

А.А.Черняк, Ж.А.Черняк

# МАТЕМАТИКА

В РЕШЕНИЯХ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ  
ИЗ СБОРНИКА М.И.СКАНАВИ

СПРАВОЧНИК ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ,  
РЕПЕТИТОРОВ И АБИТУРИЕНТОВ

Издание пятое, переработанное и дополненное



1655614  
Філія: БДП на станка

МИНСК  
«БЕЛАРУСКАЯ ЭНЦЫКЛАПЕДЫЯ»  
2000

УДК 51(035)(075.4)

ББК 22.1я2

Ч 49

Художник Е.С.Забавская

ISBN 985-11-0157-5

- © Издательство «Беларуская Энцыклапедыя»  
имени Петруся Бровки, 1996
- © Издательство «Беларуская Энцыклапедыя»  
имени Петруся Бровки, 2000
- © Авторы. А.А.Черняк, Ж.А.Черняк, 2000
- © Оформление. Е.С.Забавская, 2000

## ПРЕДИСЛОВИЕ

«Сборник задач по математике для поступающих во втузы» под редакцией М.И. Сканави с момента своего первого выхода в свет в 1960-е гг. выдержал более 10 переизданий (исправленных и дополненных). Решая задачи из этого Сборника, совершенствовались свою технику и развивали математическую культуру несколько поколений абитуриентов. Сборник снискал заслуженный успех благодаря огромному (более 5000) количеству задач и их разнообразию, разделению задач на группы сложности (А, Б, В), профессионализму авторов-составителей (преподавателей ведущих московских вузов).

Популярность Сборника инициировала в 1995—97 гг. в странах СНГ ряд изданий, содержащих решения приведенных в нем задач. Это и понятно: с позиции абитуриента, обучающегося умению решать конкурсные задачи, любой, даже самый совершенный сборник задач только с ответами, проигрывает в сравнении со сборником, содержащим эти задачи с решениями. Однако попытки привести решения всех задач Сборника сказались на качестве решебников: многие задачи решены в них схематично, зачастую требуют дополнительных громоздких выкладок. К тому же по количеству томов (которые продолжают выходить и по сей день) эти «многосерийные» решебники могут соперничать с энциклопедиями.

Авторы данного пособия — доценты ведущих минских университетов — сконцентрировали свое внимание на решении задач самой сложной группы В, поскольку задачи именно этой группы вызывают наибольшие трудности у учащихся и особый интерес учителей и репетиторов.

Настоящее пособие является уже 5-м, дополненным и переработанным изданием. Оно содержит решения всех приведенных в Сборнике задач группы В. Помимо этого в пособие включен расширенный справочник, содержащий как



традиционные теоремы, формулы и свойства, так и основные схемы решения уравнений и неравенств различных типов, составляющие ядро метода равносильных преобразований, используемого авторами книги. Благодаря этому методу решения алгебраических задач не требуют обременительных манипуляций с областями допустимых значений (ОДЗ). Справочник обогащен также оригинальными методическими разработками авторов, касающимися решений уравнений с обратными тригонометрическими функциями и задач с параметрами.

Настоящее пособие рекомендуется всем, кто изучает, преподает и просто интересуется элементарной математикой. Книга также поможет абитуриенту подготовиться к вступительному экзамену, учитывая, что разбор решений серьезных задач, выполненных в рамках единой методики, — важнейший элемент самостоятельной подготовки.

Авторы выражают признательность читателям книги из России, приславшим ценные замечания, которые учтены в данном издании. Особая благодарность — заслуженному учителю России В.И.Гридасову (г.Воронеж) и кандидату физико-математических наук В.В.Черноруцкому (г.Москва), подсказавшим ряд интересных идей по улучшению решений некоторых задач.

Кандидат физ.-мат. наук, доцент А.А.Черняк,  
Кандидат физ.-мат. наук, доцент Ж.А.Черняк.

## АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

1. Рассмотрим уравнение

$$x^3 - (2u + v)x^2 + (2uv + u^2 - w^2)x + v(w^2 - u^2) = 0, \quad (1)$$

которое содержит как частные случаи все уравнения 6.257—259, 261, 265—269. Это уравнение назовем модельным и решим его:

$$x^3 - vx^2 - 2ux^2 + 2uvx - (w^2 - u^2)x + v(w^2 - u^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-v)\left((x-u)^2 - w^2\right) = 0 \Leftrightarrow (x-v)(x-u+w)(x-u-w) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_1 = v, \quad x_{2,3} = u \pm w.$$

2. Рассмотрим уравнение

$$(x-a)^n + (x-b)^n = (b-a)^n, \quad b > a, \quad n \text{ — четное.} \quad (2)$$

Очевидно,  $x = a$  и  $x = b$  — корни этого уравнения. Докажем, что других решений нет. Перепишем его так:

$$\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n + \left(\frac{x-b}{b-a}\right)^n = 1.$$

Если  $x > b$ , то  $\frac{x-b}{b-a} > 1 \Rightarrow$  левая часть уравнения больше 1. Аналогично,

при  $x < a$ . Если  $a < x < b$ , то

$$\frac{x-a}{b-a} < 1, \quad \frac{b-x}{b-a} < 1 \Rightarrow \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n < \frac{x-a}{b-a}, \quad \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^n < \frac{b-x}{b-a} \Rightarrow$$

левая часть уравнения меньше  $\frac{x-a}{b-a} + \frac{b-x}{b-a} = 1$ .

Уравнение (2) содержит как частные случаи уравнения 6.256 и 6.263.

3. Пусть  $r_1(x)$  — остаток от деления многочлена  $f(x)$  на многочлен  $g(x)$ , степень которого не больше степени  $f(x)$ , причем  $r_1(x)$  не равен тождественно 0. Другими словами,  $f(x)$  представим в виде:

$$f(x) = g(x) \cdot q_1(x) + r_1(x), \quad (3)$$

где  $r_1(x)$  — многочлен, степень которого меньше степени делителя  $g(x)$  (и, следовательно, делимого  $f(x)$ ). Если теперь  $x_0$  — общий корень

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	3
Алгебраические уравнения.....	5
Прогрессии.....	60
Логарифмы. Показательные и логарифмические уравнения.....	70
Тождественные преобразования тригонометрических выражений.....	91
Тригонометрические уравнения.....	125
Неравенства.....	182
Задачи по планиметрии.....	222
Задачи по стереометрии.....	259
Задачи по геометрии с применением тригонометрии.....	289
Применение уравнений к решению задач.....	348
Комбинаторика и бином Ньютона.....	400
Тождественные преобразования алгебраических выражений.....	406
Справочно-методические материалы.....	448



Справочное издание  
**Черняк Аркадий Александрович**  
**Черняк Жанна Альбертовна**

МАТЕМАТИКА  
В РЕШЕНИЯХ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ  
ИЗ СБОРНИКА ПОД РЕДАКЦИЕЙ М.И.СКАНАВИ

Ответственный за выпуск *А.И.Болсун*

Редакторы *П.С.Габец, В.М.Сацуца*

Художественный редактор *В.М.Жук*

Технический редактор *М.И.Гриневиц*

Корректоры: *В.И.Богданович, А.М.Борисова,*  
*Н.Б.Кучмель, Е.В.Семенчукова*

Компьютерный набор и верстка *А.К.Деев, И.М.Кузьменкова*

Подписано в печать 20.12.99. Формат 84×108 <sup>1</sup>/<sub>32</sub>. Бумага газетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 25,2. Усл. кр.-отг. 25,62. Уч.-изд. л. 23,9. Тираж 10 000 экз. Заказ 2945.

Государственное предприятие «Издательство «Белорусская Энциклопедия имени Петруся Бровки» Государственного комитета Республики Беларусь по печати. Лицензия ЛВ №10 от 31.12.97. Республика Беларусь. 220072, Минск, ул. Академическая, 15а.

Отпечатано с готовых диапозитивов заказчика в типографии издательства «Белорусский Дом печати». Республика Беларусь. 220013, Минск, проспект Ф.Скорины, 79.