIGIN} := 1 \qquad \text{Given}$$

$$\frac{z}{y}-\frac{z}{x}=a \qquad \frac{z}{x-y}=b \qquad t=\frac{z}{x+y}$$

$$\left(\text{Find}(t,x,y,z)^{T}\right)^{\langle 1\rangle} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{4\cdot b+a}\cdot[(4\cdot b+a)\cdot a]^{\frac{1}{2}}\cdot b \\ \frac{-1}{4\cdot b+a}\cdot[(4\cdot b+a)\cdot a]^{\frac{1}{2}}\cdot b \end{bmatrix}$$

Поскольку нас интересует лишь переменная t, то выводим только первую строку матрицы результатов Find(t,x,y,z), содержащую все найденные значения t. Это достигается тем, что сначала матрица результатов транспонируется: $\text{Find}(t,x,y,z)^{T}$; затем из транспонированной матрицы извлекается первый столбец:

$$\left(\text{Find}(t,x,y,z)^{T}\right)^{\langle 1\rangle}.$$

Заметим, что второе полученное значение t, будучи отрицательным, не подходит по смыслу задачи.

Теперь задействуем основные кнопки подпанели **Symbolic** для решения одной геометрической задачи в прямоугольной системе координат. Пусть дано уравнение прямой $y=kx+c$ и уравнение окружности $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ с центром в точке (a;b) и радиусом r. Требуется найти условие касания окружности и прямой. Вначале аналитически

найдем абсциссы точек пересечения прямой и окружности. Для этого необходимо исключить из уравнения окружности неизвестную y и решить затем его относительно x, максимально упростив при том результат решения. Осуществим все это с помощью кнопок подпанели **Symbolic**, применив их к одному выражению. Щелчком на кнопке substitute вызовем шаблон ▪ substitute , ▪ = ▪ → .

На месте левой метки введем уравнение окружности, а на месте правых меток – соотношение y=kx+c, означающее, что вместо y в уравнение $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ будет подставлено выражение kx+c; затем щелчком на кнопке solve вызовем шаблон для символьного решения уравнений:

$$(y-b)^2+(x-a)^2=r^2 \quad \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, y=k\cdot x+c \\ \text{solve}, \blacksquare \end{array} \right. \rightarrow .$$

На месте метки введем имя переменной, относительно которой данное уравнение должно быть решено (в нашем случае – это x). С помощью клавиши **Пробел** охватим правым синим уголком выражение solve, x и щелкнем по кнопке simplify, которая используется для упрощения выражений. После нажатия клавиши **Enter** получим абсциссы двух точек пересечения:

$$(y-b)^2+(x-a)^2=r^2 \quad \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, y=k\cdot x+c \\ \text{solve}, x \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{k\cdot b+a-k\cdot c+\left(2\cdot k\cdot b\cdot a-2\cdot a\cdot k\cdot c-k^2\cdot a^2+k^2\cdot r^2+2\cdot c\cdot b-b^2-c^2+r^2\right)^{\frac{1}{2}}}{k^2+1} \\ \dfrac{k\cdot b+a-k\cdot c-\left(2\cdot k\cdot b\cdot a-2\cdot a\cdot k\cdot c-k^2\cdot a^2+k^2\cdot r^2+2\cdot c\cdot b-b^2-c^2+r^2\right)^{\frac{1}{2}}}{k^2+1} \end{bmatrix}$$

В случае касания должна быть одна точка пересечения прямой и окружности, что равносильно равенству нулю дискриминанта только что решенного квадратного уравнения. Этот дискриминант, как мы можем видеть, содержится в скобках полученного выше результата. Копируем дискриминант в буфер. Кнопкой solve вызываем шаблон ▪ solve , ▪ → и на месте левой метки вставляем из буфера дискриминант, охватываем его правым синим уголком и комбинацией клавиш **Ctrl+**= вводим знак = и затем число 0. На месте правой метки вводим неизвестное r, относительно которого уравнение должно быть решено. После нажатия клавиши **Enter** получим

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\left(k^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot(-b+c+k\cdot a) \\ \dfrac{-1}{\left(k^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot(-b+c+k\cdot a) \end{bmatrix}.$$

Итак, условие касания прямой и окружности определяется равенством $r=\dfrac{ka+c-b}{\sqrt{1+k^2}}$ или $r^2(1+k^2)=(ka+c-b)^2$.

Данное условие можно применять для решения нескольких типов геометрических задач. Например, найдем уравнение прямой, проходящей через заданную точку (5;6) и касающейся окружности радиусом 3 с центром в точке (6;3). Введем выражение $r^2\cdot(1+k^2)=(k\cdot a+c-b)^2$, затем щелчком на кнопке **substitute** вызовем соответствующий шаблон и на месте меток введем выражение r=3, затем через запятую равенства a=1, b=3, c=6-5k (так как точка (5;6) лежит на прямой y=kx+c, то 6=5k+c). Щелчком на кнопке **solve** вызовем соответствующий шаблон и на месте метки введем имя переменной k. После нажатия клавиши **Enter** получим

$$r^2\cdot\left(k^2+1\right)=(-b+c+a\cdot k)^2 \quad \left|\begin{array}{l}\text{substitute}, r=3, a=6, b=3, c=6-5k\\ \text{solve}, k\end{array}\right. \rightarrow \begin{pmatrix}0\\ \frac{3}{4}\end{pmatrix}$$

