

Виды учебных моделей

М. А. УРБАН,

доцент кафедры естественнонаучных дисциплин БГПУ им. М. Танка,
доктор педагогических наук, доцент

В статье рассматривается классификация моделей, которая разработана для учебного пособия по математике авторов Г. Л. Муравьевой и М. А. Урбан, предлагаются примеры моделей разных видов из учебных пособий для 1-го и 2-го классов, даются ответы на вопросы, часто задаваемые учителями начальных классов.

Ключевые слова: начальное обучение математике, учебная модель, классификация учебных моделей, учебное моделирование, умение моделировать.

The article discusses the classification of models, which was developed for a textbook in mathematics by the authors G. L. Muravyova and M. A. Urban; offers examples of different types of models from tutorials for the first and second grades. The article provides answers to frequently asked questions by primary school teachers about the peculiarities of using educational models in mathematics lessons.

Keywords: primary mathematics education, educational model, classification of educational models, educational modeling, skill to model.

С 2019 года в белорусских школах на уроках математики начали использовать учебные пособия авторов Г. Л. Муравьевой и М. А. Урбан, разработанные в соответствии с обновленным содержанием учебных программ предмета “Математика” для I ступени общего среднего образования. В этих пособиях, как и в изданиях прежних лет, сохранена методическая идея использования учебного моделирования в качестве ведущего метода начального обучения математике. Содержание пособий обогащено практико-ориентированными заданиями, упражнениями для работы в группе, заданиями проектного характера. Использование учебных моделей помогает учащимся понимать новый материал и искать различные способы решения задач.

Какие же учебные модели используются в новом учебном пособии по математике? Для ответа на этот вопрос важно понимать, какие объекты могут быть отнесены к учебным моделям, а также какого вида могут быть учебные модели.

Модель в научном познании трактуется как образ объекта, который отражает его существенные черты и используется в познании с целью замещения объекта исследования [1]. *Учебная модель* является особым видом модели, которая используется в учебном, а не научном познании. В начальном обучении математике под учебной моделью будем понимать модель, которая фиксирует существенные стороны изучаемых математических понятий и способов действий визуальными,

вербальными или символическими средствами и используется в учебном познании в соответствии с целями обучения [2].

То, что учебные модели могут быть построены с помощью различных знаково-символических средств, не всегда учитывается в практике преподавания математики в начальных классах. В частности, в ходе бесед с учителями, обучающимися на заочном отделении факультета начального образования Белорусского государственного педагогического университета, было выявлено, что моделью педагоги часто называют только схематический чертеж к текстовой задаче или схематическое изображение разрядного состава числа на абаке. Это можно объяснить тем, что учебная модель, построенная с помощью визуальных средств, является очень эффективным средством усвоения математических понятий учащимися различных возрастных групп [3].

В начальном обучении математике визуальная учебная модель является необходимым средством обучения из-за возрастных особенностей младших школьников: наглядно-образного мышления, потребности в практических действиях и кинестетических ощущениях, произвольного характера познавательных процессов [4, 5]. Убедительным подтверждением эффективности использования метода наглядного моделирования в начальной школе является лидерство в международном сравнительном исследовании качества математического образования TIMSS государства Сингапур

[6, 7], в котором модельный метод обучения математике (“model method of teaching”) является основным в практике работы школьных учителей. В основе модельного метода обучения математике сингапурских школьников лежит систематическая работа учащихся с наглядными “полосовыми” моделями (“bar models”) математических понятий [8].

Однако в ряде исследований подтверждается, что чрезмерное использование визуализации может препятствовать развитию обобщенных математических представлений [9] и “тормозить” процесс формирования эффективных вычислительных приемов [10]. Поэтому учителю начальных классов важно сбалансированно применять учебные модели различных видов в соответствии с этапом изучения математического материала.

