УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС (УМК) ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ИНЖЕНЕРНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

А.А. Черняк, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики БГПУ им. М.Танка,
Ж.А.Черняк, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики БГУИР,
А.А. Якимович, студент БГПУ им. М.Танка

В последнее время в системе высшего образования СНГ наметилась тенденция перехода от пассивных форм «валового» обучения к индивидуальному дифференцированному подходу в образовании посредством введения различных форм самостоятельной работы, внедрения дистанционного обучения, применения мультимедийных средств. В частности, повышение эффективности обучения высшей математике уже невозможно без использования систем компьютерной математики, освобождающих учебный процесс от трудоемких и неэффективных расчетов, но позволяющих преподавателю сконцентрировать основные усилия на постановке задачи, выборе метода ее решения, интерпретации результатов решения.

Таким образом, образовательный процесс в вузах сориентирован теперь на творчески активное, управляемое самообучение каждого студента, учитывающее его потенциал и уровень базовой подготовки. Такой путь развития высшего образования предполагает соответствующее методическое обеспечение учебного процесса, включая разработку разнообразных форм самостоятельной работы и методов ее контроля.

Нами разработан учебно-методический комплекс по высшей математике для инженерно-экономических специальностей [1], в котором отражены упомянутые выше современные тенденции в обучении высшей математике. В основу УМК заложены инновационные образовательные идеи, реализованные ранее в учебных пособиях [2–4], получивших гриф Министерства образования Республики Беларусь. УМК включает теоретический курс, практикум и большое количество материала для проведения многоступенчатого (обучающего и контролирующего) тестирования теоретических знаний и практических навыков, лабораторный практикум на MathCAD. При этом в отличие от авторов ряда популярных учебников по высшей математике для экономистов, излагающих теорию в «упрощенной» или даже выхолощенной форме, мы придерживаемся лаконичного, но строгого изложения ее классических основ посредством варьирования степени подробности и глубины изучения предмета. Рассмотрим более детально структуру и содержание УМК (рисунок 1).

