і доказ тэарэмы 3 цалкам закончаны.

Найлепшым рацыянальным набліжэннем $R_n(f) = R_n(f, z_1, z_2, \ldots, z_n)$ функцыі $f(x) \in C(R)$ называем, як звычайна,

$$R_n(f) \stackrel{def}{=} \inf \|f(x) - r_{2n}(x)\|,$$

дзе інфімум бярэцца па любых правільных рацыянальных функцыях з полюсамі ў пунктах $\{z_k, \overline{z_k}\}_{k=1}^{n}$.

Тэарэма 4. Калі $\left|(1+x^2)\Phi_n'(x)\right| < C \cdot n$, $x \in R$ і $f(x) \in C(R)$, то аператары $R_{4n-2}(x, f)$ ажыццяўляюць апраксімацыю найлепшага парадку, дакладней выконваецца стасунак

$$\|f(x) - R_{4n-2}(x, f)\| = O(R_n(f, z_1, z_2, \ldots, z_n)). \quad (22)$$

Для доказу нагадаем, што [5, с. 114—115] для любых $\{z_k\}_{k=1}^{n}$, $\operatorname{Im} z_k > 0$, і любых n справядлівы раўнанні

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2[\Phi_n(t) - \Phi_n(x)]}{(t-x)^2} dt = \pi \Phi_n'(x),$$

у прыватнасці таксама выконваецца

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\left[\Phi_n(t) - \Phi_n(x) + n(\delta_0(t) - \delta_0(x))\right]}{(t-x)^2} dt =$$

$$= \pi\left(\Phi_n'(x) + \frac{n}{1+x^2}\right).$$

З гэтых стасункаў і (21) вынікае пры ўмове тэарэмы, што норма $\|R_{4n-2}\|$ аператара $R_{4n-2} : C_R \to C_R$

$$\|R_{4n-2}\| \le \sup_{-\infty<x<\infty} \frac{x^2+1}{n}\left(\Phi_n'(x) + \frac{n}{1+x^2} + \Phi_n'(x)\right) < 2C+1$$

Калі $r_{2n}^*(x)$ рацыянальная функцыя найлепшага набліжэння, то для адхілення аператара $R_{4n-2}(x, f)$ ад функцыі $f(x)$ атрымаем

$$\|f(x) - R_{4n-2}(x, f)\| < \|f(x) - r_{2n}^*(x)\| +$$

$$+ \|r_{2n}^*(x) - R_{4n-2}(x, f)\| =$$

$$= R_n(f, z_1, z_2, \ldots, z_n) + \|R_{4n-2}(x, f - r_{2n}^*(x))\| <$$

$$< 2(C+1)R_n(f, z_1, z_2, \ldots, z_n),$$

і доказ тэарэмы 4 завершаны.

ЛІТАРАТУРА

1. *Takanaka S.* On the orthogonal function and a new formula of integration // Japan Journal of Mathemathics. 1925. № 2. P. 129—145.
2. *Malmquist F.* Sur la determination d`une classe de fonctions analytiques par leurs valeurs dans un ensemble donne de points // Comples rendus du sixieme congres des mathematiciens scandinaves. Kopenhagen. 1925. P. 253—259.
3. *Уолш Дж. Л.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М., 1961.
4. *Джрбашян М. М.* К теории рядов Фурье по рациональным функциям // Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ.-мат. наук. 1956. Т. 9. № 7. С. 3—28.
5. *Русак В. Н.* Рациональные функции как аппарат приближения. Мн., 1979.
6. *Русак В. Н.* Точные порядковые оценки для наилучших рациональных приближений на классах функций, представимых в виде свёртки // Мат. сб. 1985. Т. 128. № 4. С. 492—515.
7. *Ровба Е. А.* Интерполяция и ряды Фурье в рациональной аппроксимации. Гродно, 2001

SUMMARY

The construction of rational operators responsible for approximation is found.

УДК 517.95

М. Т. Стэльмашук, У. А. Шылінец

РЭДУЦЫРАВАННЕ АДНОЙ СІСТЭМЫ РАЎНАННЯЎ У ЧАСТКОВЫХ ВЫТВОРНЫХ ДА КАНАНІЧНАГА ВЫГЛЯДУ ПРЫ ДАПАМОЗЕ ДВАЙНЫХ ФУНКЦЫЙ

Уводзіны. Прадметам даследавання з'яўляецца наступная сістэма дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных:

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= A_1\varphi'_x + A_2\varphi'_y + T_1 f + \Theta_1\varphi + E_1 \\ f'_y &= A_3\varphi'_x + A_4\varphi'_y + T_2 f + \Theta_2\varphi + E_2 \end{aligned}\right\}, \quad (1)$$

дзе $A_k (k = 1, 2, 3, 4)$ — камплексныя канстанты; T_k, Θ_k, $E_k \in C^1(D)$ $(k = 1, 2)$; $f, \varphi \in C^2(D)$.

