***А.А. Черняк**, д.ф-м.н., профессор кафедры математики Белорусского государственного педагогического университета им. Максима Танка*

Решение уравнений и неравенств в Mathcad. Часть 1

С этого учебного года вступает в силу новый образовательный стандарт по информатике для средней школы по теме «Вычислительные методы и технологии». В рамках этой темы учащиеся должны научиться использовать систему компьютерной математики Mathcad для решения уравнений, систем уравнений, неравенств.

В данной статье, состоящей из трех частей, впервые делается попытка доступного и систематического изложения упомянутых разделов новой школьной программы. При этом акцент делается на решении нетривиальных, комбинированных и содержательных задач из алгебры, геометрии и математических приложений с тем, чтобы помочь учителю за несколько уроков и на достаточно глубоком уровне освоить инструментарий Mathcad, предназначенный для решения уравнений, систем уравнений и неравенств. Предполагается, что учащиеся уже знакомы с приемами редактирования формульных блоков и простейших графиков, основными типами переменных и функций Mathcad.

Структура статьи:

1. Решение уравнений и систем уравнений. 2. Решение задач оптимизации. 3. Решение уравнений в символьном виде. 4. Решение неравенств в символьном виде. 5. Решение уравнений и неравенств с помощью графиков. 6. Задачи для самостоятельного решения.

1. Решение уравнений и систем уравнений

Будучи пакетом компьютерной математики, Mathcad обладает более мощными средствами для решения уравнений, чем Excel. Рассмотрим уравнение x^3-4x-1=0, которое в Excel можно решить с помощью инструментов **Подбор парамет-**

ра и **Поиск решения**. Mathcad имеет встроенную функцию **polyroots(v)**, «специализирующуюся» на решении таких уравнений f(x)=0, в которых f(x) является *многочленом*. Все, что нужно для получения всех корней этого уравнения (причем не только действительных), – это столбец v коэффициентов одночленов из f(x). На рабочем листе Mathcad-документа введем выражение v:=. Затем комбинацией клавиш **Ctrl+M** вызовем диалоговое окно **Insert Matrix**. В поле **Rows** введем 4 – число коэффициентов многочлена f(x), а в поле **Columns** – число 1. После щелчка на кнопке **OK** справа от знака присваивания появится шаблон с метками для ввода коэффициентов -1, -4, 0, 1. Если теперь ввести выражение polyroots(v)=, то после нажатия клавиши **Enter** получим приближенные значения искомых корней:

$$\mathbf{polyroots(v)} = \begin{pmatrix} -1.861 \\ -0.254 \\ 2.115 \end{pmatrix}.$$

Итак, здесь нам не пришлось локализовывать корни или искать их «по одному», как это обычно делается в Excel.

Теперь убедимся, что Mathcad не уступает Excel и в вопросах решения систем уравнений (на самом деле, значительно превосходит, что мы увидим позднее). Встроенная функция **find**($\mathbf{x_1,x_2,\ldots,x_n}$) служит для решения систем уравнений и неравенств с n неизвестными x_1, x_2, ..., x_n. Перед использованием этой функции, как и в Excel, необходимо задать начальные приближения – стартовые значения неизвестных. При этом функция **find** должна завершать блок решения, начинающийся ключевым словом **Given**: внутри блока должны располагаться уравнения и неравенства решаемой системы. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} xy - yz - 2x - z = 0 \\ xz - z^2 + 3x - 3y = 0 \\ x^2 - xz + 4y + 2z = 0 \end{cases}.$$

При начальных приближениях (1, 1, -1) на рабочем листе Mathcad-документа получим:

$x := 1 \qquad y := 1 \qquad z := -1$

Given

$x \cdot y - y \cdot z - 2x - z = 0 \qquad x \cdot z - z^2 + 3x - 3y = 0 \qquad x^2 - x \cdot z + 4y + 2z = 0$

$$\mathrm{find}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \\ -0.6 \end{pmatrix}$$

