УДК 517.925.6

В. І. Мататаў, І. В. Мататава, А. А. Самадураў

УЛАСЦІВАСЦІ РАШЭННЯЎ АЎТАНОМНАЙ СІСТЭМЫ ГАМІЛЬТОНА ЧАЦВЁРТАГА ПАРАДКУ

Многія задачы фізікі, астраноміі і тэхнікі прыводзяць да разгляду гамільтонавых сістэм дыферэнцыяльных раўнанняў [1—4]. Часта яны бываюць аўтаномнымі, гэта значыць іх гамільтаніян яўна не залежыць ад часу.

У дадзеным артыкуле разглядаецца нелінейная аўтаномная сістэма Гамільтона выгляду

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = H'_u = \dfrac{dF}{d\varphi}\cdot\varphi'_u \\ \dfrac{dy}{dt} = H'_v = \dfrac{dF}{d\varphi}\cdot\varphi'_v \\ \dfrac{du}{dt} = -H'_x = -\dfrac{dF}{d\varphi}\cdot\varphi'_x \\ \dfrac{dv}{dt} = -H'_y = -\dfrac{dF}{d\varphi}\cdot\varphi'_y, \end{cases} \tag{1}$$

дзе $H(x,y,u,v) = F(\varphi(x,y,u,v))$,

$\varphi(x,y,u,v) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma u^2 + \delta v^2, \quad t \in C,$

$x,y,u,v \in C \cup \{\infty\}$, F — галаморфная функцыя адносна φ; $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ — камплексныя параметры.

Заўвага. Калі φ — квадратычная форма агульнага выгляду (гэта значыць $\varphi = \alpha_0 x^2 + \alpha_1 xy + +\alpha_2 xu + \alpha_3 xv + \alpha_4 y^2 + \alpha_5 yu + \alpha_6 yv + \alpha_7 u^2 + +\alpha_8 uv + \alpha_9 v^2$), то пры дапамозе лінейных нявыраджаных пераўтварэнняў яе заўсёды можна прывесці да формы, якая змяшчае толькі квадраты пераменных [5].

Улічваючы выгляд функцыі φ, сістэму (1) можна запісаць так

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dF}{d\varphi}\cdot 2\gamma u & (2.1) \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dF}{d\varphi}\cdot 2\delta v & (2.2) \\ \dfrac{du}{dt} = -\dfrac{dF}{d\varphi}\cdot 2\alpha x & (2.3) \\ \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{dF}{d\varphi}\cdot 2\beta y & (2.4) \end{cases}$$

Вядома (напрыклад, [6—8]), што даследаванне рухомых асаблівых пунктаў рашэнняў нелінейных ДР і сістэм такіх раўнанняў — адна з асноўных задач аналітычнай тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў. Пакажам, што рашэнні сістэмы (2.1)—(2.4) не маюць у C ніякіх рухомых асаблівых пунктаў.

На падставе роўнасцей (2.1) і (2.3) атрымаем $\dfrac{dx}{du} = -\dfrac{\gamma u}{\alpha x}$, $\dfrac{dF}{d\varphi} \neq 0$, $\alpha \neq 0$. Адкуль пасля інтэгравання будзем мець

$$\alpha x^2 + \gamma u^2 = C_2, \tag{3}$$

дзе C_2 — адвольная пастаянная.

Вядома, што аўтаномная сістэма Гамільтона заўсёды мае першы інтэграл выгляду $H(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) = C$ (напрыклад, [1—4]). Для сістэмы (1) атрымаем наступнае: $F(\varphi(x,y,u,v)) = C$. Адкуль

$$\varphi(x,y,u,v) = C_1, \tag{4}$$

дзе C_1 — адвольная пастаянная. З роўнасці (3) маем

$$u = \sqrt{\frac{C_2 - \alpha x^2}{\gamma}}, \quad \gamma \neq 0. \tag{3.1}$$

Выкарыстоўваючы першы інтэграл (4) і выраз (3.1), для функцыі x атрымаем раўнанне $\dfrac{dx}{dt} = \Phi(C_1)\, 2\sqrt{\gamma}\sqrt{C_2 - \alpha x^2}$, дзе $\Phi(C_1) = \dfrac{dF}{d\varphi}\Big|\varphi(x,y,u,v) = C_1$. Адкуль пасля інтэгравання будзем мець

$$x = \sqrt{\frac{C_2}{\alpha}} Sin 2\sqrt{\alpha\gamma}\,\Phi(C_1)(t - C_3), \tag{5}$$

дзе C_3 — адвольная пастаянная, $\alpha \neq 0$.

