В. В. Шлыков, доктор педагогических наук, доцент

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ В ПРОЦЕССЕ ПОИСКА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ

Решение геометрических задач в курсе геометрии является необходимым условием успешного усвоения теоретического материала и средством развития аналитических и творческих способностей учащихся. Качественное усвоение учебного материала и его понимание невозможно без решения геометрических задач, позволяющих учащимся осмыслить общую теорию и научиться применять её в каждой конкретной ситуации. Мыслительная деятельность, осуществляемая в процессе поиска решения геометрических задач, в наибольшей степени обеспечивает осмысленное овладение геометрическими знаниями.

Уровень геометрической подготовки учащихся во многом определяется их умением находить решения геометрических задач различного уровня сложности. В то же время «цель не в том, чтобы ученик решал задачу (т. е. получил ответ), а в том, чтобы он получил от этой задачи пользу, т. е. продвинулся на одну ступеньку по длинной лестнице овладения математикой» [1, с. 4].

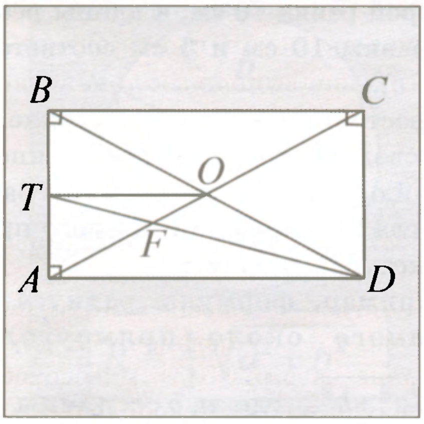
Как научиться решать геометрические задачи? Вопрос, который задаёт себе учащийся, желающий овладеть учебным материалом школьного курса геометрии и научиться применять его на практике. Как научить осуществлять поиск решения задачи? Этот вопрос волнует учителя математики, заинтересованного в успехе своих учеников. Различные ответы на него можно найти в работах [2, 3]. В любом случае имеет значение практический опыт решения разнообразных задач. В то же время нельзя добиться успеха только за счёт количества решаемых задач. Для каждого задающего этот вопрос важен ответ, позволяющий владеть наиболее оптимальным механизмом развития способностей научиться и научить решать задачи. В обоих случаях успех более вероятен, если заинтересованность учащегося научиться, а учителя — научить решать задачи является обоюдной.

В чём может заключаться общий подход к поиску решения задач? Решение геометрических задач часто сводится к некоторой конечной цепочке доказательств равенства или подобия геометрических фигур и *вычисления* геометрических величин на основе уже известных теорем или результатов ранее решённых задач. Для нахождения решения задачи важно построить соответствующую последовательность доказательств и вычислений, приводящих к отысканию некоторого нового свойства фигуры или неизвестной величины. Общим направлением построения такой цепочки является поиск дополнительной информации о зависимостях между данными и искомыми величинами.

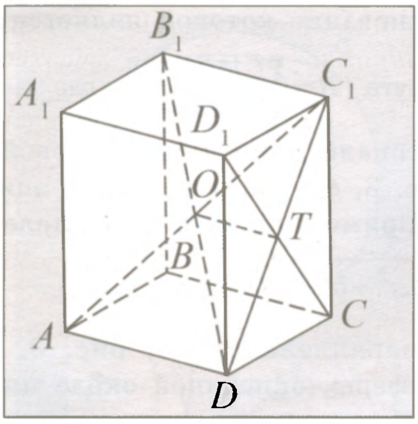
Каким образом осуществлять поиск взаимосвязей между данными и искомыми величинами? Один из шагов поиска может состоять в рассмотрении геометрических фигур в контексте геометрических конструкций [4], соответствующих условию задачи или вновь созданных конструкций с целью отыскания различных характеристик этих фигур.

Приведём примеры многозначности характеристик, например, отрезка в зависимости от рассматриваемой конструкции. Пусть геометрическая конструкция состоит из прямоугольника $ABCD$, его диагоналей AC и BD, отрезков TO и TD, где точка T — середина стороны AB (рис. 1, *а*). В этом случае анализ отрезка OT в контексте других фигур позволяет увидеть следующие его свойства:

- медиана и высота равнобедренного треугольника AOB;
- общий катет прямоугольных треугольников BTO и ATO;
- сторона треугольника TFO, подобного треугольнику DFA;
- катет прямоугольного треугольника BTO, подобного треугольнику BAD;
- средняя линия прямоугольных треугольников ABC и BAD;
- основание прямоугольных трапеций $ATOD$ и $BTOC$;
- сторона треугольников ATO и DOT, имеющих общее основание и равные площади.



а



б

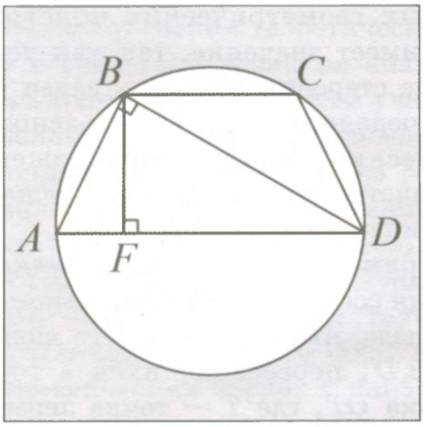
Рисунок 1

Вопрос о выявлении свойств плоских фигур, являющихся элементами пространственных геометрических конструкций, также имеет значение, так как успешное решение стереометрических задач во многом определяется умением распознавать метрические свойства расположенных в пространстве плоских фигур и решать планиметрические задачи.

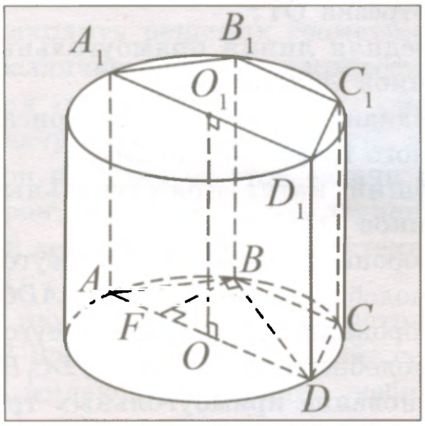
Например, пусть геометрическая конструкция состоит из прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, его диагоналей AC_1, B_1D, пересекающихся в точке O, и отрезка OT, где T — точка пересечения диагоналей боковой грани DD_1C_1C данного параллелепипеда (рис. 1, *б*). В данном случае можно указать следующие характеристики отрезка OT:

- средняя линия прямоугольных треугольников ADC_1 и DC_1B_1;
- медиана, высота и биссектриса равнобедренного треугольника DOC_1;
- общий катет прямоугольных треугольников DTO и C_1TO;
- сторона прямоугольного треугольника OTC_1, подобного треугольнику ADC_1;
- сторона прямоугольного треугольника DTO, подобного треугольнику DC_1B_1;
- основание прямоугольных трапеций $ADTO$ и B_1C_1TO.

В зависимости от условия конкретной задачи для нахождения взаимосвязей между данными и искомыми величинами могут оказаться полезными одна или несколько характеристик фигуры. Например, пусть трапеция $ABCD$ вписана в окружность так, что её основание AD совпадает с диаметром окружности, и требуется найти длину её диагонали и боковой стороны, если известны длины оснований 20 см и 12 см (рис. 2, *а*). Пусть BF — высота трапеции. Тогда каждый из отрезков BD и AB обладает различным набором характеристик. Отрезок BD одновременно является диагональю трапеции, катетом прямоугольного треугольника ABC ($\angle ABD = 90°$) и гипотенузой прямоугольного треугольника BFD ($\angle BFD = 90°$). Боковая сторона AB является катетом треугольника ABD и гипотенузой прямоугольного треугольника ABF. Учитывая, что диагональ BD — катет прямоугольного треугольника ABD, можем найти её длину, воспользовавшись тем, что квадрат длины катета прямоугольного треугольника равен произведению длины гипотенузы и длины проекции этого катета на гипотенузу, т. е. $BD^2 = AD \cdot FD$. Аналогично AB можем найти, воспользовавшись равенством: $AB^2 = AD \cdot AF$.



а



б

Рисунок 2

Рассмотрение различных характеристик одного и того же отрезка необходимо также и при решении стереометрических задач, например — аналогичной предыдущей: вычислите объём вписанной в цилиндр четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если её боковая грань AA_1D_1D содержит ось OO_1 цилиндра, длина которой равна 10 см, а длины рёбер AD и BC равны 10 см и 6 см соответственно (рис. 2, *б*).

В простейших случаях решение задачи может сводиться к непосредственному нахождению длины отрезка или градусной меры угла на основании прямого применения некоторой теоремы.