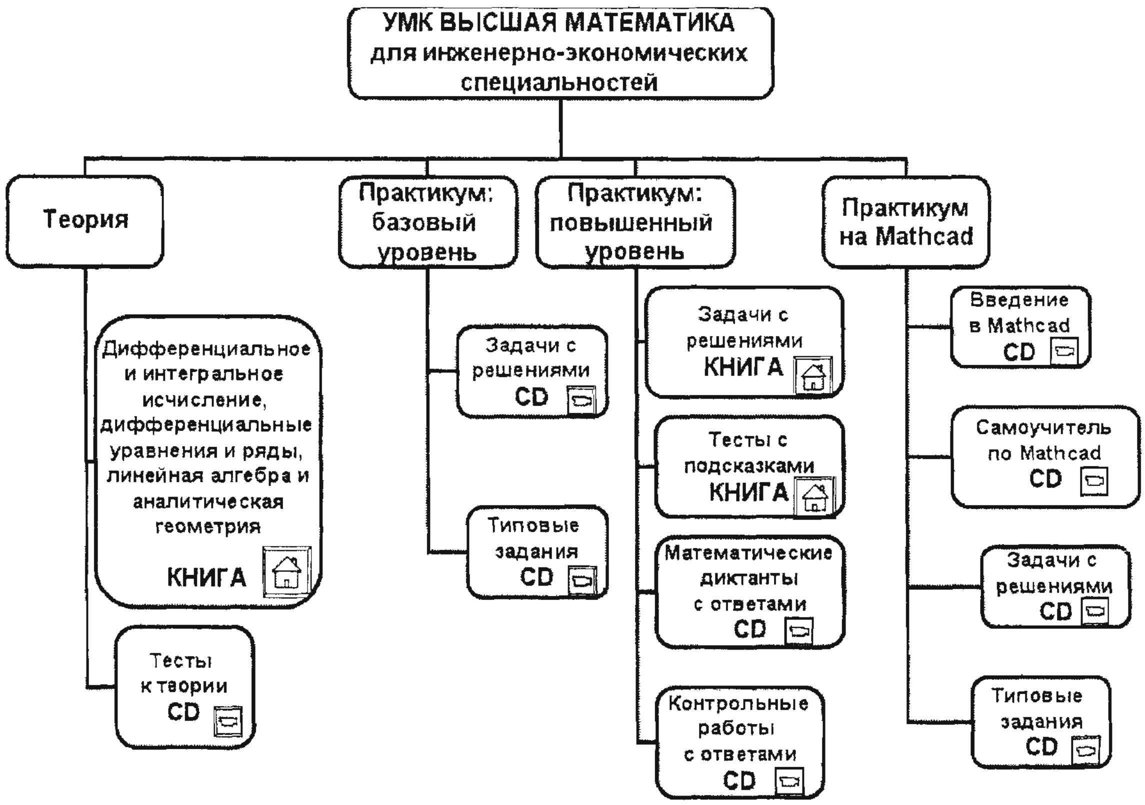

Рисунок 1 – Структура УМК

Теоретический материал каждой главы книги излагается на двух уровнях. Первый уровень содержит основные понятия и формулировки теорем, иллюстрирован примерами и не требует значительных математических усилий при первом чтении. Второй уровень рассчитан на более глубокое постижение теории: строгие доказательства всех утверждений приводятся в конце каждой главы, а дополнительные теоретические факты позволяют глубже ощущать взаимосвязь между основными понятиями и их свойствами. В качестве иллюстрации сказанного приведем одну из глав (нумерация соответствует первоисточнику).

Глава 10 –Теоремы о промежуточных значениях

Вследствие их многочисленных приложений к вопросам исследования функций теоремы Ролля, Лагранжа, Коши, приведенные в этой главе, по праву называются основными теоремами дифференциального исчисления.

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $X\subseteq Af^1$, содержащем точку x_0. Если x_0 – внутренняя точка множества X и $f'(x_0)=0$, то x_0 называется стационарной точкой функции f(x) (на множестве X).

Лемма 10.1. Пусть $f(x)$ определена на промежутке $X\subseteq Af^1$, x_0 – внутренняя точка этого промежутка, в которой функция f дифференцируема. Если x_0 является локально оптимальным планом задачи условной оптимизации

$$f(x) \to \max \text{ (или min)} \qquad (10.1)$$

на промежутке X,

то x_0 – стационарная точка функции $f(x)$.

В основу многих теорем и формул дифференциального исчисления заложена следующая простая, но важная теорема, фактически вытекающая из леммы 10.1:

Теорема 10.1 (Ролля). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$, причем $f(a) = f(b)$. Тогда в этом интервале существует стационарная точка функции $f(x)$.

Поскольку $f'(x_0)$ – это угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$, то теорема 10.1 утверждает: если на концах отрезка значения функции равны, то внутри этого отрезка всегда найдется точка, в которой касательная, проведенная к графику функции $y = f(x)$, будет параллельна оси Ox.

Следующая теорема 10.2 с геометрической точки зрения отвечает на вопрос о том, можно ли к графику функции $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ провести касательную в некоторой точке $(c, f(c))$, $c \in (a; b)$, так, чтобы она была параллельна отрезку, соединяющему концы $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ этой кривой?

Теорема 10.2 (Лагранжа). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$. Тогда в этом интервале существует такая точка c, что

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Очевидно, что теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа, если $f(b) = f(a)$.

Поскольку $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ – это угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $A = (a, f(a))$ и $B = (b, f(b))$, то теорема 10.2 утверждает следующее: внутри отрезка $[a; b]$ найдется точка, в которой касательная, проведенная к графику функции $y = f(x)$, будет параллельна прямой, проходящей через точки A и B (рисунок 10.1). По теореме Лагранжа имеем $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$, $a < c < b$.

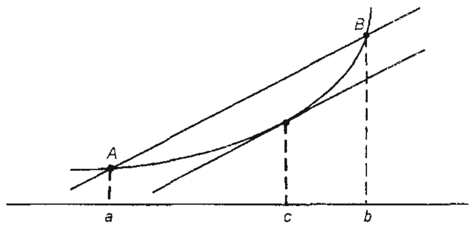

Рисунок 10.1 – Иллюстрация к теореме 10.2

Эта формула называется формулой Лагранжа или формулой конечных приращений. Она выражает тот факт, что приращение функции на интервале равно произведению производной в некоторой промежуточной точке интервала на приращение независимой переменной. Это равенство, дающее точное выражение для приращения функции при любом конечном приращении $\Delta x = b - a$ аргумента x, естественно сопоставить с приближенным равенством

$$f(b) - f(a) \approx f'(a)(b - a) \qquad \text{или}$$

$\Delta f(\alpha, \Delta x) \approx df(\alpha, \Delta x)$, где $\Delta x = b - a$,

вытекающим из определения дифференцируемой функции (глава 7).

Формула конечных приращений обобщается в следующей теореме.