Итак, имеем две касательные y=6 и $y=\frac{3}{4}x+\frac{9}{4}$, проходящие через точку (5;6). А теперь найдем радиус окружности с центром (6;3), касающуюся прямой $y=-\frac{3}{4}x+\frac{15}{4}$:

$$r^2\cdot\left(k^2+1\right)=(-b+c+a\cdot k)^2 \quad \left|\begin{array}{l}\text{substitute}, k=\frac{-3}{4}, a=6, b=3, c=\frac{15}{4}\\ \text{solve}, r\end{array}\right. \rightarrow \begin{pmatrix}3\\ -3\end{pmatrix}.$$

Радиус найден: он равен 3.

Символьный процессор Mathcad позволяет находить *корни уравнения, содержащего изменяемый параметр*. Рассмотрим задачу определения степени наполнения нефтяного резервуара, имеющего вид лежащего цилиндра. Площадь поперечного сечения части резервуара, заполненной нефтью, имеет форму сегмента высотой h круга радиусом R. При умножении площади сегмента на длину цилиндра получается объем нефти в резервуаре. Для каждого i=1, 2,..., 9 требуется найти значения уровней h_i, при которых объем нефти составит $\frac{i}{10}$-ю часть объема резервуара. Сразу заметим, что достаточно найти значения h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, так как остальные значения определяются из соотношений $h_{10-i}=2R-h_i$, i=1, 2, 3, 4, 5. Очевидно, площадь сегмента $S_{сег}$ равна разности площади кругового сектора радиусом R, ограниченного центральным углом α радиан, и площади равнобедренного треугольника с длинами боковых сторон R и углом α между ними: $S_{сег}=\frac{1}{2}\alpha R^2-\frac{1}{2}R^2\sin\alpha$. Поэтому для каждого i=1, 2, 3,

4, 5 необходимо решить уравнение $\frac{1}{2}\alpha R^2 - \frac{1}{2}R^2 \sin\alpha = \frac{i}{10}\pi R^2$ и затем вычислить значение $h_i = R - R\cos\frac{\alpha}{2}$. Решим эту задачу в Mathcad. Определим функцию $f(\alpha, i) = \frac{1}{2}\alpha R^2 - \frac{1}{2}R^2 \sin\alpha - \frac{\pi R^2 i}{10}$, зависящую от α и i и, используя ранжированную переменную i, с помощью кнопки solve решим для каждого i уравнение $f(\alpha, i) = 0$:

$$f(\alpha, i) := \frac{1}{2}\alpha \cdot R^2 - \frac{R^2 \cdot \sin(\alpha)}{2} - \frac{\pi \cdot R^2 \cdot i}{10} \qquad i := 1..5$$

$$\beta_i := f(\alpha, i) = 0 \text{ solve}, \alpha \rightarrow 3.1415926535897932385 \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1.626753 \\ 2.113139 \\ 2.490785 \\ 2.824797 \\ 3.141593 \end{pmatrix}$$

Здесь после знака $\rightarrow$ выведен только корень последнего уравнения $f(\alpha, 5) = 0$; все найденные корни являются координатами столбца β.

Остается вычислить h_i, i=1, 2,..., 9, при некотором заданном значении радиуса, например, R=1:

$$i := 1..5 \qquad R := 1 \qquad h_i := R \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{\beta_i}{2}\right)\right) \qquad h_{10-i} := 2 - h_i.$$

Осуществим вывод результатов, хранящихся в столбце h, в максимально наглядном виде. Для этого прибегнем к помощи:

- встроенной функции **num2str** для преобразования чисел h_i и i в строковые константы;
- встроенной функции **concat** для соединения строковых констант в предложения;
- встроенной функции **substr(num2str(h_i),0,5)**, позволяющей ограничить вывод только первых пяти символов строковой константы **num2str(h_i)**.

В результате получим:

$$i := 1..9 \qquad h_i := \mathrm{substr}\left(\mathrm{num2str}\left(h_i\right), 0, 5\right)$$

$$h_i := \mathrm{concat}\left(\text{" уровень "}, h_i, \text{": заполнено "}, \mathrm{num2str}\left(\frac{i}{10}\right), \text{" резервуара"}\right)$$

$$h = \begin{pmatrix} \text{" уровень 0.312: заполнено 0.1 резервуара"} \\ \text{" уровень 0.508: заполнено 0.2 резервуара"} \\ \text{" уровень 0.680: заполнено 0.3 резервуара"} \\ \text{" уровень 0.842: заполнено 0.4 резервуара"} \\ \text{" уровень 1: заполнено 0.5 резервуара"} \\ \text{" уровень 1.157: заполнено 0.6 резервуара"} \\ \text{" уровень 1.319: заполнено 0.7 резервуара"} \\ \text{" уровень 1.491: заполнено 0.8 резервуара"} \\ \text{" уровень 1.687: заполнено 0.9 резервуара"} \end{pmatrix}$$

Продолжение статьи читайте в следующем номере.