Например, формулы радиуса круга, описанного около прямоугольника ($R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$, где a, b — длины сторон прямоугольника, рис. 3, *а*); радиуса круга, описанного около равнобедренной трапеции, основание которой является диаметром круга ($R = \frac{1}{2}\left(\sqrt{m^2+a^2}\right)$, где m — длина диагонали, a — длина боковой стороны, рис. 3, *б*); радиуса сферы, описанной около прямоугольного параллелепипеда ($R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, ,где a, b, c — длины рёбер параллелепипеда, рис. 3, *в*); радиуса сферы, описанной около цилиндра ($R = \frac{1}{2}\sqrt{h^2+4r^2}$, где h — высота цилиндра, а r — радиус его основания, рис. 3, *г*), являются результатом прямого применения теоремы Пифагора. Вместе с тем, как показывают рассмотренные выше примеры, необходимо умение видеть возможность применения этой теоремы и распознавать прямоугольный треугольник в контексте геометрических конструкций, заданных условиями задач.

В общем случае знание некоторых базовых свойств фигур, формул и «библиотеки» опорных конструкций обеспечивает успешное решение более сложных задач точно также, как таблица умножения служит основой для выполнения правильных вычислений с многозначными числами. Например, применение теоремы о том, что градусная мера вписанного в окружность угла равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается, — неизбежное требование для решения ряда задач, условие которых определяет необходимость рассмотрения описанной окружности.

В то же время для решения задач важно умение не только применять известные теоремы в контексте геометрических конструкций, соответствующих условию задачи, но также создавать новые конструкции, помогающие «проявить» возможность применения этих теорем для нахождения величин или доказательства новых свойств фигур. Например, пусть требуется найти площадь трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$), вписанной в окружность с центром в точке O,

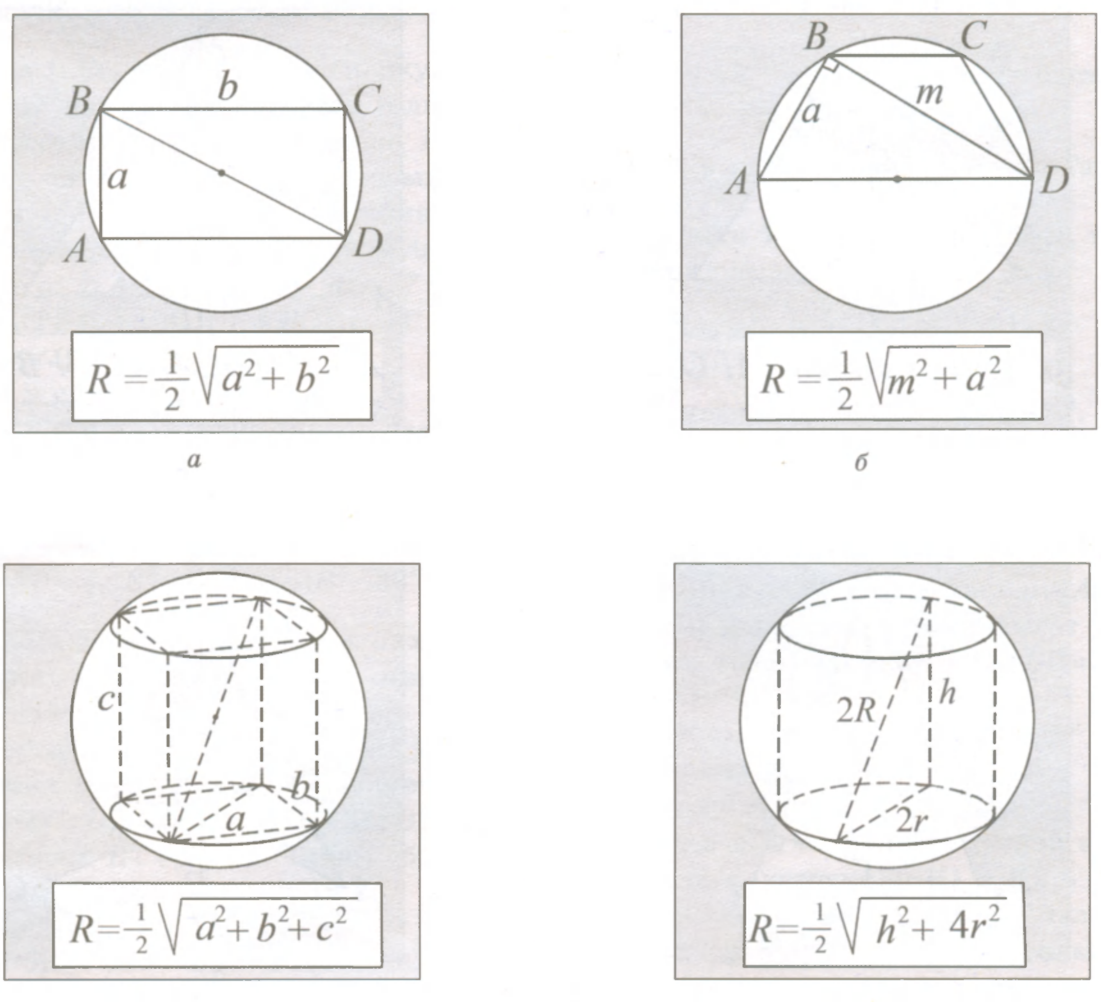


Рисунок 3

если её высота равна 2 см, а $\angle COD = 60^\circ$. В этом случае дополнение конструкции, заданной условием задачи, высотой CH трапеции и диагональю AC позволяет увидеть возможность применения теоремы о вписанном угле. На основании указанной теоремы можем найти $\angle CAD = \frac{1}{2}\angle COD = 30^\circ$, а в прямоугольном треугольнике AHC — катет $AH = CH \cdot ctg 30^\circ = 2\sqrt{3}$. Следовательно, $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD)\cdot CH = AH \cdot CH = 4\sqrt{3}$ см^2.

В ряде случаев при решении задач полезно рассмотрение конструкций, элементами которых являются подобные прямоугольные треугольники. Рассмотрим примеры задач, для решения которых можно воспользоваться конструкциями, элементами которых являются треугольники, на которые разбивается прямоугольный треугольник прямой, перпендикулярной его гипотенузе.

Конструкция К1. Пусть O — точка пересечения прямой l, проходящей через точку F гипотенузы AB треугольника ACB и перпендикулярной AB, с катетом AC, тогда прямоугольные треугольники ACB и AFO подобны (рис. 4, *а*).

Конструкция К2. Пусть T — точка пересечения прямой l, проходящей через точку F гипотенузы AB треугольника ACB и перпендикулярной гипотенузе AB с прямой CB, тогда прямоугольные треугольники ACB и TFB подобны (рис. 4, *б*).

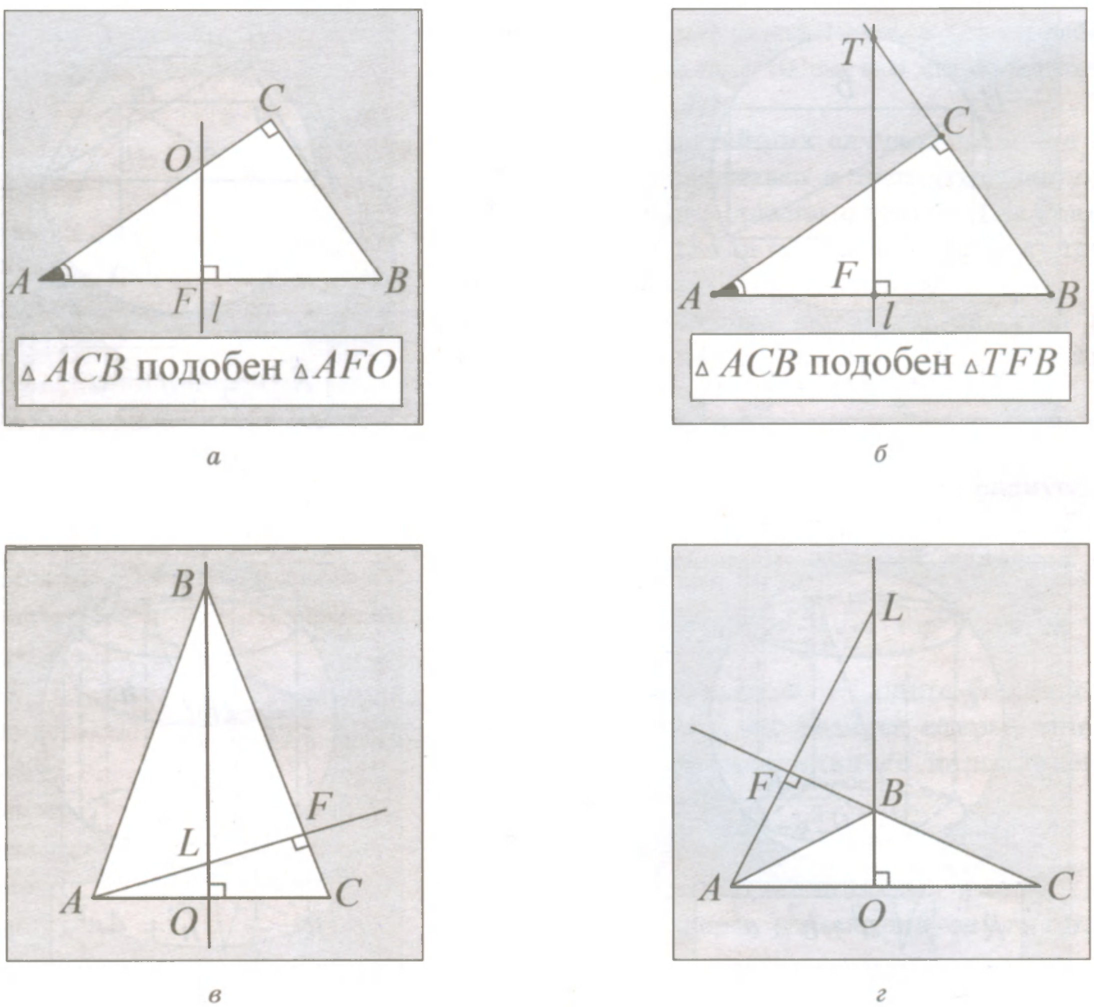


Рисунок 4

Если перпендикуляр проведён из вершины прямого угла C, то соответствующая конструкция позволяет найти ряд опорных соотношений в прямоугольном треугольнике, которые можно использовать при решении ряда задач [5].