Заўсёды абазначаем праз $C^1(D)$ $(C^2(D))$ клас рэчаісных або камплексных функцый рэчаісных зменных x, y, якія непарыўна дыферэнцавальныя (двойчы непарыўна дыферэнцавальныя) у некаторым адназвязным абсягу D.

Як было паказана ў працы [1], сістэма (1), дзе шукаемыя функцыі $f, \varphi \in C^2(D)$, а даныя функцыі T_k, Θ_k, $E_k \in C^1(D)$, эквівалентна сістэме выгляду:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial\varphi}{\partial q}=a_1 f+b_1\varphi+\Phi_1,\\ &\frac{\partial f}{\partial q}-\frac{\partial\varphi}{\partial p}=a_2 f+b_2\varphi+\Phi_2\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

(a_k, b_k, Φ_k $(k=1,2)$ — вядомыя функцыі класа $C^1(D)$) пры наступных неабходных і дастатковых умовах:

$$A_1=-A_4,\ \begin{vmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{vmatrix}=-1. \qquad (3)$$

Тут

$$\frac{\partial f}{\partial p}=\delta^{-1}(f'_x q'_y-f'_y q'_x),$$

$$\frac{\partial f}{\partial q}=\delta^{-1}(f'_y p'_x-f'_x p'_y); \qquad (4)$$

$\delta=p'_x q'_y-p'_y q'_x\neq 0$ у абсягу D; $q=q(x,y)$ — якое-небудзь частковае рашэнне раўнання

$$\frac{\partial}{\partial x}(A_3 q'_x+A_4 q'_y)=\frac{\partial}{\partial y}(A_1 q'_x+A_2 q'_y) \qquad (5)$$

функцыя $p=p(x,y)$ вызначаецца з сістэмы

$$p'_x=A_1 q'_x+A_2 q'_y,\ p'_y=A_3 q'_x+A_4 q'_y. \qquad (6)$$

Мэта дадзенай працы — рэдуцыраванне сістэмы (1) да кананічнага выгляду (2), калі каэфіцыенты сістэмы $A_k\,(k=1,2,3,4)$ — камплексныя пастаянныя і атрыманне інтэгральнага раўнання эквівалентнага аднароднай сістэме (2) ($\Phi_k\equiv 0$ $(k=1,2)$).

§ 1

Знойдзем функцыі q і p з раўнання (5) і сістэмы (6).

Будзем шукаць рашэнне раўнання (5) у выглядзе $q=ax^2+xy+by^2$, дзе $a=const$, $b=const$.

Калі функцыю q падставіць у раўнанне (5), то будзем мець

$$\frac{\partial}{\partial x}(A_3(2ax+y)+A_4(2by+x))=$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}(A_1(2ax+y)+A_2(2by+x)),$$

$$2aA_3+A_4=A_1+2bA_2,$$

$$aA_3-A_1=bA_2.$$

З апошняй роўнасці вынікае:

$$b=\frac{aA_3-A_1}{A_2}. \qquad (7)$$

Такім чынам, функцыя

$$q=ax^2+xy+\frac{aA_3-A_1}{A_2}y^2 \qquad (8)$$

будзе рашэннем раўнання (5).

Функцыю $p=p(x,y)$ знойдзем з сістэмы (6), мяркуючы ў ёй $q=ax^2+xy+\frac{aA_3-A_1}{A_2}y^2$, дзе a — адвольная канстанта. Маем:

$$p'_x=A_1(2ax+y)+A_2(x+2\frac{aA_3-A_1}{A_2}y),$$

$$p'_y=A_3(2ax+y)+A_4(x+2\frac{aA_3-A_1}{A_2}y).$$

Можам праверыць, што выраз

$$(A_1(2ax+y)+A_2(x+2\frac{aA_3-A_1}{A_2}y))dx+$$

$$+(A_3(2ax+y)+A_4(x+2\frac{aA_3-A_1}{A_2}y))dy$$

ёсць поўны дыферэнцыял функцыі $p=p(x,y)$. Адсюль знойдзем

$$p=\left(aA_1+\frac{A_2}{2}\right)x^2+(2aA_3-A_1)xy+$$

$$+\left(\frac{A_3}{2}-\frac{aA_1A_3}{A_2}+\frac{A_1^2}{A_2}\right)y^2. \qquad (9)$$

