УДК 372.851+51

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТРУДНЫХ РАЗДЕЛОВ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ В УНИВЕРСИТЕТАХ

© А. А. Черняк[1], С. А. Богданович[2]

[1]д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математики и методики преподавания математики, arkcharniak@tut.by, Белорусский государственный педагогический университета имени Максима Танка, г. Минск, Беларусь
[2]канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики и методики преподавания математики, bosead@mail.ru, Белорусский государственный педагогический университета имени Максима Танка, г. Минск, Беларусь

Изложены основные положения, которые составляют основу разработанного методического комплекса для университетов по проведению практических и лабораторных занятий по наиболее трудным разделам высшей математики с использованием систем компьютерной математики.

***Ключевые слова**: инновационный подход, практические и лабораторные занятия по высшей математике, системы компьютерной математики, Mathcad.*

Стремительное развитие компьютерных технологий бросает вызов консервативным подходам и формам преподавания математики. Многие математические расчеты, на которые еще лет 20 назад могли уйти месяцы напряженной работы, сегодня выполняются за считанные минуты с помощью систем компьютерной математики (сокращенно, СКМ) [2, 3].

Однако фанатизм в использовании новых технологий и полная замена ими классических форм преподавания, в угоду моде времени, так же вредно, как и замена калькулятором таблицы умножения [1]. Избежать ошибок в злоупотреблении СКМ, на наш взгляд, можно, если придерживаться следующих трех принципов:

1. СКМ должно полностью вытеснить из обращения вычисления «столбиком», длительные и утомительные выписывания мелом на доске скучных и малополезных преобразований. Степень автоматизации вычислений должна быть достаточно высокой, чтобы полностью исключить рутинные и неэффективные выкладки, но не настолько, чтобы заслонить от студента идею алгоритма или суть метода, лишив его возможности научиться решать «вручную» на листе бумаги задачи в упрощенной формулировке. При этом решения некоторых задач могут быть комплексными, когда отдельные этапы рассматриваются «вручную», а наиболее трудоемкие — на компьютере.

2. Процедуры для реализации первого принципа должны быть заранее разработаны преподавателями и затем, с помощью специальных встроенных средств, «скрыты» на рабочих листах компьютерного документа.

3. Завершать изучение той или иной темы должна заранее разработанная процедура, позволяющая студенту в условиях своего персонального (домашнего) компьютера осуществлять быструю проверку результатов выполнения домашних заданий и самостоятельной контролируемой работы по данной теме без какого-либо участия преподавателя.

Для иллюстрации описанных выше принципов рассмотрим два характерных примера применения СКМ на практических занятиях по высшей математике. Данные примеры являются фрагментами разработанного нами методического комплекса по проведению практических и лабораторных занятий по наиболее трудным разделам алгебры, геометрии и математического анализа на физико-математических специальностях педагогических университетов с использованием интерактивной доски и СКМ Mathcad.

1. Практическое задание для «ручного счета»: привести уравнение $x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y - 5 = 0$ к каноническому виду, найдя матрицу ортогонального преобразования, и определить вид линии второго порядка, заданной этим уравнением.

После выполнения задания студенту предлагается с помощью Mathcad проверить свои вычисления и изобразить на координатной плоскости данную фигуру в новой системе координат.

Для этого, всего-то, надо открыть авторскую программу «Канонические уравнения 2-го порядка» и ввести исходные данные (см. рисунок 1): левую часть $f(x, y)$ уравнения $x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y - 5 = 0$, матрицы коэффициентов A и B:

$$f(x,y) := 4x \cdot y + y^2 + x^2 + 4x + 2y - 5 \qquad A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Рисунок 1 – Ввод исходных данных

А дальше Mathcad, с помощью скрытых авторских процедур, автоматически находит собственные значения матрицы квадратичной формы (см. рисунок 2), ортогональный базис подпространства собственных векторов (см. рисунок 3), каноническое уравнение (см. рисунок 4) и, что самое трудоемкое, график фигуры второго порядка в новых координатах (см. рисунок 5):

$$Sz := \mathrm{eigenvals}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad Sv := \mathrm{eigenvecs}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Рисунок 2 – Собственные значения

$$BasOrt := \mathrm{Normali}(Sv) \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Рисунок 3 – Ортогональный базис