Теорема 10.3 (Коши). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемы на интервале $(a; b)$, причем $g`(x) \neq 0$ в каждой точке x этого интервала. Тогда существует точка c О $(a; b)$ такая, что

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Функция спроса на продукцию монопольной фирмы

Фирма называется монопольной, если объем x производимой ею продукции определяется только спросом покупателей, т. е. $x = D(p)$, где $D(p)$ – функция спроса, p – цена единицы продукции. Другими словами, монопольная фирма выбирает тот объем x^*, при котором прибыль наибольшая. Функцию $D(p)$ считаем дифференцируемой на промежутке $[0; +\infty)$.

Пусть $R(x)$ – выручка от реализации продукции объема x, $C(x)$ – издержки (в денежном выражении), связанные с производством

x единиц продукции. Очевидно, прибыль фирмы есть функция Р(x) = $R(x) - C(x)$.

Поскольку $E_D(p) < 0$, то функция $D(p)$ монотонно убывающая. Следовательно, в силу следствия 4.6 она имеет обратную функцию $p = T(x)$, выражающую зависимость цены единицы продукции от ее объема x. Если к тому же производная функции $D(p)$ всюду отлична от нуля (это условие на практике всегда выполняется), то по теореме 8.3 функция $T(x)$ также дифференцируема. Кроме того, согласно утверждению задачи 8.8, $E_T(x) = E_D^{-1}(p)$. Очевидно, $R(x) = x$ Ч $T(x)$. Поэтому

$$R'(x) = T(x) + x \cdot T'(x) = T(x) \cdot \left(1 + \frac{x \cdot T'(x)}{T(x)}\right) =$$

$$= T(x) \cdot (1 + E_T(x)).$$

Предположим, что функция прибыли $P(x)$ достигает своего наибольшего значения в точке x^* О (0; +Г), $p^* = T(x^*)$. Тогда по лемме 10.1 $\Pi'(x^*) = R'(x^*) - C'(x^*) = 0$, т. е. x^* – точка, в которой предельные издержки совпадают с предельной выручкой. Отсюда

$$T(x^*)(1 + E_T(x^*)) = C'(x^*) \Rightarrow \frac{C'(x^*)}{1 + E_T(x^*)} = p^* \Rightarrow$$

$$p^* = \frac{C'(D(p^*))}{1 + E_D^{-1}(p^*)}. \qquad (10.2)$$

Пример. Пусть издержки монопольной фирмы равны $C(x) = \frac{x^3}{3}$, а функция спроса равна $D(p) = 40 - 2p$. Тогда $E_D(p) = p \cdot \frac{D'(p)}{D(p)} = = \frac{-p}{20 - p}$, $C'(x) = x^2$. Следовательно, уравнение (10.2) принимает вид $p = \frac{(40 - 2p)^2}{1 + \frac{p - 20}{p}}$.

Решим это уравнение: $p = \frac{p(40 - 2p)^2}{2p - 20} \Rightarrow$

$2p^2 - 81p + 810 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p = 22.5 \\ p = 18 \end{array}\right.$. Так как $E_D(p) < 0$, то значение $p = 22{,}5$ отпадает. Поэтому $p^* = 18$, $1 + E_D^{-1}(18) = \frac{8}{9}$, т. е. $p^* = \frac{9}{8} \cdot C'(D(p^*))$.

Итак, цена продукции монопольной фирмы в 1,125 раз выше ее предельных издержек.

Доказательства

Доказательство леммы 10.1.

Предположим для определенности, что x_0 – локально оптимальный план задачи (10.1), решаемой на максимум. Тогда существует окрестность $N(x_0$, e) точки x_0 такая, что $f(x_0)$ і $f(x)$ в каждой точке x этой окрестности. Из существования $f'(x_0)$ следует, что $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ (см. задачу Т7.2). По определению $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Но $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0$, так как $x > x_0$, $f(x)$ J $f(x_0)$.

Поэтому $f'_+(x_0) \le 0$ в силу утверждения задачи Т3.10. Аналогично показывается, что $f'_-(x_0) \ge 0$. В итоге имеем: $0 \le f'_-(x_0) = = f'(x_0) = f'_+(x_0) \le 0$, т. е. $f'(x_0) = 0$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 10.1.

Так как f непрерывна на замкнутом, ограниченном множестве $X = [a; b]$, то в силу теоремы 5.1 она достигает в некоторых точках x_1^* и x_2^* из X своего наибольшего и наименьшего значений (среди всех других ее значений на X). В частности, x_1^* и x_2^* являются локально оптимальными планами задачи (10.1). Если $f(x_1^*) = f(x_2^*)$, то f является константой на X и, следовательно, каждая точка из $(a; b)$ – ее стационарная точка. Если же $f(x_1^*)$ № $f(x_2^*)$, то ввиду $f(a) = f(b)$ по крайней мере одна из точек x_1^*, x_2^* отлична от a и b и потому является внутренней точкой. Остальное следует из леммы 10.1.