Знойдзем умовы, пры якіх

$$\delta\equiv p'_x q'_y-p'_y q'_x=0.$$

Маем:

$$(4aA_1A_2+A_2^2-4a^2A_2A_3-A_1)x^2+$$

$$+(8a^2A_1A_3-8aA_1^2-2A_1A_2)xy+$$

$$+(4a^2A_3^2-4aA_1A_3-A_2A_3)y^2=0. \qquad (10)$$

Няхай $A_1=\alpha_1+i\beta_1$, $A_2=\alpha_2+i\beta_2$, $A_3=\alpha_3+i\beta_3$, $i^2=-1$. Тады з роўнасці (10) вынікае, што

$$(4a\alpha_1\alpha_2-4a\beta_1\beta_2+\alpha_2^2-\beta_2^2-4a^2\alpha_2\alpha_3+$$

$$+4a^2\beta_2\beta_3)x^2+(8a^2\alpha_1\alpha_3-8a^2\beta_1\beta_3-8a\alpha_1^2+$$

$$+8a\beta_1^2-2\alpha_1\alpha_2+2\beta_1\beta_2)xy+(4a^2\alpha_3^2-4a^2\beta_3^2-$$

$$-4a\alpha_1\alpha_3+4a\beta_1\beta_3-\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3)y^2=0, \qquad (11)$$

$$(4a\beta_1\alpha_2+4a\alpha_1\beta_2+2\alpha_2\beta_2-4a^2\alpha_2\beta_3-$$

$$-4a^2\beta_2\alpha_3)x^2+(8a^2\alpha_1\beta_3+8a^2\beta_1\alpha_3-2\alpha_1\beta_2-$$

$$-2\beta_1\alpha_2-16a\alpha_1\beta_1)xy+(8a^2\alpha_3\beta_3-4a\alpha_1\beta_3-$$

$$-4a\beta_1\alpha_3-\alpha_2\beta_3-\beta_2\alpha_3)y^2=0. \qquad (12)$$

Такім чынам, $\delta=0$ толькі ў пунктах перасячэння крывых (11) і (12).

Атрымалі наступную тэарэму.

Тэарэма 1. Сістэма дыферэнцыяльных раўнанняў (1) пры ўмовах (3) у абсягу D, дзе адсутнічаюць пункты перасячэння крывых (11) і (12), рэдуцыруецца да сістэмы (2).

§ 2

Для пабудовы інтэгральнага раўнання, эквівалентнага аднароднай сістэме (2), нам спатрэбяцца двайныя функцыі.

Функцыі выгляду $F = f + e\varphi$, дзе f, φ — камплексныя або рэчаісныя функцыі рэчаісных зменных x, y, $e^2 = 1$, будзем называць двайнымі функцыямі.

Функцыя F называецца манагеннай у сэнсе У. С. Фёдарава па двайной функцыі $P = p + eq$ у абсягу D, калі знойдзецца такая функцыя зменных x, y, якую абазначым праз $F'[P]$, што ў адзначаным абсягу маем [2]:

$$F'_x = F'[P]P'_x, \; F'_y = F'[P]P'_y.$$

Нараўне з функцыяй P разгледзім функцыю $Q = p - eq$ і пабудуем двайны апаратар

$$\frac{\partial F}{\partial Q} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial q}\right) - e\left(\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)\right\}. \quad (13)$$

З апаратарнай роўнасці (13) вынікае наступнае

Тэарэма 2. Аднародная сістэма (2) ($\Phi_k = 0$ ($k = 1, 2$)) раўназначная раўнанню выгляду

$$\frac{\partial F}{\partial Q} = \alpha f + \beta\varphi, \quad (14)$$

дзе $F = f + e\varphi$, $\alpha = \frac{1}{2}(a_1 - ea_2)$, $\beta = \frac{1}{2}(\beta_1 - e\beta_2)$.

У працы [3] атрымана наступнае інтэгральнае выяўленне Пампею — Фёдарава для двайных функцый:

$$F(z_0) = \frac{1}{K}\left\{\int_C F(z)\frac{dP(z)}{P - P_0} + \iint_{D_C}\frac{\partial F}{\partial Q}\cdot\frac{Idxdy}{P - P_0}\right\}, \quad (15)$$

дзе $I = \frac{\partial(P, Q)}{\partial(x, y)} = -2e\delta$, $P = P(z) = p(z) + eq(z)$,

$$Q = Q(z) = p(z) - eq(z),$$

$P_0 = P(z_0) = p(z_0) + eq(z_0)$, $z = x + iy \in C$, $z_0 \in D$, $K = \int_\gamma \frac{dP}{P - P_0}$, γ — акружнасць з цэнтрам у пункце z_0 і дастаткова малога радыуса.

Скарыстаўшы інтэгральнае выяўленне (15) з (14), атрымліваем наступнае інтэгральнае раўнанне:

$$F(z_0) = \frac{1}{K}\left\{\int_C F(z)\frac{dP(z)}{P - P_0} + \iint_{D_C}\frac{\alpha f + \beta\varphi}{P - P_0}(-2e\delta)dxdy\right\}.$$

Літаратура

1. *Шилинец В. А.* Методы F-моногенных функций в теории дифференциальных уравнений: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Мн., 1985.
2. *Федоров В. С.* Основные свойства обобщенных моногенных функций// Известия вузов. Математика. 1958. № 6. С. 257—265.
3. *Стэльмашук М. Т., Шылінец У. А.* Аб інтэгральным выяўленні тыпу Пампею — Фёдарава рашэнняў некаторых дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных // Весці БДПУ. 1998. № 3. С. 113—117.

Summary

Using the class of F-monogenic double functions the integral representation for solutions of one system of differential equations has been obtained.