Аналогичные конструкции возникают, например, при рассмотрении равнобедренного треугольника ABC с основанием AC и прямых, содержащих высоты BO и AF, проведённые к основанию и боковой стороне соответственно. Подобными являются пары треугольников: ΔBOC и ΔBFL, ΔAFC и Δ AOL, ΔBOC и ΔAFC, ΔAOL и ΔBFL (рис 4, *в, г*).

Рассмотрим примеры задач, в которых конструкции К1 или К2 явно заданы условием задачи.

Задача 1. Серединный перпендикуляр к гипотенузе прямоугольного треугольника ACB пересекает катет BC в точке F, делящей его на отрезки, длины которых равны 25 см и 7 см, считая от вершины B. Вычислите периметр треугольника ACB.

Д а н о: ΔACB, $\angle ACB = 90°$, $T \in AB$, $AT = TB$, $T \in \ell$, $l \perp AB$, $F = BC \cap l$, $FC = 7$ см, $FB = 25$ см (рис. 5, *а*).

В ы ч и с л и т ь: P_{ACB}.

Р е ш е н и е. Условие данной задачи в явном виде определяет конструкцию К1.

Так как $P_{ACB} = AB + AC + 32$, а

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{AB^2 - 32^2},$$

то решение задачи сводится к нахождению длины гипотенузы AB, которую можем найти, воспользовавшись подобием треугольников ACB и FTB. Из подобия этих треугольников следует, что $AB : BF = BC : BT$ или $2BT : 25 = 32 : BT$. Отсюда находим $BT = 20$ см. Таким образом, $AB = 40$ см,

$$AC = \sqrt{40^2 - 32^2} = 24 \text{ (см)},$$

а значит, $P_{ACB} = 96$ см.

О т в е т: 96 см.

Задача 2. Прямая, проходящая через точку F катета AC треугольника ACB пересекает гипотенузу AB в точке M, а прямую CB в точке T. Вычислите площадь треугольника TCF, если $AF = 5$ см, $FC = 3$ см, $AB = 10$ см.

Д а н о: ΔACB, $TM \perp AB$, $AF = 5$ см, $FC = 3$ см, $AB = 10$ см (рис. 5, *б*).

В ы ч и с л и т ь: S_{TCF}.

Р е ш е н и е. Треугольник TCF подобен треугольнику ACB (конструкция К2). Следовательно, для нахождения площади треугольника TCF можем воспользоваться тем, что отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия, т. е. квадрату отношения соответствующих сторон.

В прямоугольном треугольнике ACB находим

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6 \text{ (см)}.$$

Тогда $S_{ACB} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = 24$ см^2. Так как треугольники TCF и ACB подобны, то выполняется равенство

$$S_{TCF} : S_{ACB} = (FC : BC)^2 = 1 : 4.$$

Следовательно, $S_{TCF} = \frac{1}{4} S_{ACB} = 6$ см^2.

О т в е т: 6 см^2.

Задача 3. Периметр равнобедренного треугольника ABC с основанием AC равен 24 см. Вычислите длины высот BF и AD этого треугольника, если $DC = 2$ см (рис. 5, *в*).

Д а н о: ΔABC, $AD \perp BC$, $BF \perp AC$, $P_{ABC} = 24$ см, $DC = 2$ см.

В ы ч и с л и т ь: AD и BF.

Р е ш е н и е. Условие данной задачи определяет конструкции К1 и К2 в явном виде. Так как высоты AD и BF являются катетами прямоугольных треугольников BFC и ADC соответственно, то достаточно найти длины FC и BC. Пусть $FC = x$, а $BC = y$. Тогда по условию $2x + 2y = 24$ см или $x+y=12$ см. Треугольник ADC подобен треугольнику BFC, следовательно, $DC:FC=AC:BC$ или $2:x=2x:y$.

Из системы уравнений $\begin{cases} x+y=12, \\ y=x^2 \end{cases}$ находим $x=3$, $y=9$. Таким образом, $AC=6$ см, $BC=9$ см. Теперь

$$AD=\sqrt{AC^2-DC^2}=4\sqrt{2}\text{ (см)}$$

$$\text{и } BF=\sqrt{BC^2-FC^2}=6\sqrt{2}\text{ (см).}$$

О т в е т: $AD=4\sqrt{2}$ см, $BF=6\sqrt{2}$ см.

Задача 4. Около равнобедренного треугольника ABC с основанием AC описана окружность. Прямая, содержащая высоту AT, пересекает касательную, проходящую через вершину B, в точке F. Найдите длину отрезка BF, если высота AT делит высоту BD на отрезки $BO=m$ и $OD=n$ (рис. 5, *г*).

Д а н о: ΔABC, $AB=BC$, $AD\perp BC$, $BF\perp AC$, $OB=m$, $OD=n$.

Н а й т и: BF.

Р е ш е н и е. Условие задачи определяет конструкции К1 и К2 в явном виде. Треугольник ADO подобен треугольнику ATC, так как имеют общий острый угол. Аналогично треугольник ATC подобен треугольнику BDC. Таким образом, треугольник ADO подобен треугольнику BDA. Из подобия этих треугольников следует, что $AD:DB=OD:AD$ или $AD:(m+n)=n:AD$.

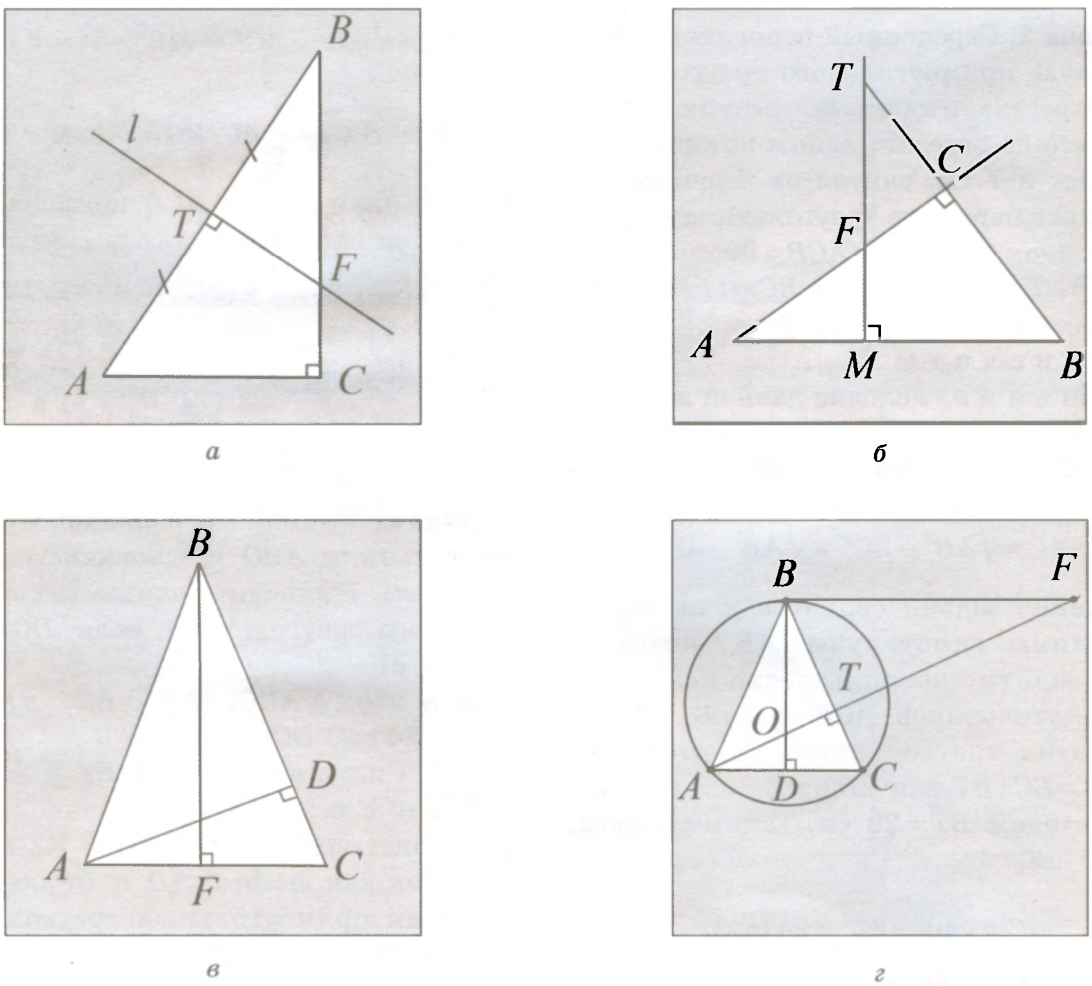


Рисунок 5

Отсюда находим $AD=\sqrt{n(m+n)}$. Треугольник AOD подобен треугольнику FBO, следовательно, $AD:BF=OD:OB$ или $\sqrt{n(m+n)}:BF=n:m$. Таким образом,

$$BF=\frac{m\sqrt{n(m+n)}}{n}.$$

Ответ: $BF=\dfrac{m\sqrt{n(m+n)}}{n}$.