Доказательство теоремы 10.2.

Определим вспомогательную функцию $g(x)$: $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. Эта функция непрерывна на $[a; b]$ (теорема 4.1).

дифференцируема на $(a; b)$ (теорема 8.1), $g(a) = g(b) = 0$ и $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Поэтому в силу теоремы 10.1 найдется точка $c \in (a; b)$ такая, что $g'(c) = 0$ или $f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 10.3.

Если $g(a) = g(b)$, то в силу теоремы 10.1 существует такая точка c, что $g'(c) = 0$, а это противоречит условию $g'(c) \neq 0$. Поэтому можно определить вспомогательную функцию

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot \left(g(x) - g(a)\right)$$

Для этой функции выполняются все условия теоремы 10.1, причем $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x)$. В силу этой же теоремы существует точка $c \in (a, b)$, для которой $0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c)$. Теорема доказана.

Дополнительные факты, приведенные в виде задач для самостоятельного решения

Т10.1. Пусть функции $f(x)$ и определены на промежутке X, а уравнения $f(x) = 0$ и имеют соответственно k_0 и k_1 различных действительных корней на этом промежутке. Доказать, что k_0 J $k_1 + 1$.

Т10.2. Пусть функции $f(x)$ и определены на промежутке X, а уравнения $f(x) = 0$ и имеют соответственно k_0 и k_1 различных действительных корней на этом промежутке. Доказать, что k_0 J $k_n + n$.

Т10.3. Пусть $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ +j a_nx^n. Доказать, что уравнение $e^x + P_n(x) = 0$ имеет не более $n + 1$ различных действительных корней.

Т10.4. Пусть $f(x) = x(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5)$. Доказать, что уравнение $f'(x) = 0$ имеет ровно 5 различных действительных корней.

Т10.5. Для каких из следующих функций выполнены условия теоремы Ролля на отрезке $[0, 2]$: а) $x - 1$; б) $(x - 1)^2$; в) $|x - 1|$; г) $\frac{x^2 - 2x}{x + 1}$; д) $\frac{x^2 - 2x}{x - 1}$?

Т10.6. На кривых $y = 4 - 6x^3$, $y = 6x^3 + 7$, $y = -7x^3 - 1$ найти точки, в которых касательные параллельны хордам, соединяющим соответственно точки (-1, 10) и (2, -44), (-1, 1) и (2, 55), (0, -1) и (1, -8).

Т10.7. При выполнении какого из следующих условий теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши: а) $a = b$; б) $g(x) = x^2$, в) $g(x) = x$?

Т10.8. С помощью теоремы Лагранжа доказать неравенства $\frac{b - a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b - a}{a}$, если $0 < a < b$.

Т10.9. С помощью теоремы Лагранжа доказать неравенства $pa^{p-1}(b - a) < b^p - a^p < pb^{p-1}(b - a)$ при условиях $0 < a < b, p > 1$.

Т10.10. Для любых a, b с помощью теоремы Лагранжа доказать неравенства: $|\sin b - \sin a| \le |b - a|$; $|\mathrm{arctg}\ b - \mathrm{arctg}\ a| \le |b - a|$.

Т10.11. Дана функция $f(x) = kx^2 + nx + r$. Показать, что именно в точке $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ касательная к кривой $y = f(x)$ будет параллельна хорде, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

Т10.12. Пусть для функции $f(x)$ выполняются условия теоремы 10.2. Можно ли для каждой точки $c \in (a, b)$ указать две другие точки x_1, x_2 из этого интервала такие, что $x_1 < c < x_2$, $f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$?

Т10.13. Доказать, что если функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[1, 2]$, то существует такая точка $c \in (1, 2)$, что $f(2) - f(1) = \frac{f'(c) \cdot c^2}{2}$.

Т10.14. Обнаружить ошибку в следующем ложном доказательстве теоремы 10.3. Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ на отрезке $[a; b]$ удовлетворяют всем условиям теоремы 10.3. Тогда каждая из них будет удовлетворять и условиям теоремы 10.2. Следовательно, для каждой из этих функций найдется точка $c \in (a, b)$ такая.

что $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$, $\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}=g'(c)$.

Разделив почленно эти равенства, получим:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Т10.15. Доказать, что функция $f(x)$ в каждой точке из Af^1 имеет производную, равную k, если и только если $f(x) = kx + b$.