$$F(X,Y) \rightarrow 3 \cdot Y^2 - X^2 - 6$$

Рисунок 4 – Каноническое уравнение

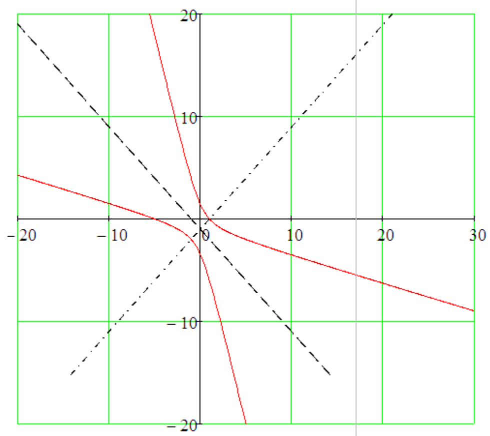

Рисунок 5 – График фигуры

А теперь посмотрите на рисунке 6 и оцените работу, которую пришлось проделать по разработке вспомогательных процедур для данного задания, скрытых от взгляда студентов на рабочем листе Mathcad-документа:

$$G(X,Y) := (X\ \ Y)\cdot BasOrt^{-1}\cdot A\cdot BasOrt\cdot\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} + B\cdot BasOrt\cdot\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} + f(0,0)\ \begin{vmatrix}\text{simplify}\\ \text{expand}\end{vmatrix} \rightarrow 3\cdot Y^2 - \sqrt{2}\cdot X - X^2 + 3\cdot\sqrt{2}\cdot Y - 5$$

$$G1(X,Y) := B\cdot BasOrt\cdot\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\ \text{simplify} \rightarrow 3\cdot\sqrt{2}\cdot Y - \sqrt{2}\cdot X \qquad G2(X,Y) := (X\ \ Y)\cdot BasOrt^{-1}\cdot A\cdot BasOrt\cdot\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\ \text{simplify} \rightarrow 3\cdot Y^2 - X^2$$

$$Zamena(X,Y) := \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} + Zame(G1,G2) \rightarrow \begin{pmatrix}X - \frac{\sqrt{2}}{2}\\ Y - \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} \qquad F(X,Y) := G(X,Y)\ \begin{vmatrix}\text{substitute}, X = Zamena(X,Y)_1\\ \text{substitute}, Y = Zamena(X,Y)_2\end{vmatrix} \rightarrow 3\cdot Y^2 - X^2 - 6$$

$$y(x) := f(x,y) = 0\ \text{solve}, y \rightarrow \begin{pmatrix}\sqrt{3}\cdot\sqrt{x^2+2} - 2\cdot x - 1\\ -2\cdot x - \sqrt{3}\cdot\sqrt{x^2+2} - 1\end{pmatrix}$$

$$L(X,Y) := BasOrt\cdot Zamena(X,Y)\ \text{simplify} \rightarrow \begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}\cdot(X-Y)}{2}\\ \frac{\sqrt{2}\cdot X}{2} + \frac{\sqrt{2}\cdot Y}{2} - 1\end{bmatrix}$$

$$g1(t) := L(t,0)_1 \qquad h1(t) := L(t,0)_2 \qquad g2(t) := L(0,t)_1 \qquad h2(t) := L(0,t)_2$$

Рисунок 6 – Вспомогательные процедуры

Теперь рассмотрим задачу из математического анализа.

2. Для функции $f(x)=\sin x^2$, определенной на отрезке [0; 0,5], вычислить суммы Дарбу для произвольных разбиений отрезка интегрирования $[a; b]$ n точками и проиллюстрировать их геометрический смысл; дать наглядное изображение того, как меняются суммы Дарбу относительно интеграла $\int_a^b f(x)dx$; определить наименьшее значение n, при котором разности между верхними и нижними суммами Дарбу совпадающих разбиений, становятся меньше заданной точности e=0,01.

Откройте авторскую программу «Суммы Дарбу». Введите исходные данные: функцию $f(x)$, отрезок $[a; b]$, параметр e (см. рисунок 7), задающий точность приближения сумм Дарбу к значению интеграла:

$$b := 0.5 \quad a := 0 \qquad f(x) := \sin\left(x^2\right) \qquad e := 0.01$$

Рисунок 7 – Ввод исходных данных

Отметим, что в скрытой области все разбиения отрезка [*a*; *b*] генерируются встроенным в Mathcad датчиком равномерно распределенных случайных чисел runif(n,a,b).

С помощью меню Инструменты (Tools) вызвать диалоговое окно Анимация (Animation) → Запись (Write) и выделить методом «Лассо» всю рабочую область программы (см. рисунок 8):