Классификация учебных моделей в начальном обучении математике

Разработанная для нового учебного пособия по математике классификация учебных моделей основана на логике применения метода учебного моделирования. В соответствии с этой логикой учитель, прежде всего, уточняет объект моделирования, то есть отвечает на вопрос: “Что мы будем моделировать?”. Поэтому первое основание разработанной классификации — **вид моделируемого объекта**. По виду моделируемого объекта учебные модели можно разделить на *содержательные* и *процессуальные*. Примером содержательной модели является схематический чертёж (схема) к текстовой задаче, а процессуальной — граф-схема поиска ее решения. Затем учитель выбирает средства для построения модели, отвечая себе на вопрос: “С помощью чего мы будем моделировать?”. Поэтому второе основание классификации — **средства построения**, которые используются для создания учебной модели. В результате классификации по средствам построения можно выделить *визуальные*, *вербальные* и *математические* учебные модели. Примером визуальной модели является модель числа на абаке, вербальной модели — алгоритм вычисления, математической модели — математическое выражение. При работе на уроке учебная модель далее применяется определенным образом, с большей или меньшей степенью активности учителя и учащихся по ее созданию и изменению, поэтому третье основание классификации — **способ работы** с моделью. В соответствии с этим основанием учебные модели можно разделить на *статические* и *динамические*. Примером статической учебной модели является схема, изображенная в учебном пособии, а динамической — модель, составленная на наборном полотне с помощью геометрических фигур. В обобщенном виде классификация показана на рисунке 1.

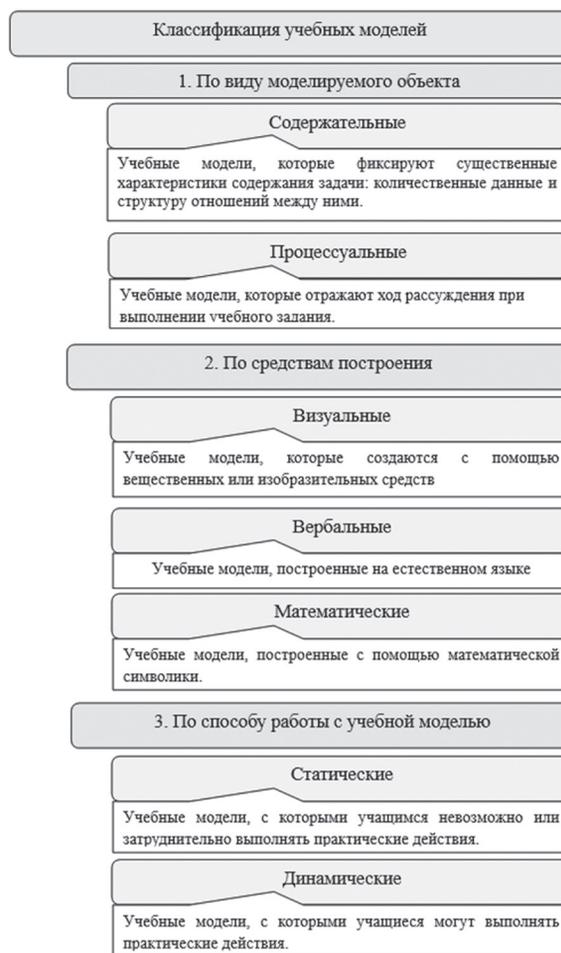


Рис. 1. Классификация учебных моделей в новом учебном пособии по математике

Дадим краткую характеристику учебным моделям каждого вида и приведем примеры из учебного пособия по математике.

Если выполнять классификацию по виду объекта, который подвергается моделированию, то можно получить содержательные и процессуальные учебные модели.

Содержательные учебные модели

В этих моделях отражаются существенные характеристики содержания задачи (количество элементов и связи между ними). Примеры содержательных учебных моделей текстовой задачи из нового учебного пособия по математике для 2-го класса [11] приведены на рисунке 2, а разрядного состава чисел — на рисунке 3.

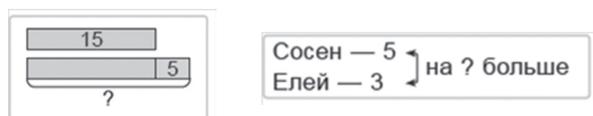


Рис. 2. Примеры содержательных учебных моделей, используемых для решения текстовой задачи



Рис. 3. Примеры содержательных учебных моделей, используемых для изучения разрядного состава чисел

Вариантов содержательных учебных моделей может быть очень много. Они отличаются не только выбранными средствами построения (язык образов, естественный язык, математический язык), но и степенью детализации в передаче существенных характеристик.