Задача 5. Через середину M гипотенузы треугольника ACB проведена прямая, перпендикулярная к гипотенузе и пересекающая катет AC в точке K. Вычислите площадь треугольника AMK, если $AK=12{,}5$ см и $KC=3{,}5$ см. (Ответ: $37{,}5$ см^2.)

Задача 6. В прямоугольном треугольнике ACB из середины M катета AC проведён перпендикуляр MK к гипотенузе AB. Вычислите площадь треугольника AKM, если $AB=100$ см и $AM=30$ см. (Ответ: 216 см^2.)

Задача 7. Высоты BL и AF равнобедренного треугольника с основанием BC пересекаются в точке O, $AL=6$ см, $LC=4$ см. Вычислите длину отрезка AO. (Ответ: $3\sqrt{5}$ см.)

Задача 8. Высота AK равнобедренного треугольника ABC с основанием AC разбивает его на два треугольника так, что площадь треугольника AKB в два раза больше, чем площадь треугольника AKC. Найдите тангенс угла при основании треугольника. (Ответ: $\sqrt{5}$.)

Задача 9. Высота AK ромба $ABCD$ равна 12 см, его диагональ AC равна 15 см. Вычислите площадь ромба. (Ответ: 150 см^2.)

Рассмотренные конструкции можно использовать при решении ряда стереометрических задач. Приведём некоторые примеры.

Задача 10. Около шара описана правильная четырёхугольная пирамида $TABCD$. Длина перпендикуляра EM, проведённого из центра E шара к боковой грани TDC, равна 5 см, а длина перпендикуляра EK, проведённого из центра шара к ребру TC, равна 7 см. Вычислите высоту пирамиды.

Дано: $TABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида, $TM\perp(TDC)$, $TM=5$ см, $EK\perp TC$, $EK=7$ см. TO — высота ирамиды, TF — апофема грани TDC (рис. 6, *а*).

Решение. Так как E — центр вписанного шара, то $EO=EM=5$ см. Высота $TO=TE+EO=TE+5$. Пусть $TE=x$. Треугольник TOC подобен треугольнику TKE (конструкция К1), следовательно,

$\dfrac{EK}{OC}=\dfrac{TK}{TO}$ или $\dfrac{7}{OC}=\dfrac{\sqrt{x^2-49}}{x+5}$. Отсюда находим, что $OC=\dfrac{7(x+5)}{\sqrt{x^2-49}}$. Так как $ABCD$ — квадрат, то $OC^2=2OF^2$, а значит,

$$OF=\frac{7(x+5)}{\sqrt{2(x^2-49)}}.$$

Из подобия треугольников TOF и TME следует, что $\dfrac{OF}{EM}=\dfrac{TO}{TM}$ или

$$\frac{7(x+5)}{5\sqrt{2(x^2-49)}}=\frac{x+5}{\sqrt{x^2-25}}$$

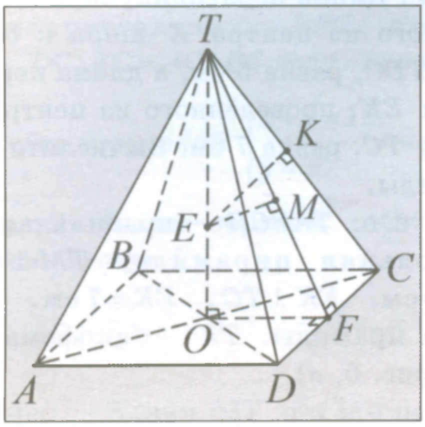
(конструкция К1). Следовательно, $x=35$ и $TO=40$ см.

Ответ: 40 см.

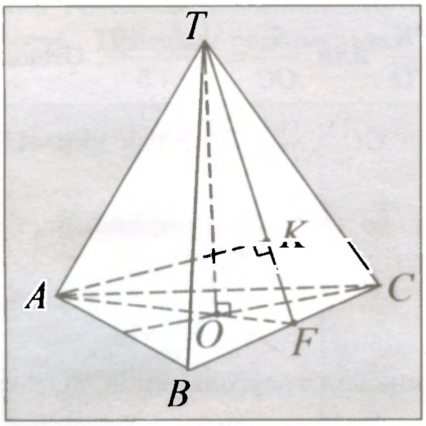
Задача 11. Сторона основания правильной треугольной пирамиды $TABC$ равна a, а высота AK, проведённая из вершины основания к боковой грани TBC, равна b. Найдите высоту TO пирамиды (рис. 6, *б*).

Дано: $TABC$ — правильная треугольная пирамида, $AB=a$, $TO\perp(ABC)$, $AK\perp(TBC)$, $AK=b$.

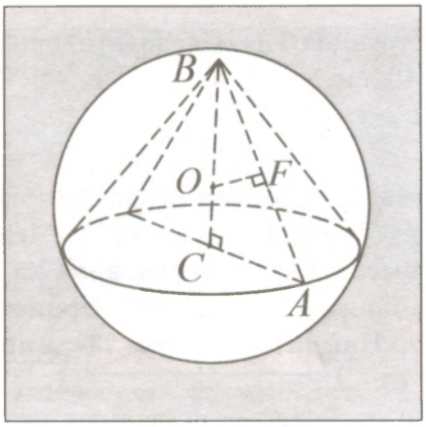
Найти: TO.



а



б



в

Рисунок 6

Р е ш е н и е. Точка K принадлежит апофеме TF пирамиды, $BF = FC$. Прямоугольные треугольники TOF и AKF подобны, так как имеют общий острый угол (конструкция К2). Из подобия этих треугольников следует, что $\frac{TO}{AK} = \frac{OF}{KF}$. Отсюда $TO = \frac{OF \cdot AK}{KF}$. Так как O — точка пересечения высот равностороннего треугольника, то

$$OF = \frac{1}{3}AF = \frac{1}{3}\sqrt{AB^2 - BF^2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

В прямоугольном треугольнике AKF катет $KF = \sqrt{AF^2 - AK^2} = \frac{\sqrt{3a^2 - 4b^2}}{2}$. Теперь находим $TO = \frac{ab}{\sqrt{3(3a^2 - 4b^2)}}$.

О т в е т: $TO = \frac{ab}{\sqrt{3(3a^2 - 4b^2)}}$.

Задача 12. Найдите радиус шара, описанного около конуса, если образующая конуса в k раз больше радиуса его основания r.

Д а н о: BA — образующая конуса, C — центр основания конуса, O — центр шара, описанного около конуса. $BA = kr$. R — радиус шара (рис. 6, *в*).

Н а й т и: R.

Р е ш е н и е. Центр O описанного шара лежит на серединном перпендикуляре OF к образующей AB, значит, $BF = FA$. Треугольник BCA подобен треугольнику BFO, так как имеют общий острый угол (конструкция К1). Следовательно, $\frac{BF}{BC} = \frac{BO}{BA}$. Отсюда $R = BO = \frac{BF \cdot BA}{BC}$. В прямоугольном треугольнике BCA катет

$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=r\sqrt{k^2-1}$. Теперь находим $R=\dfrac{BF\cdot BA}{BC}=\dfrac{k^2r}{2\sqrt{k^2-1}}$.

Ответ: $\dfrac{k^2r}{2\sqrt{k^2-1}}$.

Задача 13. Высота конуса в четыре раза больше радиуса шара, вписанного в этот конус. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если его образующая равна a. (Ответ: $\dfrac{\pi a^2}{3}$.)

Задача 14. В правильную четырёхугольную пирамиду вписан шар. Найдите радиус шара, если расстояние от его центра до вершины пирамиды равно a, а до бокового ребра — b. (Ответ: $\dfrac{ab}{\sqrt{2a^2-b^2}}$.)

Конструкция, состоящая из прямоугольных треугольников, имеющих равные острые углы, может быть использована при решении задач, в которых рассматривается окружность, вписанная в равнобедренный треугольник. Рассмотрим примеры решения таких задач.