Ответы, указания, решения (этот раздел здесь опускается для экономии места)

Для проверки начального слоя теоретических знаний и осмысления «тонких» фрагментов теории приводятся (на CD) тесты, сопутствующие содержанию глав. Приведем фрагмент тестов к главе 10.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$, причем $f(a) = f(b)$. Этих условий достаточно, чтобы утверждать, что на интервале $(a; b)$

– существует хотя бы одна стационарная точка функции $f(x)$;

– существует ровно одна стационарная точка функции $f(x)$;

– не существует стационарной точки функции $f(x)$;

– существует не более одной стационарной точки функции $f(x)$.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемы на интервале $(a; b)$, причем $g`(x) \neq 0$ в каждой точке x этого интервала. Тогда существует точка $c \in (a; b)$ такая, что

$+\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$; $+f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$;

$+g'(c)=\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}$; $-\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}$.

Укажите стационарные точки функции $f(x) = \cos x$ на промежутке $X = [0; 3р)$

$+x=\pi$; $-x=0$; $+x=2\pi$; $-x=3\pi$; $-x=\pi/2$; $-x=3\pi/2$; $-x=5\pi/2$.

Укажите стационарные точки функции $f(x) = \ln x$ на промежутке $X = (0; e^3)$

– стационарных точек нет;

$-x=1$; $-x=e$; $-x=e^2$; $-x=e^3$.

Известно, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0; 5]$ и дифференцируема на интервале $(0; 5)$, причем $f(1) = f(2) = f(3) = f(4)$. Этих условий достаточно, чтобы утверждать, что в этом интервале

– существует не менее 3 стационарных точки функции $f(x)$;

– существует хотя бы две стационарные точки функции $f(x)$;

– существует 4 стационарных точки функции $f(x)$;

– не существует стационарных точек функции $f(x)$.

Известно, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$, причем $f(a) = f(b)$. Тогда

– в этом интервале существует стационарная точка функции $f(x)$;

– внутри этого отрезка всегда найдется точка, в которой касательная, проведенная к графику функции $y = f(x)$, будет параллельна оси Ox;

– внутри этого отрезка всегда найдется точка, в которой касательная, проведенная к графику функции $y = f(x)$, будет параллельна прямой $y = x$;

– внутри отрезка $[a; b]$ найдется точка, в которой касательная, проведенная к графику функции $y = f(x)$, будет параллельна прямой, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

Известно, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$. Этих условий достаточно, чтобы утверждать

– в этом интервале существует такая точка c, что $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$;

– в этом интервале существует стационарная точка функции $f(x)$;

– внутри отрезка $[a; b]$ найдется точка, в которой касательная, проведенная к графику функции $y = f(x)$, будет параллельна прямой, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$;

– внутри этого отрезка всегда найдется точка, в которой касательная, проведенная к графику функции $y = f(x)$, будет параллельна оси Ox;

– внутри этого отрезка всегда найдется точка, в которой касательная, проведенная к графику функции $y = f(x)$, будет параллельна оси Oy.

Сколько существует точек на интервале (0; 3р), в которых касательная к графику функции $f(x) = \sin x$ параллельна прямой $y = 1$

– три точки;

– ни одной точки не существует;

– только одна точка;

– четыре точки.

Для каких из следующих функций $f(x)$ выполнены условия теоремы Ролля на отрезке [0; 2];

$-f(x) = x - 1$; $+f(x) = (x - 1)^2$; $+f(x) = 2x - x^2$;

$$-f(x) = |x-1|; \quad -f(x) = \frac{x^2-2x}{2x-3}\ ?$$

При выполнении какого из следующих условий теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши:

$-a = b$; $-f(x) = g(x)$; $-g(x) = x^2$;

$-g(x) = f(x) + x$; $+g(x) = x$?

Какие из следующих равенств являются формулами, полученными по теореме Лагранжа для функции $f(x) = \cos x$ на отрезке [1; 3]

$-\cos 3 - \cos 1 = -2\sin C$; $-\cos 3 - \cos 1 = -2\cos C$;

$-\cos 3 - \cos 1 = -C\cos 2$; $-\cos 3 - \cos 1 = -C\sin 2$;

$-\cos 3 - \cos 1 = -\sin C$?

Сколько стационарных точек функции $f(x) =$ принадлежит интервалу (0; 3р)

– три точки;

– ни одной точки не существует;

– только одна точка;

– четыре точки?