Процессуальные учебные модели

Процессуальные модели показывают ход рассуждения при решении задачи или выполнении вычисления. Такие модели тоже могут быть построены с помощью разных знаково-символических средств: визуальных, вербальных, математических. Покажем на рисунках 4 и 5 примеры процессуальных учебных моделей поиска решения задачи и хода вычисления из нового учебного пособия по математике для 2-го класса [12].

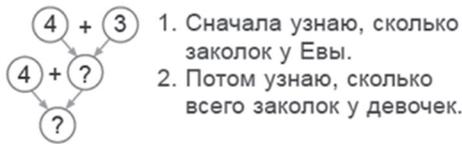


Рис. 4. Примеры процессуальных учебных моделей, используемых для решения текстовой задачи

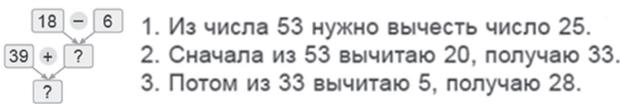


Рис. 5. Примеры процессуальных учебных моделей, используемых для выполнения вычислений

При делении моделей на группы по средствам построения получаются визуальные, вербальные и математические учебные модели.

Визуальные учебные модели

Визуальные учебные модели создаются с помощью наглядных (визуальных) средств. Группу визуальных моделей удобно разбить на две подгруппы: предметные модели, построенные из реальных предметов или их изображений, и схематические модели, для построения которых используются геометрические фигуры как заместители реальных объектов. Предметные модели (дети их называют рисунками) направлены на близкое к реальности представление исходного объекта. Примеры таких учебных моделей из нового учеб-

ного пособия [13, 14], которые используются при работе над задачей и при формировании вычислительных умений, показаны на рисунках 6 и 7.

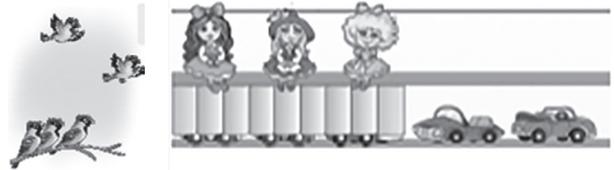


Рис. 6. Примеры предметных учебных моделей при работе над текстовой задачей

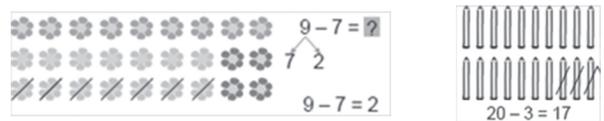


Рис. 7. Примеры предметных учебных моделей при формировании вычислительных умений

Схематические модели, или схемы, тоже используются для наглядного представления объекта моделирования и создаются с помощью геометрических фигур, например кругов, треугольников, отрезков. При построении схем используются и другие символы (линии, стрелки, скобки и т. п.) для иллюстрирования отношений и связей между объектами. Дидактический эффект схематической модели основан на ее дуальной природе: схема абстрактнее, чем текст задачи (ведь с ее помощью можно отвлечься от реальной задачной ситуации), но, с другой точки зрения, схема конкретизирует представленные в задаче числовые данные и отношения.

Визуальные модели отличаются степенью точности в отображении исходных данных. На некоторых предметных и схематических моделях количество элементов такое же, как в исходном объекте (визуальные модели с поэлементным соответствием). Например, схема содержит столько же отрезков, сколько указано объектов в тексте задачи, что позволяет получить ответ задачи пересчитыванием. Примеры таких моделей из нового учебного пособия [13] приведены на рисунке 8.



Рис. 8. Примеры визуальных (предметных – а, схематических – б) учебных моделей с поэлементным соответствием

Визуальные учебные модели могут иметь структурное соответствие, условно отображая количественные данные моделируемого объекта. В этом случае результат определяется с помощью рассуждений и вычислений. Примеры визуальных учебных моделей со структурным соответствием

из нового учебного пособия по математике [11, 12] показаны на *рисунке 9*.



Рис. 9. Примеры визуальных (предметных – а, схематических – б) учебных моделей со структурным соответствием

В учебных пособиях по математике схематические модели не вытесняют полностью предметные даже в 4-м классе, потому что конкретные предметы и их изображения обеспечивают хорошую связь между реальностью и ее математической моделью. Кроме того, предметные модели делают уроки более эмоциональными, расширяют кругозор и способствуют развитию интереса к изучению математики.