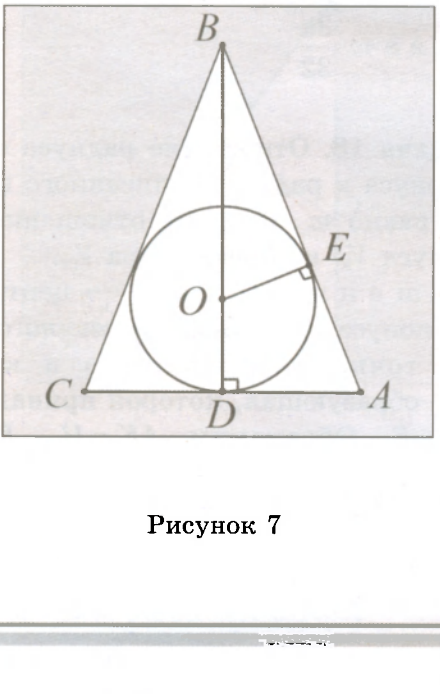


Рисунок 7

Задача 15. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC радиус вписанной окружности относится к длине основания как $1:4$. Найдите отношение боковой стороны к высоте, проведённой к основанию.

Дано: ΔABC — равнобедренный, BD — высота, O — центр вписанной окружности, E — точка касания окружности, $OE:AC=1:4$ (рис. 7).

Найти: $AB:BD$.

Решение. Так как радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной (конструкция К1), то треугольник ABD подобен треугольнику OBE. Из подобия этих треугольников следует, что $\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{BO}{BE}$. По условию $\dfrac{r}{AC}=\dfrac{1}{4}$, следовательно, $AC=4r$ и $AD=\dfrac{1}{2}AC=2r$. Пусть $BE=x$, тогда $AB=x+2r$, $BO=\sqrt{x^2+r^2}$, $BD=r+\sqrt{x^2+r^2}$. Теперь из уравнения $\dfrac{x+2r}{r+\sqrt{x^2+r^2}}=\dfrac{\sqrt{x^2+r^2}}{x}$ находим $x=\dfrac{4r}{3}$. В прямоугольном треугольнике BEO гипотенуза $BO=\sqrt{BE^2+EO^2}=\dfrac{5r}{3}$, а значит, $BD=\dfrac{8r}{3}$ и $AB=\dfrac{10r}{3}$. Следовательно, $AB:BD=\dfrac{10r}{3}:\dfrac{8r}{3}=5:4$.

Ответ: 5:4.

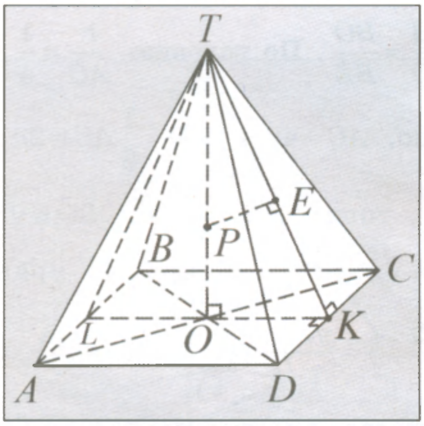
Задача 16. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC высота BK равна h, а радиус вписанной окружности равен r. Найдите основание данного треугольника. (Ответ: $\dfrac{2rh}{\sqrt{h(h-2r)}}$.)

В ряде случаев решение стереометрических задач сводится к рассмотрению окружности, вписанной равнобедренный треугольник, т. е. к использованию конструкции К1.

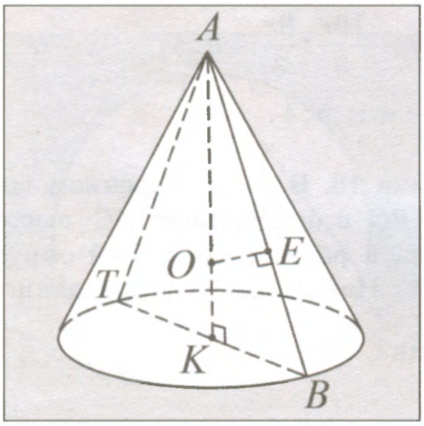
Задача 17. Около шара описана правильная четырёхугольная пирамида, высота которой в 4 раза больше диаметра шара. Найдите отношение объёма шара к объёму пирамиды.

Д а н о: $TABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида, O — центр основания, P — центр вписанного шара, E — точка касания шара и грани TDC, r — радиус шара, $TO = 8r$ (рис. 8, *а*).

Н а й т и: $V_{ш} : V_{пир}$.



а



б

Рисунок 8

Р е ш е н и е.

$$V_{ш} = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

$$V_{пир} = \frac{S_{ABCD} \cdot TO}{3} = \frac{8rAD^2}{3}.$$

Следовательно, $V_{ш} : V_{пир} = \dfrac{\pi r^2}{2AD^2}$. Для нахождения требуемого отношения необходимо найти зависимость между AD и r. Пусть TK — апофема. Рассмотрим сечение TLK, проходящее через высоту TO и апофему TK. Тогда точка E есть точка касания окружности с центром в точке O радиусом r, вписанной в равнобедренный треугольник TLK. Треугольник TEP подобен треугольнику TOK (конструкция К1), следовательно, $\dfrac{OK}{PE} = \dfrac{TK}{TP}$. $OK = \dfrac{AD}{2}$, $PE = r$, $TP = 7r$.

В прямоугольном треугольнике TOK гипотенуза $TK = \sqrt{OK^2 + TO^2} = \sqrt{\dfrac{AD^2}{4} + 64r^2}$. Таким образом,

$$\frac{\frac{AD}{2}}{r} = \frac{\sqrt{\frac{AD^2}{4} + 64r^2}}{7r}.$$

Из этого уравнения находим $AD = \dfrac{4r}{\sqrt{3}}$. Таким образом, $V_{ш} : V_{пир} = \dfrac{\pi r^2}{2AD^2} = \dfrac{3\pi}{32}$.

О т в е т: $\dfrac{3\pi}{32}$.

Задача 18. Отношение радиуса основания конуса к радиусу, вписанного в конус шара, равно m. Найдите отношение объёма конуса $V_{к}$ к объёму шара $V_{ш}$.

Р е ш е н и е. Пусть K — центр основания конуса, O — центр вписанного шара, E — точка касания шара и конуса, AB — образующая, которой принадлежит точка E. Обозначим $AK = H$, $KB = R$, $OE = r$, тогда $\dfrac{R}{r} = m$ (рис. 8, *б*). Так как

$V_к = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi r^2 m^2 H$ и $V_ш = \frac{4}{3}\pi r^3$, то $V_к : V_ш = \frac{B^2 H}{4r}$. Таким образом, необходимо найти зависимость между H и r. Рассмотрим осевое сечение TAB конуса. Тогда E — точка касания окружности с центром O и радиусом r, вписанной в равнобедренный треугольник ATB и $OE \perp AB$. Из подобия треугольников AEO и AKB следует, что $\frac{AO}{AB} = \frac{OE}{KB}$ или $\frac{H-r}{\sqrt{H^2+R^2}} = \frac{r}{R}$. Отсюда находим $H = \frac{2m^2 r}{m^2-1}$. Таким образом,

$$V_к : V_ш = \frac{B^2 H}{4r} = \frac{m^4}{2(m^2-1)}.$$

Ответ: $\frac{m^4}{2(m^2-1)}$.

Задача 19. Найдите радиус шара, вписанного в правильную четырёхугольную пирамиду, сторона основания которой равна a, а плоский угол при вершине — α. (Ответ: $\frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}$.)

Задача 20. Высота конуса равна 8 см, а длина образующей — 10 см. Вычислите радиуса шара, вписанного в конус. (Ответ: 3 см.)

Если условием задачи конструкции К1 или К2 в явном виде не заданы, то их можно проявить путём дополнения конструкции, заданной условием задачи, некоторыми отрезками.

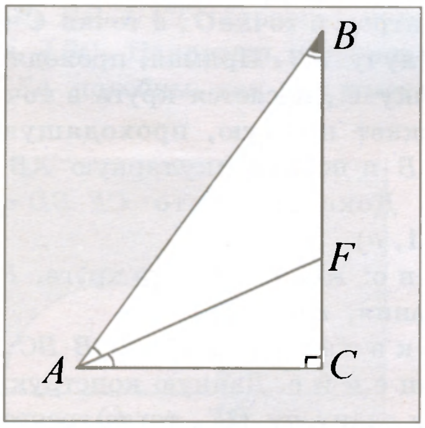
Задача 21. В прямоугольном треугольнике ACB биссектриса AF острого угла делит катет BC на отрезки $BF =$ 10 см и $CF =$ 6 см. Вычислите периметр этого треугольника.

Д а н о: ΔACB, $\angle ACB = 90°$, AF — биссектриса, $BF = 10$ см, $CF = 6$ см (рис. 9, *а*).

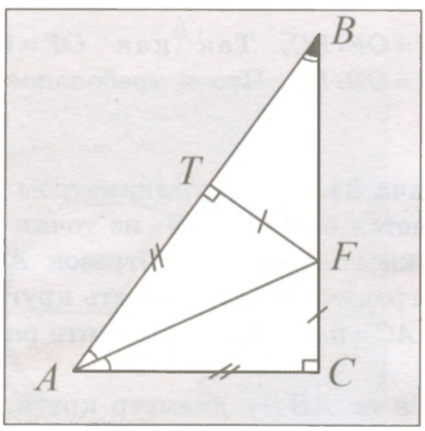
В ы ч и с л и т ь: P_{ACB}.