При начальных приближениях (-5, -5, 5) аналогично получается второе решение системы: (-0,1818, -0,4545, 0,8181). Такие же результаты можно получить и с помощью инструмента **Поиск решения** и в Excel. Но теперь постараемся превзойти Excel, включив в предыдущую систему параметры a, b, c: xy-yz-2x-z=a, xz-z^2+3x-b·y=0, x^2-c·xz+4y+2z=0. Зададимся целью в один прием найти все решения этой системы при a=-1, b=2, 3 и c=1, 2, 3. Оформим рабочий лист Mathcad-документа так:

$x := 1 \qquad y := 1 \qquad z := -1$

Given

$x \cdot y - y \cdot z - 2x - z = a \qquad x \cdot z - z^2 + 3x - b\,y = 0 \qquad x^2 - c \cdot x \cdot z + 4y + 2z = 0$

$\mathrm{resh}(a, b, c) := \mathrm{find}(x, y, z) \qquad a := -1 \qquad b := 2..3 \qquad c := 1..3$

Здесь в конце блока решений функция **find(x,y,z)** переопределена как функция **resh(a,b,c)**, зависящая от параметров a, b, c, и затем заданы нужные значения этих параметров, причем b и c – ранжированного типа. Введем теперь выражение resh(a,b,c)=. После нажатия клавиши **Enter** получим следующий «закрытый» результат:

resh(a,b,c)
[3,1]
[3,1]
[3,1]
[3,1]
[3,1]
[3,1]

.

Дело в том, что Mathcad использует так называемые *вложенные матрицы*, т.е. матрицы, элементами которых являются другие матрицы. В данном случае шесть наборов решений «вложены» в один столбец, каждый элемент которого лишь указывает размеры вложенных матриц, имеющих по 3 строки и 1 столбцу. «Раскроем» результат. Предварительно позаботимся о том, чтобы он расположился горизонтально на рабочем листе (т.е. транспонируем матрицы): охватим правым уголком выражение resh(a,b,c) и с помощью кнопки M^T подпанели **Matrix** введем знак транспонирования T: resh(a,b,c)^T. После нажатия клавиши **Enter** дважды щелкнем в пределах таблицы со вложенными матрицами и в раскрывающемся списке **Matrix display style** (Стиль представления матриц) вкладки **Display Options** окна **Result Format** выделим строку **Matrix** (Матричный). Установим флажок **Expand nested arrays** (Раскрыть вложенные матрицы) (рис. 1).

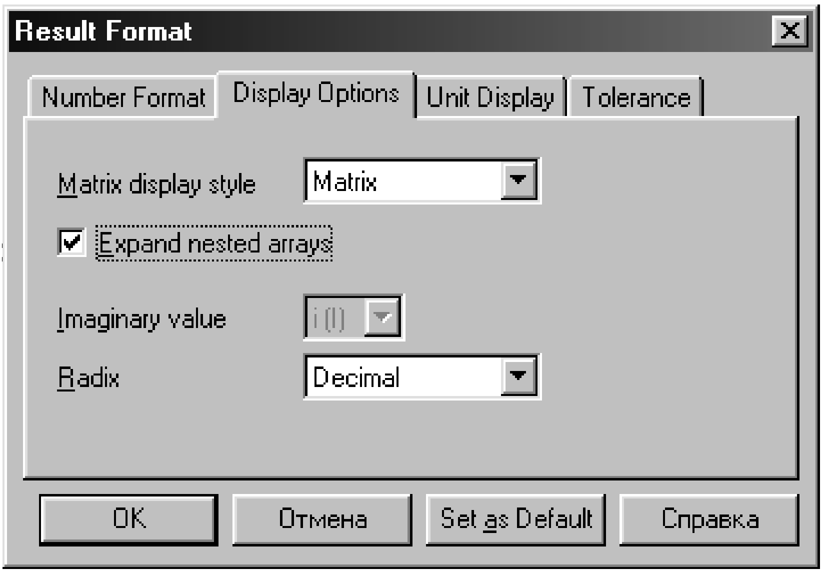

Рис. 1

Щелчок на кнопке **OK** приведет к матрице

$$\operatorname{resh}(a,b,c)^T = \begin{bmatrix} (1.14905 & -0.03503 & -1.38692) \\ (1.15296 & -0.03622 & -1.39833) \\ (0.95953 & -0.20195 & -1.39445) \\ (0.97051 & -0.21392 & -1.46122) \\ (0.14627 & -0.50433 & 1.27846) \\ (0.83315 & -0.36377 & -1.5236) \end{bmatrix},$$

в строках которой содержатся искомые решения системы.