Вербальные учебные модели

Существенные характеристики объекта можно представить также на естественном языке, то есть с помощью слов. В этом случае создаются вербальные учебные модели, примерами которых являются краткие записи текста задачи, словесные формулировки выражений, равенств, свойств арифметических действий, алгоритмов вычислений и др. Даже текстовую арифметическую задачу многие методисты тоже считают вербальной моделью реальной ситуации с количественными данными [5, 15]. Примеры вербальных учебных моделей из учебного пособия по математике [13, 14] приведены на *рисунке 10*.

Было — ?
Взяла — 2 вишни
Осталось — 4 вишни

1. К числу 27 нужно прибавить число 35.
2. Сначала складываю десятки, получаю 50.
3. Потом складываю единицы, получаю 12.
4. К 50 прибавляю 12, получаю 62.

Рис. 10. Примеры вербальных учебных моделей

Математические учебные модели

Математические учебные модели строятся с помощью математической символики, поэтому их также часто называют *символическими* моделями. К таким моделям относятся математические записи (выражения, равенства, уравнения, неравенства), которые, как правило, являются результатом выполнения учебного задания в начальных классах. Поэтому учителю важно понимать, что записанное решение задачи является ее математической моделью. Примеры математических учебных моделей приведены на *рисунке 11*.

$8 - 5$ $9 + 5 = 11$ $52 + c = 100$ $25 < 100 - 13$

Рис. 11. Примеры математических учебных моделей

По способу работы с учебными моделями можно выделить статические и динамические модели.

Статические учебные модели

С моделями этого вида учащимся невозможно или весьма затруднительно выполнять практические действия. Примеры таких моделей — схемы, тексты, формулы, показанные в “готовом виде” в учебных пособиях, на доске, экране и т. п. Некоторые изменения могут быть внесены в статическую модель, созданную карандашом на листе бумаги, однако выполнять эти изменения менее удобно, чем при изменении моделей, построенных из “вещественного” материала. Во то же время работа со статическими моделями имеет большую методическую ценность, поскольку стимулирует учащихся к мысленному преобразованию моделей.

Динамические учебные модели

В отличие от статических моделей динамические позволяют выполнять с ними практические действия. К таким моделям можно отнести модели чисел, построенные на абаке, схемы к задачам, выполненные с помощью раздаточного материала. Динамические модели создаются из различного вещественного материала, а также на доске с использованием мела или фломастеров, позволяющих быстро преобразовывать выполненные рисунки. Примеры динамической и статической моделей приведены на *рисунке 12*.



Рис. 12. Примеры динамической (а) и статической (б) учебных моделей к текстовой задаче

Часто задаваемые вопросы

В ходе бесед с учителями начальных классов авторы учебного пособия отвечали на большое количество вопросов. Некоторые из них повторялись чаще других. В данной статье предлагаются на них ответы.

1. Как определить вид модели, если она может относиться к различным группам одновременно?

Действительно, в зависимости от выбранного основания классификации учебная модель может быть отнесена к разным группам. Например, учитель построил на абаке модель числа. Во-первых,

эта модель является *содержательной*, поскольку отражает разрядный состав числа, а не способ вычислений. Во-вторых, эта модель является *визуальной*, поскольку показывает разрядный состав числа с помощью наглядных средств. В-третьих, это *динамическая* модель, так как она позволяет выполнять практические действия с элементами модели. Таким образом, полная характеристика учебной модели предполагает следующее описание: это содержательная, визуальная, динамическая учебная модель.

Однако в практике преподавания подобная полнота иногда избыточна. Учителю, как правило, удобнее ограничиться классификацией по одному основанию, и чаще всего педагоги выбирают классификацию по средствам построения модели. В этом случае можно определять вид модели по виду средств, которые использовались для ее создания (то есть модель разрядного состава числа, построенная на абаке, — это визуальная модель числа).

2. Почему мы называем схему к задаче визуальной моделью, если при ее создании используются также слова и числа, то есть элементы вербальных и математических моделей? Может, все учебные модели являются комбинированными?