Р е ш е н и е. В данном случае дополним данную конструкцию перпендикуляром FT к гипотенузе. Это позволяет проявить конструкцию К1, элементами которой являются подобные треугольники BCA и BTF (рис. 9, *б*)

Из равенства прямоугольных треугольников ACF и ATF (по гипотенузе и острому углу) следует, что $FT = CF = 6$ см. Тогда в прямоугольном треугольнике BTF катет $BT = \sqrt{BF^2 - TF^2} = 8$ см. Из подобия треугольников BCA и BTF следует, что



а



б

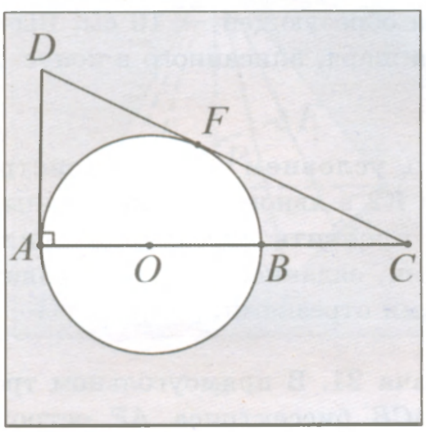
Рисунок 9

$AB:BF = BC:BT$ или $(AT+8):10=16:8$. Таким образом, $AT=12$ см. Из равенства прямоугольных треугольников ACF и ATF следует, что $AC=AT=12$ см. Теперь находим $P_{ACB} = AB+BC+AC=48$ см.

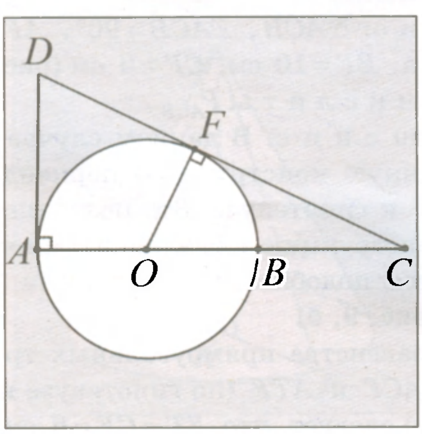
Ответ: 48 см.

Задача 22. Отрезок AB — диаметр круга с центром в точке O, а точка C принадлежит лучу AB. Прямая, проходящая через точку C, касается круга в точке F и пересекает прямую, проходящую через точку A и перпендикулярную AB, в точке D. Докажите, что $DF \cdot FC = AO \cdot AC$ (рис. 10, *а*).

Дано: AB — диаметр круга, F — точка касания, $AD \perp AB$.



а



б

Рисунок 10

Доказать: $DF \cdot FC = AO \cdot AC$.

Решение. Конструкцию, заданную условием задачи, дополним радиусом OF, проведённым в точку касания. Тогда получим конструкцию К1, состоящую из подобных треугольников CDA и COF (рис.10, *б*). Из подобия этих треугольников следует, что $\frac{AD}{AC}=\frac{OF}{FC}$ или $AD \cdot FC = OF \cdot AC$. Отрезки касательных, проведённых из одной точки, равны, значит, $AD = DF$. Радиусы круга равны, следовательно, $OF = AO$. Таким образом, $DF \cdot FC = AO \cdot AC$. Что и требовалось доказать.

Задача 23. Отрезок AB — диаметр круга с центром в точке O, а точка C принадлежит лучу AB. Прямая, проходящая через точку C, касается круга в точке F и пересекает прямую, проходящую через точку B и перпендикулярную AB, в точке D. Докажите, что $CF \cdot BD = OB \cdot BC$ (рис. 11, *а*).

Дано: AB — диаметр круга, F — точка касания, $BD \perp AB$.

Доказать: $CF \cdot BD = OB \cdot BC$.

Решение. Данную конструкцию дополним радиусом OF, тогда треугольники COF и CDB подобны (конструкция К1) (рис. 11, *б*) Из подобия указанных треугольников следует, что $\frac{OF}{CF}=\frac{BD}{BC}$ или $CF \cdot BD = OF \cdot BC$. Так как $OF = OB$, то $CF \cdot BD = OB \cdot BC$. Что и требовалось доказать.

Задача 24. К кругу, диаметром которого является отрезок AB, из точки C проведена касательная CB. Отрезок AC пересекает граничную окружность круга в точке F, $AC = m$, $AF = n$. Найдите радиус R круга.

Дано: AB — диаметр круга, CB — касательная, $AC = m$, $AF = n$ (рис. 12, *а*).

Найти: R — радиус круга.

Решение. Дополним конструкцию, которая задана условием задачи, отрезком

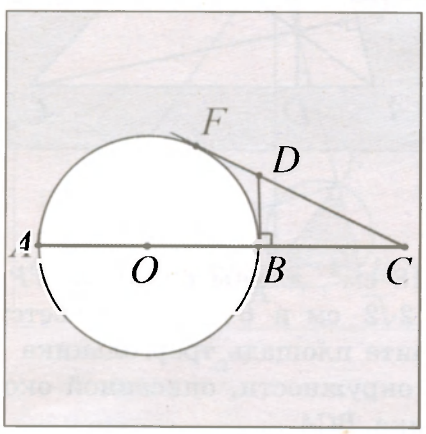
BF. Так как угол AFB опирается на диаметр, то $BF \perp AC$. Треугольники ABC и AFB подобны (конструкция К1), так как имеют общий острый угол, следовательно, $\frac{AB}{AC}=\frac{AF}{AB}$ или $AB^2=AF\cdot AC$. Таким образом, $R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{mn}}{2}$.

Ответ: $R=\frac{\sqrt{mn}}{2}$.

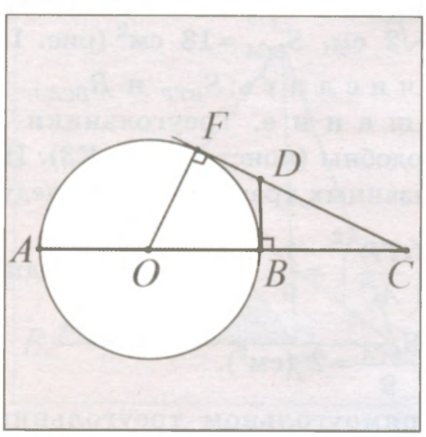
При решении ряда задач полезны конструкции, элементами которых являются прямоугольные треугольники с общим острым углом, катетами которых являются высоты AF, BD и CT остроугольного треугольника ABC. Например, треугольники CDB и CFA подобны, так как имеют общий острый угол C (рис. 13, *а*). Из подобия треугольников CDB и CFA следует, что $\frac{CF}{CA}=\frac{CD}{CB}$. Следовательно, треугольники CAB и CDF подобны по второму признаку подобия — ***конструкция К3.*** Аналогично треугольник CAB подобен треугольникам TFB и TAD — ***конструкция К4*** (рис. 13, *б*, *в*). Если O — точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC, то около каждого из четырёхугольников $BTOF$, $CFOD$ и $ADOT$ можно описать окружность (рис. 13, *г*).

Рассмотрим примеры использования указанных конструкций для решения задач.