2. Решение задач оптимизации

Рассмотрим следующую задачу оптимизации. Некоторое учреждение приняло решение одеть своих сотрудников в фирменные костюмы размеров S, M, L, XL, обратившись в пошивочные мастерские «Березина», Славянка», «Полесье». Расценки в тыс. руб. стоимости пошива одного костюма в этих мастерских приведены в табл. 1.

Таблица 1

		1	2	3	4
		S	M	L	XL
1	Березина	170,5	208	180,5	222.5
2	Славянка	225	190	170	125
3	Полесье	203,5	156	148	173

Будут заключены контракты на покупку 102 костюмов размера S, 187 костюмов размера M, 53 костюмов размера L, 243 костюмов размера XL. Производственные мощности мастерских позволяют выпускать не более 200 костюмов – фирме «Березина», 155 костюмов – фирме Славянка», 245 костюмов – фирме «Полесье». Перед учреждением стоит задача распределить заказы между мастерскими так, чтобы его суммарная стоимость была минимальной.

Для решения построим математическую модель задачи. Обозначим через x_{ik} число костюмов k-го размера, которые будут заказаны i-й мастерской (порядковые номера мастерских и размеров указаны в таблице 1), а через c_{ik} – стоимость одного костюма k-го размера, пошитого i-й мастерской, a_i – производственная мощность i-й мастерской (a_1=200, a_2=155, a_3=245), через b_k – количество требуемых костюмов k-го размера (b_1=102, b_2=187, b_3=53, b_4=243). Тогда суммарная стоимость заказа будет равна

$$x_{11} \cdot c_{11} + x_{12} \cdot c_{12} + x_{13} \cdot c_{13} + x_{14} \cdot c_{14} + x_{21} \cdot c_{21} + x_{22} \cdot c_{22} + \\ + x_{23} \cdot c_{23} + x_{24} \cdot c_{24} + x_{31} \cdot c_{31} + x_{32} \cdot c_{32} + x_{33} \cdot c_{33} + x_{34} \cdot c_{34} \quad (1)$$

Итак, необходимо найти минимальное значение функции (1) при следующих ограничениях на неизвестные. Прежде всего, неизвестные x_{ik} должны быть целыми неотрицательными числами. Кроме того, они должны удовлетворять неравенствам:

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le a_1$, $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \le a_2$,

$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \le a_3$ – ограничениям на производственные мощности мастерских. Они также должны удовлетворять уравнениям: $x_{11} + x_{21} + x_{31} = b_1$, $x_{12} + x_{22} + x_{32} = b_2$, $x_{13} + x_{23} + x_{33} = b_3$,

$x_{14} + x_{24} + x_{34} = b_4$ – ограничениям на число костюмов различных размеров. Подобные задачи в Mathcad решаются с помощью встроенных функций **maximize(f,x_1,x_2,...,x_n)** и **minimize(f,x_1,x_2,...,x_n)**, определяющих приближенные значения аргументов x_1, x_2, ..., x_n, при которых функция f достигает соответственно наибольшего и наименьшего значений. Эти функции должны завершать блок решения, начинающийся ключевым словом **Given** и содержащего ограничения в виде уравнений и неравенств. Блоку решения должны предшествовать начальные значения неизвестных x_1, x_2, ..., x_n. Решим задачу минимизации функции (1) с помощью функции **minimize**. Введем исходные данные в виде матриц a, b, c, затем зададим начальные значения неизвестных x_{ij} и целевую функцию $f(x) = f(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{34})$:

$\text{ORIGIN} := 1$

$i := 1..3 \quad j := 1..4 \quad x_{i,j} := 0 \qquad c := \begin{pmatrix} 170.5 & 208 & 180.5 & 222.5 \\ 225 & 190 & 170 & 125 \\ 203.5 & 156 & 148 & 173 \end{pmatrix}$

$b := \begin{pmatrix} 102 \\ 187 \\ 53 \\ 243 \end{pmatrix} \qquad a := \begin{pmatrix} 200 \\ 155 \\ 245 \end{pmatrix} \qquad f(x) := \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_{i,j} \cdot x_{i,j}$