В модели любого вида часто можно заметить элементы модели другого вида (например, в краткой записи текста задачи используются числа и скобки, на схеме к задаче могут быть записаны слова и числа и т. п.). Однако приоритетная роль отводится определенным знаково-символическим средствам, без которых модель в наименьшей степени отражает существенные стороны оригинала. Например, если на схеме к задаче убрать числа, то схема все равно будет отражать соотношения между данными задачи. Значит, приоритетная роль в данной модели отводится визуальным средствам, то есть данная модель визуальная. Если из краткой записи текста задачи убрать слова (например, слова “было”, “приехало”, “стало”), то данная модель потеряет свою “модельную ценность”, так как перестанет отражать связи между элементами задачи. Значит, именно слова играют здесь приоритетную роль, и данная модель вербальная.

3. Мне больше нравится термин “наглядная модель”, а не “визуальная модель”. Можно ли его использовать?

В отечественной практике начального обучения эти термины можно считать синонимичными. Первоначально, начиная с XVII века, в дидактике применялся термин “наглядная модель” по отношению к моделям, построенным с помощью вещественных или изобразительных средств. При

этом даже если ученый-педагог называл средство обучения только словом “модель” (впервые это сделано в “Великой дидактике” Я. А. Коменского), то подразумевалось, что она является именно наглядной, то есть построенной с помощью предметных или изобразительных средств. Однако во второй половине XX века в научно-педагогических исследованиях отмечается тенденция к более широкой трактовке понятия “наглядная модель”. В частности, психолог и методист-математик Л. М. Фридман отмечал, что наглядная модель — это, прежде всего, модель, которая понятна учащемуся, и она не обязательно должна быть построена с помощью изобразительных средств. В такой трактовке не всякую визуальную модель можно назвать наглядной и не любую наглядную модель — визуальной. Именно поэтому с современной точки зрения термин “визуальная модель” точнее указывает на существенную характеристику моделей данного вида. Кроме того, предпочтение термина “визуальная модель” в современных исследованиях связано с проблемой унификации терминологии в мировом образовательном пространстве. Публикации на английском языке, выполненные зарубежными учеными, содержат понятия “визуальная модель” и “визуальное моделирование” (англ. “visual model” и “visual modeling”).

4. Можно ли на уроке использовать слово “модель” для обозначения схем к задачам или иллюстраций разрядного состава чисел на абаке?

Это не будет методической ошибкой, и так говорить можно. Однако авторы учебного пособия не рекомендуют использовать слово “модель” и не считают целесообразным вводить его в лексику учащихся. Это связано со сложностью и многозначностью данного понятия. По нашим наблюдениям, учитель на уроке использует слово “модель” в основном по отношению к схемам текстовых задач и иллюстрациям разрядного состава чисел. В этой ситуации у учащихся может сложиться неверное представление о том, что только схемы являются моделями, а, например, решение задачи или алгоритм вычислений — это уже не модель. В действительности все эти примеры являются учебными моделями разных видов. Чтобы избежать подобных неверных выводов, лучше называть каждую учебную модель, указывая ее конкретный вид, например: краткая запись задачи, схема задачи, решение задачи.

5. Почему в пособии не используется слово “чертеж” для обозначения визуальной модели текста задачи, а используется слово “схема”?

Использование термина “схема” — авторский выбор. Кстати, именно так кратко называют схема-

тические чертежи и схематические рисунки во многих современных российских учебниках математики для начальных классов (например, в учебнике М. И. Моро, М. А. Бантовой, Г. В. Бельтюковой; в учебнике Н. Б. Истоминой).

Термин “чертеж” очень традиционен и тоже часто используется в практике начального обучения математике. Его применяли методисты, начиная с XIX века. Например, этот термин использовал П. С. Гурьев. В современной методике преподавания математики отмечается, что если учитель использует этот термин, то корректнее говорить “схематический чертеж”, поскольку для поиска решения задачи достаточно лишь условно передать числовые данные и отношения между ними, не соблюдая точности, которая требуется для построения чертежа.

Получается, что использование термина “чертеж” на уроке возможно, но не совсем корректно. Это, скорее, историзм, методическая традиция. Использование же более корректного термина “схематический чертеж” не очень удобно в практическом отношении, получается длинная формулировка для живого диалога с учащимися. Термин “схема” является, таким образом, вариантом, который корректен с методической точки зрения и удобен для практического использования.

6. Как лучше на уроке называть модель числа, выполненную на абаке?