Задача 25. В остроугольном треугольнике ABC отрезки AF и CT — его высоты,

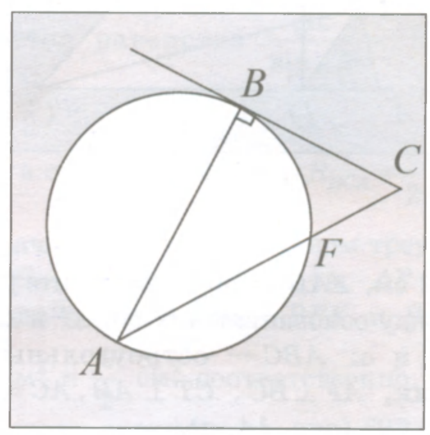


а

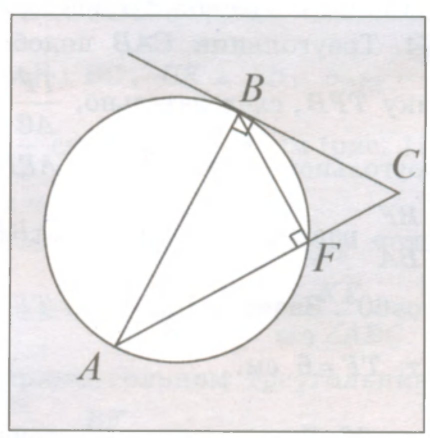


б

Рисунок 11



а



б

Рисунок 12

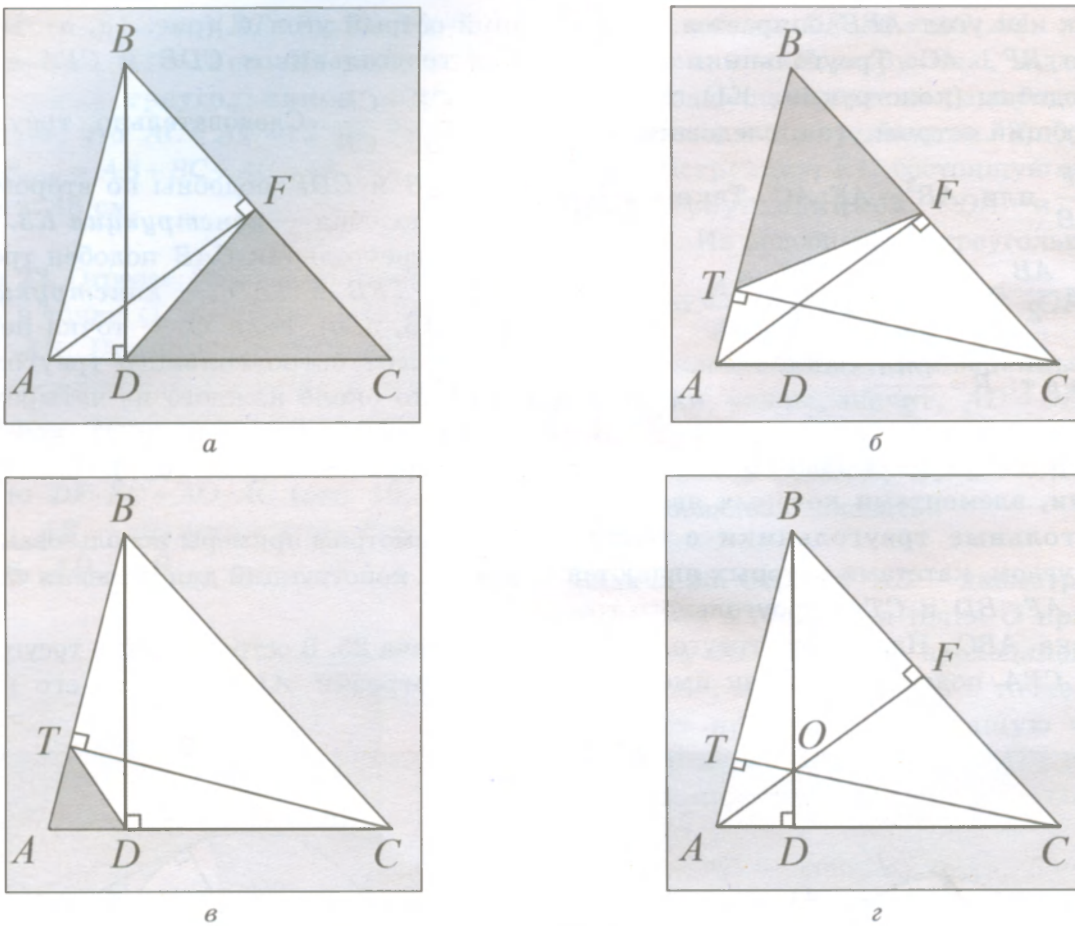


Рисунок 13

$AC = 12$ см, $\angle ABC = 60°$. Вычислите расстояние между основаниями высот AF и CT.

Д а н о: ABC — остроугольный треугольник, $AF \perp BC$, $CT \perp AB$, $AC = 12$ см, $\angle ABC = 60°$ (рис. 14, *а*).

В ы ч и с л и т ь: TF.

Р е ш е н и е. Воспользуемся конструкцией К4. Треугольник CAB подобен треугольнику TFB, следовательно, $\frac{TF}{AC} = \frac{BF}{BA}$. В прямоугольном треугольнике AFB отношение $\frac{BF}{BA}$ равно косинусу угла ABF, т. е. $\frac{BF}{BA} = \cos 60°$. Значит, $\frac{TF}{12} = \frac{1}{2}$ и $TF = 6$ см.

О т в е т: $TF = 6$ см.

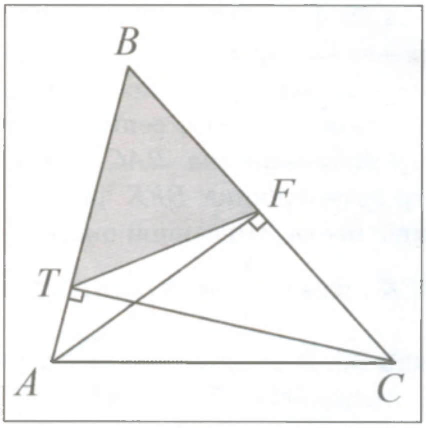
Задача 26. В остроугольном треугольнике BCA отрезки AP и CT — высоты треугольника. Площадь треугольника BCA равна 18 см^2, длины отрезков TP и AC равны $2\sqrt{2}$ см и $6\sqrt{2}$ см соответственно. Вычислите площадь треугольника BTP и радиус окружности, описанной около треугольника BCA.

Д а н о: BCA — остроугольный треугольник, $AP \perp BC$, $CT \perp AB$, $TP = 2\sqrt{2}$ см, $AC = 6\sqrt{2}$ см, $S_{BCA} = 18$ см^2 (рис. 14, *б*).

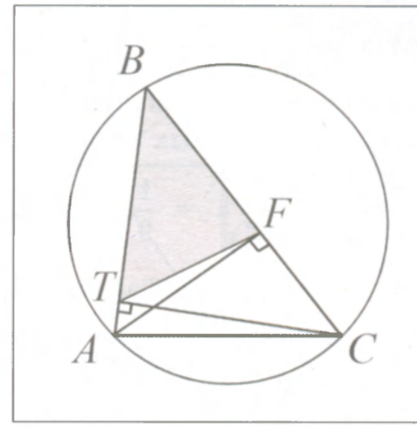
В ы ч и с л и т ь: S_{BTP} и R_{BCA}.

Р е ш е н и е. Треугольники BTP и BCA подобны (конструкция К3). Из подобия указанных треугольников следует, что $\frac{S_{BTP}}{S_{BCA}} = \left(\frac{TP}{AC}\right)^2 = \frac{1}{9}$. Отсюда находим, что $S_{BTP} = \frac{S_{BCA}}{9} = 2$ (см^2).

В прямоугольном треугольнике APB $\cos\angle B = \frac{BP}{AB} = \frac{TP}{AC} = \frac{1}{3}$, а $\sin\angle B = \sqrt{1-\cos^2\angle B} =$

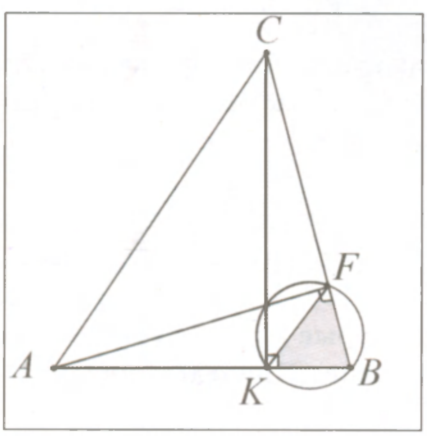


а

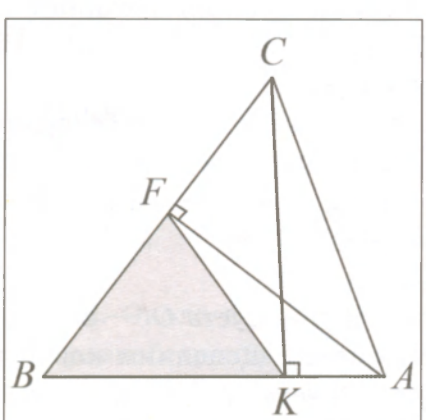


б

Рисунок 14



а



б

Рисунок 15

$=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Так как для радиуса описанной около треугольника BCA окружности выполняется равенство $\frac{AC}{\sin\angle B}=2R_{BCA}$, то $R_{BCA}=\frac{9}{2}$ см.

Ответ: $S_{BTP}=2$ см^2, $R_{BCA}=\frac{9}{2}$ см.

Задача 27. В остроугольном треугольнике BAC проведены высоты AF и CK. Площади треугольников BFK и BAC равны $\frac{1}{2}$см^2 и $\frac{9}{2}$ см^2 соответственно. Вычислите радиус окружности, описанной около треугольника BFK, если $AC=3\sqrt{2}$ см.

Дано: ABC — остроугольный треугольник, $AF\perp BC$, $CK\perp AB$, $S_{BFK}=\frac{1}{2}$ см^2, $S_{BAC}=\frac{9}{2}$ см^2, $AC=3\sqrt{2}$ см (рис. 15, *а*).

Вычислить: R_{BFK}.

Решение. Радиус R_{BFK} можем найти из равенства $2R_{BFK}=\frac{KF}{\sin\angle ABC}$.

В прямоугольном треугольнике AFB $\cos\angle ABC=\frac{BF}{AB}$. Так как треугольники BFK и BAC подобны (конструкция К1), то $\cos\angle ABC=\frac{BF}{AB}=\frac{KF}{AC}=\frac{KF}{3\sqrt{2}}$. Площади подобных треугольников относятся как квадраты соответственных сторон, следовательно, $\frac{S_{BFK}}{S_{BAC}}=\left(\frac{KF}{AC}\right)^2=\frac{1}{9}$. Отсюда находим, что $KF=\sqrt{2}$ см. Таким образом, $\cos\angle ABC=\frac{KF}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{3}$ и $\sin\angle ABC=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Теперь $R_{BFK}=\frac{KF}{2\sin\angle ABC}=\frac{3}{4}$ (см).

О т в е т: $R_{BFK}=\frac{3}{4}$ см.

