А.А. ЧЕРНЯК, Ж.А. ЧЕРНЯК, А.К. ДЕЕВ

МАТЕМАТИКА

В РЕШЕНИЯХ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ ИЗ СБОРНИКА М.И. СКАНАВИ

СПРАВОЧНИК ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ, РЕПЕТИТОРОВ И АБИТУРИЕНТОВ

А.А.ЧЕРНЯК, Ж.А.ЧЕРНЯК, А.К.ДЕЕВ

МАТЕМАТИКА

В РЕШЕНИЯХ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ ИЗ СБОРНИКА М.И.СКАНАВИ

СПРАВОЧНИК ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ, РЕПЕТИТОРОВ И АБИТУРИЕНТОВ

2-е издание

МИНСК
«БЕЛАРУСКАЯ ЭНЦЫКЛАПЕДЫЯ»
1997

ББК 22.1я2
Ч-49
УДК 51(035)(075.4)

Художник В.И.Коломиец

Ч $\frac{5103500000—036}{М\ 318(03)—97}$ без объявл

ISBN 985-11-0089-7

ПРЕДИСЛОВИЕ

"Сборник задач по математике для поступающих во втузы" под редакцией М.И. Сканави с момента своего первого выхода в свет в 1960-е гг. выдержал более 10 переизданий (исправленных и дополненных). Решая задачи из этого Сборника, совершенствовали свою технику и развивали математическую культуру несколько поколений абитуриентов. Сборник снискал заслуженный успех благодаря огромному (более 5000) количеству задач и их разнообразию, разделению задач на три группы сложности (А, Б, В), профессионализму авторов-составителей (преподавателей ведущих московских вузов).

Популярность Сборника инициировала в 1995-97 гг. в странах СНГ ряд изданий, содержащих решения приведенных в нем задач. Это и понятно: с позиции абитуриента, обучающегося умению решать конкурсные задачи, любой, даже самый совершенный, сборник задач только с ответами проигрывает в сравнении со сборником, содержащим эти задачи с решениями. Однако глобальность замысла — привести решения всех задач Сборника — сказалась на качестве решебников: многие задачи решены в них схематично, зачастую требуют дополнительных громоздких выкладок. К тому же по количеству томов (которые продолжают выходить и по сей день) эти "многосерийные" решебники могут соперничать с энциклопедиями.

Более рациональным путем пошли авторы настоящего пособия, выпустившие в 1995 г. компактное издание в двух частях, содержащее решения задач только самой сложной группы (В). Задачи именно этой группы вызывают наибольшие трудности у учащихся и особый интерес у учителей и репетиторов. Тираж первого издания полностью разошелся.

Данное издание книги в основном сохраняет особенности первого издания:

- решения всех алгебраических задач выполнены на основе единой методики равносильных преобразований без обременительных манипуляций с ОДЗ;
- решения геометрических задач отличаются краткостью без ущерба строгости математического изложения (кстати, геометриче-

ские задачи группы В не были полностью представлены ни в одном из вышеупомянутых решебников).

Новое издание существенно отличается от предыдущего:

- усовершенствованы решения многих задач и устранены замеченные опечатки;
- добавлена новая глава “Применение уравнений к решению задач”;
- некоторые главы снабжены методическими указаниями, в которых обобщены методы решения задач;
- приведен справочный материал, содержащий как традиционные формулы и свойства, так и основные равносильные преобразования, составляющие ядро одноименной методики решения уравнений и неравенств любого типа.

Настоящее пособие рекомендуется всем, кто изучает и преподает элементарную математику. Книга также поможет подготовиться к вступительному экзамену, если решенные в ней задачи разбирать серьезно, “с карандашом в руке”, помня о том, что разбор решений — важный элемент самостоятельной подготовки.

Названия глав и нумерация задач в них соответствуют Сборнику под редакцией М.И. Сканави, изданном “Вышэйшай школай” в 1990 г.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

1. Рассмотрим уравнение

$$x^3-(2u+v)x^2+\left(2uv+u^2-w^2\right)x+v\left(w^2-u^2\right)=0, \qquad \textbf{(1)}$$

которое содержит как частные случаи все уравнения 6.257—259, 261, 265—269. Это уравнение назовем модельным и решим его:

$$x^3-vx^2-2ux^2+2uvx-\left(w^2-u^2\right)x+v\left(w^2-u^2\right)=0 \iff$$

$$(x-v)\left((x-u)^2-w^2\right)=0 \iff (x-v)(x-u+w)(x-u-w)=0 \iff$$

$x_1=v,\ x_{2,3}=u\pm w.$

2. Рассмотрим уравнение

$$(x-a)^n+(x-b)^n=(b-a)^n,\ b>a,\ n \text{ — четное.} \qquad \textbf{(2)}$$

Очевидно, $x=a$ и $x=b$ — корни этого уравнения. Докажем, что других решений нет. Перепишем его так:

$$\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n+\left(\frac{x-b}{b-a}\right)^n=1.$$

Если $x>b$, то $\dfrac{x-b}{b-a}>1 \Rightarrow$ левая часть уравнения больше 1. Аналогично, при $x<a$. Если $a<x<b$, то

$$\frac{x-a}{b-a}<1,\ \frac{b-x}{b-a}<1 \Rightarrow \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n<\frac{x-a}{b-a},\ \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^n<\frac{b-x}{b-a} \Rightarrow$$

левая часть уравнения меньше $\dfrac{x-a}{b-a}+\dfrac{b-x}{b-a}=1.$

Уравнение (2) содержит как частные случаи уравнения 6.256 и 6.263.

3. Пусть $r_1(x)$ — остаток от деления многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$, степень которого не больше степени $f(x)$, причем $r_1(x)$ не равен тождественно 0. Другими словами, $f(x)$ представим в виде:

$$f(x)=g(x)\cdot q_1(x)+r_1(x), \qquad \textbf{(3)}$$

где $r_1(x)$ — многочлен, степень которого меньше степени делителя $g(x)$ (и, следовательно, делимого $f(x)$). Если теперь x_o — общий корень

СОДЕРЖАНИЕ

А.А.Черняк, Ж.А.Черняк, А.К.Деев.
49 Математика в решениях конкурсных задач из Сборника под редакцией М.И.Сканави. 2-е изд. — Мн.: БелЭн, 1997. — 416 с.

ISBN 985-11-0089-7.

В пособии приведены решения самых сложных и вызывающих наибольший интерес задач из известного Сборника под редакцией М.И.Сканави. Дан справочный материал, содержащий как традиционные формулы, теоремы и свойства, так и основные равносильные преобразования, используемые при решении уравнений и неравенств любого типа.

Данное пособие — незаменимый помощник для учителей, репетиторов, абитуриентов и старшеклассников, для всех любителей математики.

Ч $\dfrac{\textbf{5103500000—036}}{\textbf{М 318(03)—97}}$ **без объявл.**

ББК 22.1я2