Не будет методической ошибкой, если вы будете говорить “модель числа”. Однако владение этой терминологией не является обязательным требованием и не включено в учебную программу. Кроме того, авторы учебного пособия придерживаются позиции, которая не рекомендует преждевременно вводить термины “модель” и “моделирование” в лексику ребенка (см. ответ к вопросу 4). Поэтому в данном случае лучше использовать слова “иллюстрация разрядного состава числа” или “рисунок”. Например: “Рассмотри, как показаны числа на рисунке”, “Рассмотри числа, показанные на абаке”.

7. Если учащиеся могут сразу записать решение задачи, нужно ли требовать от них построения схемы к этой задаче?

Основное предназначение учебной модели — объяснять новые математические понятия и искать способы решения задач. Однако в обучении мы не всегда ищем решение новой, нетривиальной текстовой задачи, где применение схемы является эффективным средством поиска решения. Часто учащимся предлагаются так называемые “ типовые ” задачи, способы решения которых им уже хорошо известны. Давайте рассмотрим, в какой степени здесь уместно использовать визуальные учебные модели.

Постоянно требовать от учащихся строить схемы к уже решенным задачам, конечно, нецелесообразно. Однако периодически предлагать построить схему к задаче, которая уже решена, очень полезно по следующим причинам.

Причина 1. Когда ребенок строит схему к уже решенной задаче, учитель получает информацию о степени понимания им способа решения задачи. В практике начального обучения математике нередко возникают ситуации, когда учащийся формально усваивает способ решения задачи, не понимая смысла записываемых действий. Например, он распознает вид задачи, если она предлагается в стандартной формулировке, и применяет способ решения, который запомнил. Построение схемы к решенной задаче показывает, понимает ли учащийся выполненный способ решения, может ли он проиллюстрировать выполненные действия.

Причина 2. Для того чтобы эффективно применять учебное моделирование для поиска решения трудных для учащегося задач, он должен сначала овладеть “алфавитом” и “синтаксисом” учебного моделирования (термины Н. Г. Салминой [16]). Естественнее всего овладеть основами умения моделировать на примере понятных и легких для детей задач. В этом случае учитель может убедиться в том, что учащиеся владеют самим “инструментарием” моделирования, а значит, готовы к его применению в более сложных учебных ситуациях.

Причина 3. Практика в переводе информации с одного знаково-символического языка на другой является очень ценной в социальном аспекте, так как формирует у учащихся способность понимать и создавать информацию с помощью разных средств: вербальных, визуальных, символических. Подобная “репрезентационная гибкость” (термин Дж. Голдина [17]) является очень востребованным социальным навыком и в дальнейшем способствует более успешной адаптации личности в обществе.

Предложить учащимся подобное задание можно, например, таким образом: “Дети, вы хорошо решили задачу. А теперь представьте, что вам нужно объяснить это решение младшему брату или сестре. Постройте схему к задаче, с помощью которой будет удобно объяснить выполненное решение”.

8. Если при выполнении контрольной работы учащийся записал решение задачи верно, но не построил к задаче схему, следует ли это считать ошибкой?

Нет, это не ошибка. В контрольных работах не предусмотрена проверка умения строить схемы к задачам, поскольку это умение не включено

в перечень обязательных требований к предметным результатам деятельности в учебной программе по математике. В контрольной работе проверяется умение решить задачу, а не умение использовать средства поиска решения задачи. Однако если учащиеся научились строить схемы к задачам, они, как правило, успешнее выполняют задания контрольных работ, что неоднократно подтверждалось в различных отечественных и зарубежных научных исследованиях, а также в практике начального обучения математике.

Возможно, в дальнейшем, когда будут разработаны более достоверные и удобные для практического применения способы диагностики различных метапредметных умений, в том числе и умения моделировать, в контрольных работах для учащихся будут предлагаться специальные задания для их проверки.

В новом учебном пособии по математике для I ступени общего среднего образования ознакомление учащихся с математическими понятиями и способами действий основано на систематическом использовании учебных моделей различных видов. Применение учебного моделирования

в начальном обучении математике теоретически обосновано многочисленными научными исследованиями, выполненными отечественными и зарубежными учеными, а также подтверждено практикой использования учебных моделей на уроках.

Классификация учебных моделей, разработанная для учебного пособия по математике, базируется на трех основаниях, отражающих логику использования модели на уроке: вид моделируемого объекта, средства построения учебной модели, способ работы с учебной моделью.