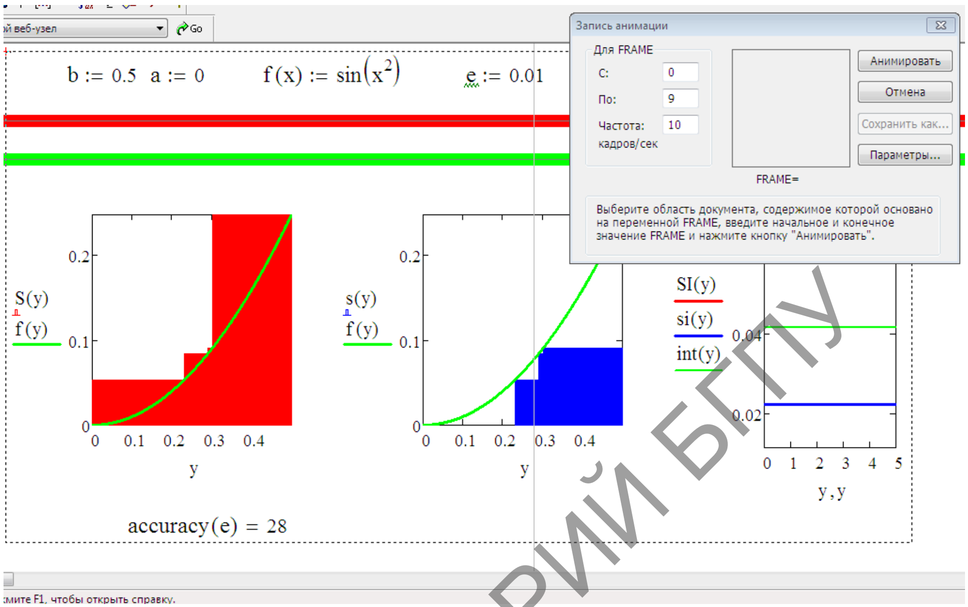

Рисунок 8 – Выделение методом «Лассо» всей рабочей области программы

Затем надо задать параметры (см. рисунок 9) для встроенной переменной FRAME: указать максимальное значение *n* для генерируемых разбиений отрезка [0; 0,5] и частоту кадров анимации:

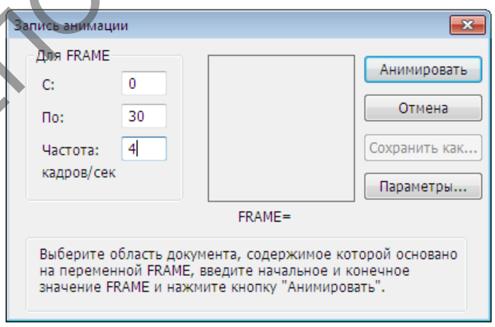

Рисунок 9 – Задание параметров для встроенной переменной FRAME

В данном случае максимальное значение *n* выбрано равным 30, а частота кадров — равной 4.

Нажмите на кнопку Анимировать (Animate) и дождитесь, когда появится проигрыватель (см. рисунок 10), с помощью которого можно наблюдать геометрическую иллюстрацию сумм Дарбу и их приближение к значению интеграла от заданной функции:

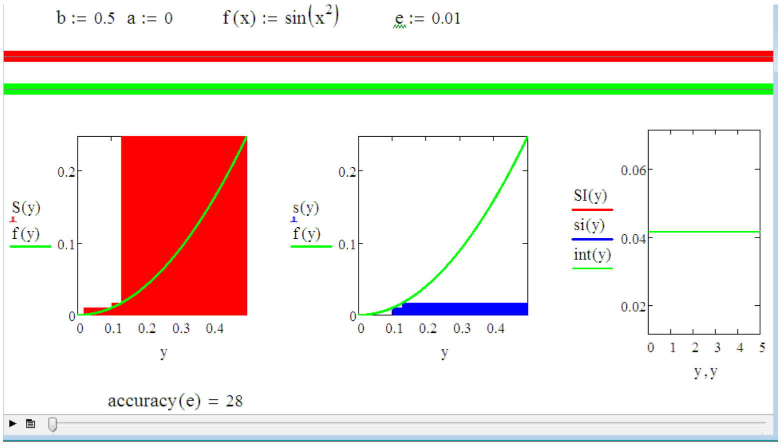

Рисунок 10 – Проигрыватель

Запустите проигрыватель и — по мере увеличения числа точек разбиения n — вы увидите (см. рисунок 11):

1) на левом графике красную область (верхняя сумма Дарбу), граница которой будет постепенно приближаться к кривой $f(x)=\sin x^2$ сверху;

2) на среднем графике синюю область (нижняя сумма Дарбу), граница которой будет постепенно приближаться к кривой $f(x)=\sin x^2$ снизу;

3) на правом графике три полосы: зеленая соответствует значению интеграла от заданной функции, красная — текущему значению верхней суммы Дарбу, синяя — текущему значению нижней суммы Дарбу.