Given

(Знак суммирования $\sum_{\blacksquare=\blacksquare}^{\blacksquare} \blacksquare$ вводится кнопкой подпанели **Calculus**.) После ключевого слова **Given** введем ограничения:

$$\sum_{j=1}^{4} x^{\langle j \rangle} \le a \qquad \sum_{i=1}^{3} \left(x^{T}\right)^{\langle i \rangle} = b \qquad x \ge 0$$

Первая сумма является компактной записью в матричном виде неравенств $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le a_1$, $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \le a_2$, $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \le a_3$, вторая – уравнений $x_{11} + x_{21} + x_{31} = b_1$, $x_{12} + x_{22} + x_{32} = b_2$, $x_{13} + x_{23} + x_{33} = b_3$, $x_{14} + x_{24} + x_{34} = b_4$. Завершает решение ввод следующего фрагмента:

$$x := \mathrm{minimize}(f, x) \qquad x = \begin{pmatrix} 102 & 0 & 53 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 155 \\ 0 & 187 & 0 & 58 \end{pmatrix} \qquad f(x) = 92213.5$$.

А теперь скомбинируем наши знания для решения более сложной задачи оптимизации, недоступной для решения средствами Excel. Пусть дана функция f(x)=ln(x)-ax. Требуется найти такое значение параметра a, при котором наибольшее значение функции f(x) равно 2. Определим функцию f(x) как функцию f(x,a) от двух аргументов a и x, зададим начальное значение для x и затем найдем с помощью встроенной функции **maximize** значение x (зависящее от параметра a), при котором f(x) принимает наибольшее значение:

$$f(x, a) := \ln(x) - a \cdot x \qquad x := 1 \qquad x(a) := \mathrm{maximize}(f, x)$$.

Таким образом, f(x(a),a) будет равно наибольшему значению функции f(x) при x=x(a). Теперь обяжем это наибольшее значение быть равным 2 и найдем a, при котором это достигается (не забыв задать начальное приближение для a):

$$a := 10$$

$$\text{Given} \qquad f(x(a), a) = 2 \qquad \mathrm{find}(a) = 0.04979$$.

Рассмотрим пример использования функции **minimize** (аналогичное возможно, конечно же, и для функции **maximize**), не требующий ключевого слова **Given** и оформления в виде блока решения.

Пусть на некоторой местности расположены 8 торговых точек, координаты которых (в прямоугольной системе координат xOy) содержатся в матрице **M** с 2 строками и 8 столбцами, причем в i-м столбце матрицы **M** находятся координаты (абсцисса и ордината) i-й торговой точки. Требуется найти место на плоскости для складирования товара так, чтобы суммарное расстояние от выбранного места до 8 торговых точек было минимальным. Введем координаты торговых точек:

$$\mathrm{ORIGIN} := 1 \qquad \mathrm{M} := \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 & 1 & 1 & 1.2 & 0 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 4.2 & 7 & 0 & 4.5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Поместим абсциссы этих точек в столбец x, а ординаты – в столбец y:

$$\mathbf{x} := \left(\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\right)^{\langle 1 \rangle}, \quad \mathbf{y} := \left(\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\right)^{\langle 2 \rangle}.$$

Теперь зададим начальные значения для координат t_1, t_2 искомой точки $T(t_1;t_2)$ и функцию $f(t)=f(t_1,t_2)$ суммарных расстояний от точки T до заданных восьми точек (вспомним из математики, что расстояние между точками $(t_1;t_2)$ и $(x_i;y_i)$ определяется по формуле $\sqrt{(x_i - t_1)^2 + (y_i - t_2)^2}$):

$$t := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(t) := \sum_{i=1}^{8} \sqrt{(x_i - t_1)^2 + (y_i - t_2)^2} \quad .$$

Определяем координаты склада и суммарное расстояние от склада до 8 торговых точек, пользуясь функцией minimize:

$$\mathbf{t} := \mathbf{minimize}(\mathbf{f}, \mathbf{t}) \qquad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} 2.378 \\ 3.886 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{f}(\mathbf{t}) = 24.697.$$

Продолжение статьи см. в следующем номере.