Известно, что функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемы на интервале $(a; b)$, причем $f(a) = f(b)$, $g(a) = g(b)$. Этих условий достаточно, чтобы утверждать, что в этом интервале существует хотя бы одна стационарная точка функции

$+f(x) + g(x)$; $+f(x) - g(x)$; $+ 2f(x) + 3g(x)$;

$$+f(x) \cdot g(x); \quad -\frac{f(x)}{g(x)}.$$

В каждом из разделов практикума (на бумажном носителе) приводятся подробные решения 20–30 задач. За ними следуют тесты для самоподготовки, которые, вместе с «задачами с решениями», позволяют овладеть начальным слоем практических навыков. В этих тестах предлагается решить простые задачи, опираясь на приведенные теоретические подсказки и вычислительные алгоритмы. К каждому заданию приводятся варианты возможных ответов и таблица правильных ответов. Некоторые из предлагаемых в тестах задач позволяют расширить границы приведенной теории. Так, для конкретно поставленных примеров подсказываются новые идеи, формулы и понятия, необходимые в данной ситуации.

К каждому из разделов практикума приводятся (на CD) математические диктанты и контрольные работы с ответами. Математические диктанты удобно использовать как для самопроверки приобретенной техники вычислений, так и для проведения самостоятельных работ («летучек») во время аудиторных занятий. Наборы задач и вопросов из математических диктантов имеют средний уровень сложности, рассчитанный на рядового студента дневной формы обучения или подготовленного студента иной формы обучения. При этом одна часть заданий из диктантов рассчитана на выявление формальных (технических) навыков, другая – на проверку понятийного уровня (использование теоретических знаний), третья – на проявление творческих возможностей студента. Вот фрагмент одного из диктантов по теме «Функции нескольких переменных»:

Вариант 1

1. Привести графический пример плоского несвязного ограниченного множества.

2. Написать уравнение 5-мерной сферы радиусом $\sqrt{2}$ и центром в точке $A(1; 0; -1; 2; 3)$.

3. Задать аналитически и изобразить на плоскости область определения функции $z = \sqrt{y \cdot \sin x}$.

4. Проверить, удовлетворяет ли функция $z = 2xy + xe^{y/x}$ уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - xy - z = 0$.

5. Пояснить, является ли плоскость $z = 0$ касательной плоскостью к поверхности $z = -\sqrt{5x^2 + y^2}$ в точке $O(0;\ 0;\ 0)$.

6. Написать уравнение нормали к поверхности, заданной уравнением $z = x^2 + y^2 + xy$, в точке $A(x_0;\ y_0;\ z(x_0;\ y_0))$, где $x_0 = y_0 = 1$.

7. Найти производную функции $z = arctg\left(xy^2\right)$ в точке $A(2;-1)$ по направлению $\overrightarrow{gradz}(A)$.

8. Найти $d^2z(A)$, если $z = x^2 + 3y^2 - xy + 5y - 4$, $A\left(\sqrt{2};1\right)$.

9. Пусть M_0 – стационарная точка дважды непрерывно дифференцируемой в этой точке функции $u = f(x,\ y,\ z)$. Является ли точка M_0 точкой экстремума функции, если матрица вторых производных в точке M_0

имеет вид $H(M_0) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

10. При каких размерах открытого прямоугольного ящика объёмом $V = 32м^3$ площадь его поверхности будет наименьшей?

Тематические контрольные работы (10–15 вариантов) можно использовать для проведения зачетных или аттестационных работ по практике. Они включают 8–12 разнообразных заданий различной сложности. Их можно также использовать как индивидуальные домашние задания при завершении изучения соответствующей темы высшей математики.

И наконец, большинство глав книги сопровождаются (на CD) блоками обучающих задач двух видов: практических – для приобретения навыков решения типовых задач, доступных для «ручного» счета и растиражированных для студентов заочной формы обучения, и компьютерных – для проведения лабораторных занятий с использованием системы компьютерной математики MathCAD. При этом обучающие демонстрационные задачи и блоки типовых заданий каждого компьютерного раздела предваряются подробным описанием сопутствующих элементов и функций MathCAD. В заключение приведем в качестве примера лабораторную работу к главе 23 «Устойчивость решений дифференциальных уравнений».

Встроенная функция rkadapt(*init*,*a*,*b*,*Ac*,*D*, *Nmax*,*Istep*) служит для численного решения задачи Коши и реализует адаптивный алгоритм Рунге-Кутта 4-го порядка с переменным шагом интегрирования. Эта функция имеет 7 аргументов. Аргументы *init*, *a*, *b*, *D* имеют тот же смысл, что и соответствующие аргументы функции rkfixed (см. лабораторную работу к гл. 22). Параметр *Ac* задает точность, с которой алгоритмом выбирается длина шага – как правило, это число порядка 10^{-7}. Параметр *Nmax* задает максимальное допустимое число шагов алгоритма. Параметр *Istep* формирует таблицу результатов таким образом, чтобы разность между двумя последовательными числами в нулевом столбце таблицы (этот столбец содержит значения независимой переменной *x*) была не менее *Istep*; при этом вывод остальных промежуточных результатов, полученных алгоритмом, игнорируется. В случае, *Istep* = 0 в таблицу выводятся все точки промежутка *X*, построенные алгоритмом.