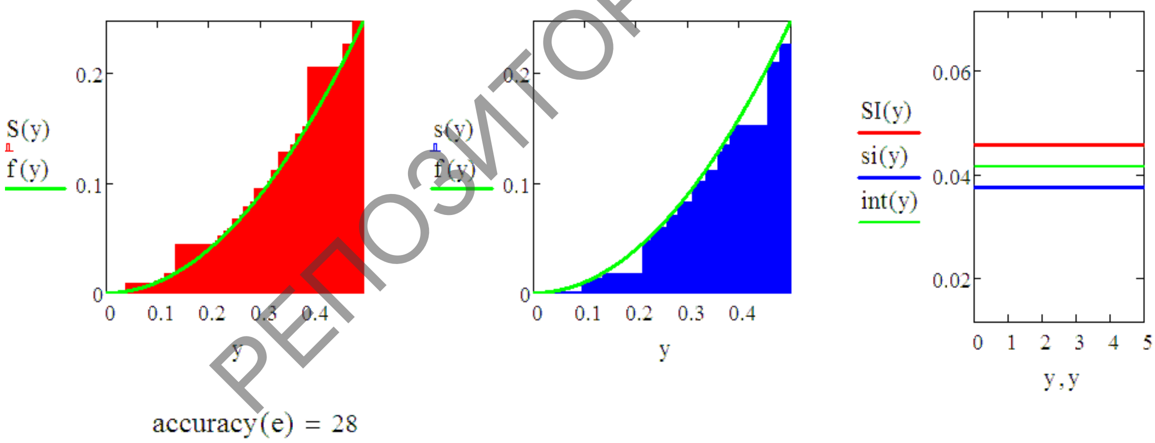

Рисунок 11 – Конечный результат

Для достижения точности e=0,01, как мы видим по значению accuracy(e), в данном случае достаточно было 28 итераций.

Опять-таки, посмотрите на рисунок 12 и 13 и оцените работу, которую пришлось проделать по разработке вспомогательных процедур для данного задания, скрытых от взгляда студентов на рабочем листе Mathcad-документа:

$$T := \mathrm{csort}(\mathrm{runif}(N, a, b), 0) \qquad N := 4 + \mathrm{FRAME}$$

$$x_0 := a \quad x_N := b \quad i := 1..N-1 \quad x_i := T_{i-1}$$

$$s(y) := \begin{array}{|l} \text{for } i \in 1..N \\ \quad f(x_{i-1}) \text{ if } x_{i-1} \le y \le x \end{array} \qquad S(y) := \begin{array}{|l} \text{for } i \in 1..N \\ \quad f(x_i) \text{ if } x_{i-1} \le y \le x_i \end{array}$$

$$mi := \min(f(a), f(b)) \qquad ma := \max(f(a), f(b))$$

$$ST(x) := \sum_{i=1}^{N} \left[f(x_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) \right] \qquad st(x) := \sum_{i=1}^{N} \left[f(x_{i-1})\cdot(x_i - x_{i-1}) \right]$$

$$SI(y) := \mathrm{if}(0 \le y \le 5, ST(x), 0) \qquad si(y) := \mathrm{if}(0 \le y \le 5, st(x), 0)$$

$$\mathrm{int}(y) := \mathrm{if}\left(0 \le y \le 5, \int_a^b f(x)\, dx, 0\right)$$

Рисунок 12 – Вспомогательные процедуры

$$\mathrm{accuracy}(e) := \begin{array}{|l} N \leftarrow 3 \\ r \leftarrow e + 100 \\ \text{while } r > e \\ \quad \begin{array}{|l} T \leftarrow \mathrm{csort}(\mathrm{runif}(N, a, b), 0) \\ x_0 \leftarrow a \\ x_N \leftarrow b \\ \text{for } i \in 1..N-1 \\ \quad x_i \leftarrow T_{i-1} \\ B \leftarrow \sum_{i=1}^{N} \left[f(x_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) \right] \\ A \leftarrow \sum_{i=1}^{N} \left[f(x_{i-1})\cdot(x_i - x_{i-1}) \right] \\ r \leftarrow B - A \\ N \leftarrow N + 5 \end{array} \\ N \end{array}$$

Рисунок 13 – Определение наименьшего значения *n*

Библиографический список

[1] Черняк А. А., Богданович С. А., Василец С. И. Использование систем компьютерной математики в лабораторном практикуме по теории вероятностей в процессе обучения высшей математике / Материалы Республиканской научно-практической конференции. “Повышение эффективности практической подготовленности будущего учителя к профессиональной деятельности”. Минск, 23 ноября 2012 г. / Минск, БГПУ, 2013. – С. 367-370.

[2] Черняк А. А., Черняк Ж. А., Василец С. И. Математика для экономистов на базе Mathcad. – БХВ-Петербург, 2016. – 495 с.
[3] Черняк А. А., Черняк Ж. А., Доманова Ю. А. Высшая математика на базе Mathcad. Общий курс. – СПб: БХВ, 2004. – 593 с.