По виду моделируемого объекта можно выделить содержательные и процессуальные учебные модели; по средствам построения — визуальные, вербальные и математические модели; по способу работы — статические и динамические модели.

Несмотря на приоритетную роль визуальных учебных моделей в начальном обучении математике, в ходе обучения важно сбалансированно применять учебные модели различных видов, создавая условия для понимания учебного материала учащимися и формирования у них репрезентационной гибкости как важнейшего социального навыка.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гастев, Ю. А. Модель / Ю. А. Гастев // БСЭ. — 3-е изд. — М., 1974. — Т. 16. — С. 399—400.
2. Урбан, М. А. Методическая система начального обучения математике с использованием учебного моделирования : автореф. дис. ...д-ра пед. наук : 13.00.02 / М. А. Урбан; Бел. гос. ун-т. — Минск, 2020. — 50 с.
3. Nardi, E. Reflections on visualization in mathematics and mathematics education / E. Nardi // Mathematics a. mathematics education : searching for common ground / ed.: M. N. Fried, T. Dreyfus. — Dordrecht, 2014. — P. 193—222.
4. English, L. D. Learning through modelling in the primary years / L. D. English // Mathematical modeling : from theory to practice / ed.: N. Dawn, L. Hoe. — Singapore, 2015. — P. 99—124.
5. Белошистая, А. В. Обучение решению задач в начальной школе / А. В. Белошистая. — М. : ИНФРА-М, 2018. — 281 с.
6. TIMSS 2015 International reports [Electronic resource] // TIMSS and PIRLS. — Mode of access : <https://timss2015.org/timss-2015/mathematics/student-achievement>. — Date of access : 15.10.2020.
7. TIMSS 2019 International results in mathematics and science [Electronic resource] // TIMSS and PIRLS. — Mode of access: <https://timss2019.org/reports/average-achievement-math-m4>. — Date of access : 20.12.2020.
8. Singapore math [Electronic resource] // Wikipedia : the free encycl. — Mode of access : https://en.wikipedia.org/wiki/Singapore_math. — Date of access : 07.01.2021.
9. Urban, M. Didactic principles of visualization of mathematical concepts in primary education / M. Urban, H. Murauyova, S. Gadzaova // Pedagogika. — 2017. — Vol. 127, № 3. — P. 70—86.

10. MacLellan, E. The role of concrete materials in constructing mathematical meaning education / E. MacLellan // Education 3 — 13 : Intern. J.of Primary, Elementary a. Early Years Education. — 1997. — Vol. 25, № 3. — P. 31—35.
11. Муравьева, Г. Л. Математика : учеб. пособие для 2-го кл. учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения. В 2 ч. Ч. 1 / Г. Л. Муравьева, М. А. Урбан. — Минск : Нац. ин-т образования, 2020. — 136 с.
12. Муравьева, Г. Л. Математика : учеб. пособие для 2-го кл. учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения. В 2 ч. Ч. 2 / Г. Л. Муравьева, М. А. Урбан. — Минск : Нац. ин-т образования, 2020. — 136 с.
13. Муравьева, Г. Л. Математика : учеб. пособие для 1-го кл. учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения. В 2 ч. Ч. 1 / Г. Л. Муравьева, М. А. Урбан. — Минск : Нац. ин-т образования, 2019. — 104 с.
14. Муравьева, Г. Л. Математика : учеб. пособие для 1-го кл. учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения. В 2 ч. Ч. 2 / Г. Л. Муравьева, М. А. Урбан. — Минск : Нац. ин-т образования, 2019. — 128 с.
15. Истомина, Н. Б. Методика обучения математике в начальной школе : развивающее обучение : учеб. пособие / Н. Б. Истомина. — 2-е изд., испр. — Смоленск : Ассоц. XXI век, 2009. — 288 с.
16. Салмина, Н. Г. Знак и символ в обучении / Н. Г. Салмина. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1988. — 288 с.
17. Goldin, G. A. Representation in mathematical learning and problem solving / G. A. Goldin // Handbook of international research in mathematics education / ed. L. D. English. — Mahwah, 2002. — P. 197—218.

Статья поступила в редакцию 11.01.2021.