Следующий пример решения задачи Коши $\begin{cases} y' = 2y - yx^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ показывает две таблицы результатов применения функции соответственно при *Istep* = 10^{-4} θ *Istep* = 1:

*y*0:= 1 e:= 1 *x*0:= 0 *b*:= 5 *f*(*x*,*y*):=*y*Ч(2 - x^3)

D(*x*,*Y*):=*f*(*x*,Y_0)

S:= rkadapt(*y*0,*x*0,*b*,10^{-5},*D*,10000,10^{-4})

0	1
0	1
0.05	1.105
0.299	1.814
0.565	3.019
0.807	4.518
1.039	5.968
1.281	6.611
1.465	5.92
1.64	4.352
1.817	2.479
1.903	1.696
1.988	1.075
2.062	0.674
2.127	0.421
2.187	0.261
2.246	0.153

$\mathrm{rkadapt}(y0, x0, b, 10^{-5}, D, 10000, 1)$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1.039 & 5.968 \\ 2.062 & 0.674 \\ 3.067 & 1.133\times10^{-7} \\ 4.07 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Во втором случае результаты вычислений в точках $x = 0.05$, $x = 0.299$, $x = 0.565$, $x = 0.807$ проигнорированы. Еще раз отметим, что *lstep* не влияет на реальное число шагов алгоритма в процессе его выполнения.

Общая формулировка задач К23.1–К23.11

С помощью анимации графиков решений задачи Коши $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = \overline{y}_0 \end{cases}$ на промежутке $[x_0; b]$, найденных функцией rkadapt при различных значениях $\overline{y}$ и b, выяснить эмпирически, является ли решение задачи Коши $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ на промежутке $[x_0; +\infty)$ устойчивым по Ляпунову или асимптотически устойчивым.

К23.1. $f(x,y) = \dfrac{2y}{x}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$.

К23.2. $f(x,y) = \dfrac{-3y}{x}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$.

К23.3. $f(x,y) = 1 + x - y$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

К23.4. $f(x,y) = \sin^2 y$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

К23.5. $f(x,y) = x(y-1)$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$.

К23.6. $f(x,y) = x(y-1)$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$.

К23.7. $f(x,y) = (2-x^3)y$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

К23.8. $f(x,y) = (2-x^3)y$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$.

К23.9. $f(x,y) = y^3 - y$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

К23.10. $f(x,y) = y^3 - y$, $x_0 = 0$, $y_0 = -1$.

К23.11. а) $f(x,y) = \dfrac{y}{3(x-1)}$, $x_0 = 2$, $y_0 = 0$.

б) $f(x,y) = 4y - yx^2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

Решение задач К23.1–К23.11

Поскольку в силу теоремы 23.1 любое решение задачи Коши (при некоторых дополнительных условиях – см. начало главы) локально устойчиво, то для эмпирической проверки устойчивости этого решения необходимо одновременно с уменьшением разности увеличивать промежуток $[x_0; b]$, на котором выполняется алгоритм функции rkadapt. При этом скорость приближения $\overline{y}_0$ к y_0 и скорость увеличения b должны зависеть от встроенной переменной FRAME (см. лабораторную работу к гл. 7). Сами эти зависимости следует варьировать с целью получения исчерпывающей анимационной картины поведения исследуемого решения.

На месте меток для ввода диапазона изменения графиков вдоль оси $0x$ следует ввести идентификаторы x_0 и b; диапазон изменения графиков вдоль оси $0y$ регулируется исходя из вида решения задачи Коши (сравни рисунки 23.8 и 23.7).

К23.1. Ответ: неустойчиво.

К23.2. Ответ: асимптотически устойчиво.

К23.3. Ответ: асимптотически устойчиво.

К23.4. Ответ: неустойчиво.

К23.5. Ответ: неустойчиво.

К23.6. Ответ: неустойчиво.

К23.7. Ответ: асимптотически устойчиво.

К23.8. Ответ: асимптотически устойчиво.

К23.9. Ответ: асимптотически устойчиво.

К23.10. Ответ: неустойчиво.