Задача 28. В остроугольном треугольнике BAC проведены высоты AF и CK. Вычислите длину отрезка KF, если известно, что периметр треугольника BAC равен 5 см, периметр треугольника BFK равен 3 см, а радиус окружности, описанной около треугольника BAC, равен 1 см.

Д а н о: BAC — остроугольный треугольник, $AF\perp BC$, $CK\perp AB$, $P_{BAC}=5$ см, $P_{BFK}=3$ см, $R_{BAC}=1$ см (рис. 15, *б*).

В ы ч и с л и т ь: KF.

Р е ш е н и е. Из подобия треугольников BFK и BAC (конструкция К4) следует, что $\frac{KF}{AC}=\frac{P_{BFK}}{P_{BAC}}=\frac{3}{5}$. Следовательно, $KF=\frac{3}{5}AC$. Пусть $\angle ABC=\alpha$ на основании следствия из теоремы синусов $AC=2R_{BAC}\cdot\sin\alpha=2\sin\alpha$. В прямоугольном треугольнике BFA $\cos\alpha=\frac{BF}{BA}$. Так как треугольники BFK и BAC подобны, то $\frac{BF}{BA}=\frac{P_{BFK}}{P_{BAC}}=\frac{3}{5}$. Таким образом, $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, а значит, $\sin\alpha=\frac{4}{5}$. Теперь находим $AC=10\sin\alpha=\frac{8}{5}$ см и $KF=\frac{3}{5}AC=\frac{24}{25}$ (см).

О т в е т: $KF=\frac{24}{25}$ см.

Задача 29. В остроугольном треугольнике BAC проведены высоты AF и CK. Вычислите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $AKFC$, если известно, что периметр треугольника BAC равен 15 см, периметр треугольника BFK равен 9 см, радиус окружности, описанной около треугольника BFK, равен $\frac{9}{5}$ см. (Ответ: 2,4 см.)

Задача 30. В остроугольном треугольнике BAC проведены высоты AK и CF. Площадь треугольника BAC равна 32 см^2, площадь треугольника $AFKC$ равна 24 см^2, а радиус окружности, описанной около треугольника BAC, равен $\frac{8}{\sqrt{3}}$ см. Вычислите длину отрезка KF. (Ответ: 4 см.)

Предыдущие примеры задач показывают полезность рассмотрения конструкций, содержащих прямоугольные треугольники с общим острым углом.

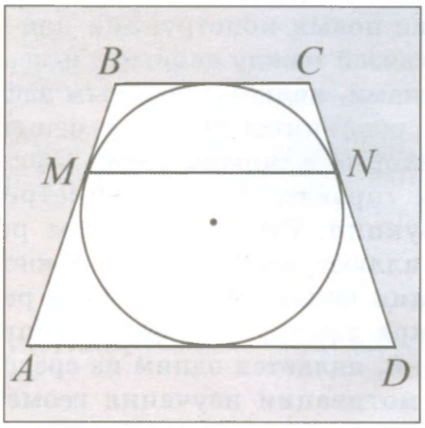
В общем случае иногда полезно создавать конструкции, содержащие прямоугольные треугольники, у которых есть равные острые углы, но не обязательно совпадающие. Приведём примеры таких задач.

Задача 31. Около окружности радиуса r описана равнобедренная трапеция. Расстояние между точками касания окружности и боковых сторон равно m. Найдите боковую сторону трапеции.

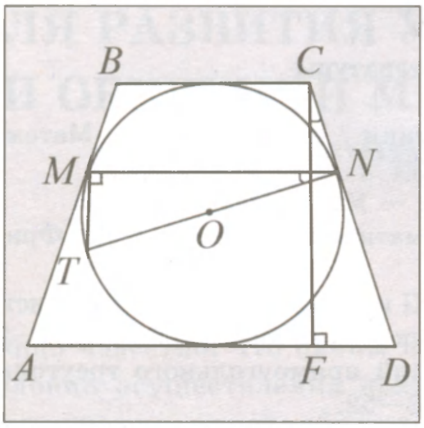
Д а н о: $ABCD$ — равнобедренная трапеция, $AB=CD$, M и N — точки касания окружности с боковыми сторонами, $MN=m$ (рис. 16, *а*).

Н а й т и: CD.

Р е ш е н и е. Пусть O — центр вписанной окружности. Дополним конструкцию, заданную условием задачи, высотой CF трапеции и диаметром NT окружности (рис. 16, *б*). Тогда угол TMN в треугольнике TMN равен 90° (опирается на диаметр).

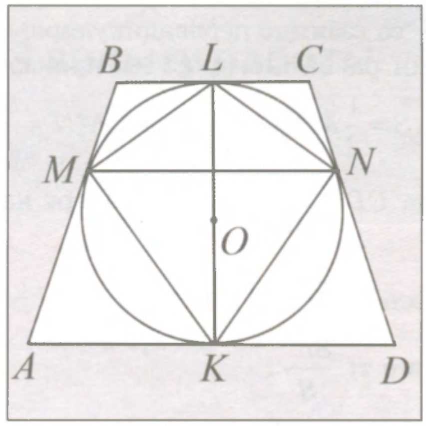


а

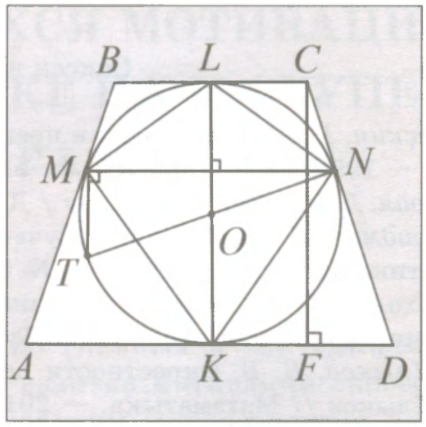


б

Рисунок 16



а



б

Рисунок 17

Прямоугольные треугольники MNT и FCD подобны, так как у них углы C и N равны (как углы с соответственно перпендикулярными сторонами). Из подобия треугольников следует, что $\frac{TN}{MN}=\frac{CD}{CF}$ или $\frac{2r}{m}=\frac{CD}{2r}$. Следовательно, $CD=\frac{4r^2}{m}$.

О т в е т: $\frac{4r^2}{m}$.

Задача 32. Около окружности радиуса r описана равнобедренная трапеция. Площадь четырёхугольника, вершинами которого служат точки касания окружности и сторон трапеции, равна S. Найдите площадь трапеции.

Д а н о: $ABCD$ — равнобедренная трапеция, $AB=CD$, M, N, L и K — точки касания окружности с боковыми сторонами и основаниями, $S_{KMLN}=S$ (рис. 17, *а*).

Н а й т и: S_{ABCD}.

Р е ш е н и е. Площадь трапеции $S_{ABCD}=\frac{BC+AD}{2}\cdot 2r=\ (BC+AB)\cdot r$. Так как равнобедренная трапеция описана около окружности, то $BC+AB=2CD$. Таким образом, $S_{ABCD}=2CD\cdot r$. Дополним конструкцию высотой CF и диаметром NT (рис. 17, *б*). Из подобия треугольников MNT и FCD (углы MNT и FCD равны как углы с соответственно перпендикулярными сторонами) следует, что $\frac{TN}{MN}=\frac{CD}{CF}$ или $\frac{2r}{MN}=\frac{CD}{2r}$. Следовательно, $CD=\frac{4r^2}{MN}$. Площадь четырёхугольника

$KMLN$ со взаимно перпендикулярными диагоналями равна половине их произведения, значит, $S=\frac{1}{2}MN\cdot 2r$. Отсюда $MN=\frac{S}{r}$.

Тогда $CD=\frac{4r^2}{MN}=\frac{4r^3}{S}$. Теперь находим, что $S_{ABCD}=2CD\cdot r=\frac{8r^4}{S}$.

Ответ: $\frac{8r^4}{S}$.

Использование базисных, типовых, опорных геометрических конструкций и создание новых конструкций для нахождения связей между данными и искомыми величинами, является важным элементом поиска различных способов решения задач, которые в определённой степени являются «производными» геометрической конструкции. Систематическое решение задач, иллюстрирующих возможность нахождения более эффективных решений благодаря выбору соответствующих конструкций, является одним из средств усиления мотивации изучения геометрии и развития конструктивной деятельности учащихся.

Список использованной литературы

1. *Бескин, Н. М.* Роль задач в преподавании математики / Н. М. Бескин // Математика в школе. — 1992. — № 4-5. — С. 3—5.
2. *Пойя, Д.* Как решать задачу / Д. Пойя. — 2-е изд. — М. : Учпедгиз, 1961.
3. *Фридман, Л. М.* Методика обучения решению математических задач / Л. М. Фридман // Математика в школе. — 1991. — № 5. — С. 59—63.
4. *Тухолко, Л. Л.* Методика обучения геометрии в X—XI классах, развивающего конструктивную деятельность учащихся / Л. Л. Тухолко // Матэматыка. — 2016. — № 6. — С. 3—26.
5. *Шлыков, В. В.* Окрестности опорных соотношений прямоугольного треугольника / В. В. Шлыков // Матэматыка. — 2016. — № 3. — С. 38—52.