К23.11. а) Алгоритм решения задачи с помощью MathCAD следующий. Ввести исходные данные:

$$x0 := 2 \quad y0 := 0 \quad b0 := 50 \quad e := 1$$

$$f(x,y) := \frac{y}{3\cdot(x-1)} \qquad D(x,Y) := f(x,Y_0)$$

Задать зависимости изменения переменных b, $y0+h$ и решить задачу Коши:

$$b := b0 + 2^{FRAME+10} \qquad h := \frac{\varepsilon}{2^{FRAME+1}}$$

$$S(y0,b) := rkadapt(y0, x0, b, 10^{-5}, D, 5000, 10^{-3})$$

Построить график решения и его е-коридор (рисунок 23.7). Произвести анимацию графиков.

К23.11. б) Алгоритм решения задачи с помощью MathCAD следующий. Ввести исходные данные, задать зависимости изменения переменных b, $y0+h$ и решить задачу Коши:

$$x0 := 2 \quad y0 := 0 \quad b0 := 10 \quad e := 1 \quad D(x,Y) := f(x,Y_0)$$

$$b := b0 + 4\cdot FRAME \qquad h := \frac{\varepsilon}{2^{FRAME+1}}$$

$$S(y0,b) := rkadapt(y0, x0, b, 10^{-5}, D, 1000, 10^{-7})$$

Построить график решения и его е-коридор (рисунок 23.8). Произвести анимацию графиков.

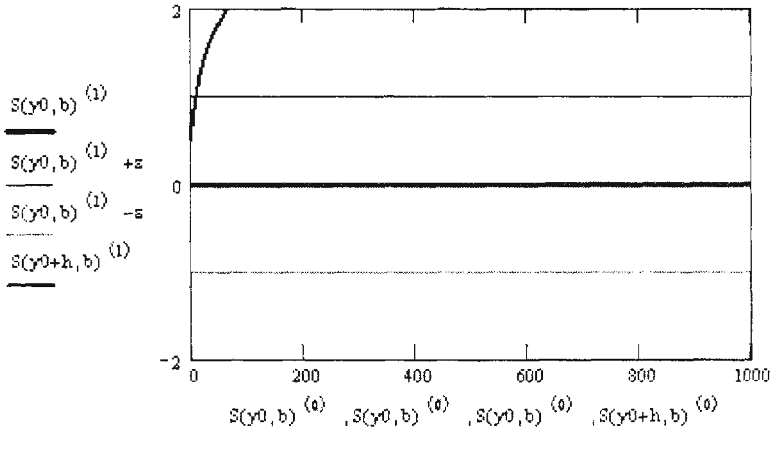

Рисунок 23.7 – График решения и его е-коридор

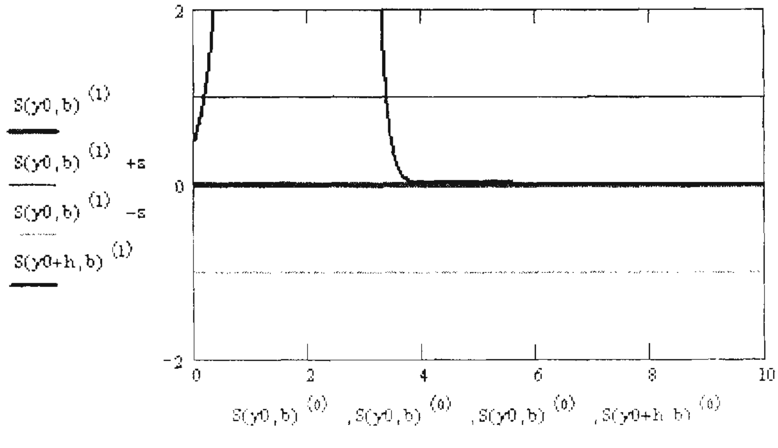

Рисунок 23.8 – График решения и его е-коридор

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черняк, А.А.* Учебно-методический комплекс: высшая математика для инженерно-экономических специальностей вузов / А.А. Черняк, Ж.А. Черняк. – Минск: Харвест, 2009. – 715 с.

2. *Черняк, А.А.* Математика для экономистов на базе MathCAD / А.А. Черняк, О.И. Мельников, А.В. Кузнецов. – СПб.: БХВ, 2003. – 485 с.

3. *Черняк, А.А.* Высшая математика на базе MathCAD. Общий курс / А.А. Черняк, Ж.А. Черняк, Ю.А. Доманова. – СПб.: БХВ, 2004. – 593 с.

4. *Черняк, А.А.* Контрольные задания по общему курсу высшей математики / А.А. Черняк, Ж.А. Черняк. – СПб.: Питер, 2006. 445 с.

РЕЗЮМЕ

В статье представлены концепция, структура и содержание разработанного авторами учебно-методического комплекса по высшей математике для инженерно-экономических специальностей вузов.