З улікам роўнасцей (2.2) і (2.4) атрымаем раўнанне $\dfrac{dy}{dv} = \dfrac{\delta v}{\beta y}$, $\dfrac{dF}{d\varphi} \neq 0$, $\beta \neq 0$. Інтэграванне апошняга раўнання дае наступнае $\beta y^2 + \delta v^2 = C_4$, дзе C_4 — адвольная пастаянная. Адкуль

$$v = \sqrt{\frac{C_4 - \beta y^2}{\delta}}, \quad \delta \neq 0. \tag{6}$$

З роўнасцей $\alpha x^2 + \gamma u^2 = C_2$, $\beta y^2 + \delta v^2 = C_4$ і $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma u^2 + \delta v^2 = C_1$ вынікае, што $C_4 = C_1 - C_2$. На падставе (2.2) будзем мець

$$\frac{dy}{dt} = \Phi(C_1)\cdot 2\sqrt{\delta}\sqrt{(C_1 - C_2) - \beta y^2},$$

дзе $\Phi(C_1) = \dfrac{dF}{d\varphi}\Big|\varphi = C_1$. Пасля інтэгравання апошняга раўнання атрымаем

$$y = \sqrt{\frac{C_1 - C_2}{\beta}} \sin 2\sqrt{\beta\delta}\, \Phi(C_1)(t - C_5), \quad (7)$$

дзе C_5 — адвольная пастаянная, $\beta \neq 0$.

З формул (3.1) і (6), улічваючы роўнасці (5) і (7), атрымаем наступнае

$$u = \sqrt{\frac{C_2}{\gamma}} \cos 2\sqrt{\alpha\gamma}\quad \Phi(C_1)(t - C_3), \quad \gamma \neq 0, \ (8)$$

$$v = \sqrt{\frac{C_1 - C_2}{\delta}} \cos 2\sqrt{\beta\delta}\quad \Phi(C_1)(t - C_5), \quad \delta \neq 0. \ (9)$$

Зробім у зыходнаи сістэме замену $dt = \frac{d\tau}{F'_\varphi}$, $F'_\varphi \neq 0$, дзе τ — новая незалежная зменная. Тады сістэма (2.1) —(2.4) запішацца так

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = 2\gamma u, & \frac{dy}{d\tau} = 2\delta v \\ \frac{du}{d\tau} = -2\alpha x, & \frac{dv}{d\tau} = -2\beta y. \end{cases} \quad (10)$$

Сістэма ДР (10) — лінейная, а яна, як вядома (напрыклад, [7]), не мае ў C ніякіх рухомых асаблівых пунктаў.

Тэарэма. Нелінейная аўтаномная сістэма Гамільтона (1) не мае ў C ніякіх рухомых асаблівых пунктаў. Усе яе рашэнні — цэлыя функцыі (формулы (5), (7), (8), (9)).

ЛІТАРАТУРА

1. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М., 1968.
2. *Кильчевский Н. А.* Курс теоретической механики. М., 1977. Т. 2.
3. *Петкевич В. В.* Теоретическая механика. М., 1981.
4. *Яблонский А. А.* Курс теоретической механики. М., 1971. Ч. 2.
5. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр П. Линейная алгебра. М., 1986.
6. *Айнс Э. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, 1939.
7. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л., 1950.
8. *Еругин Н. П.* Проблема Римана. Мн., 1982.

SUMMARY

It has been shown in the article that autonomous Hamilton system of the 4th order $x' = H'_u$, $y' = H'_v$, $u' = -H'_x$, $v' = -H'_y$ $(H = F(\varphi), \varphi = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma u^2 + \delta v^2)$ *does not have any movable singular points in* c. *It means that all its solutions are integral functions.*

УДК 517.5

В. М. Русак, А. І. Стэльмах

АБ ЗБЕЖНАСЦІ І ПАДСУМОЎВАННІ АРТАГАНАЛЬНЫХ ШЭРАГАЎ ПА РАЦЫЯНАЛЬНЫХ ФУНКЦЫЯХ

Ортаўнармаваныя сістэмы рацыянальных функцый па акружнасці $|z| = 1$ былі пабудаваны ў [1—2]. У дачыненні да аналітычных функцый, частковыя сумы артаганальных шэрагаў па такіх сістэмах прысутнічаюць у манаграфіі [3] Дж. Уолша, якая на англійскай мове ўпершыню надрукавана ў 1935 г. У прасторы непарыўных 2π-перыядычных функцый апраксімацыя частковымі сумамі шэрагаў Фур'е па рацыянальных функцыях з фіксаванымі полюсамі разглядапася ў работах М. М. Джрбашана (напрыклад, [4]). Для даследавання найлепшых рацыянальных набліжэнняў са свабоднымі полюсамі аналітычных і 2π-перыядычных функцый рацыянальныя апаратары тыпу Фур'е скарыстоўваліся ў [5—7].

У дадзеным артыкуле разглядаюцца рацыянальныя аператары, якія дзейнічаюць у прасторы *C(R)* непарыўных на рэчаіснай восі функцый $f(x)$ з канечным лімітам на бясконцасць. Няхай $\{z_k = \alpha_k + i\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\operatorname{Im}(z_k) > 0$, — пэўная паслядоўнасць камплексных лікаў.

Тэарэма 1. Рацыянальныя функцыі

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{\beta_n}{\pi}} \frac{x + i}{x - z_n} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{x - \overline{z}_k}{x - z_k},$$

$$\psi_n(x) = \overline{\varphi_n(x)}, \quad n = \overline{1, \infty} \quad (1)$$

складаюць ортаўнармаваную сістэму на рэчаіснай восі з вагавай функцыяй $(1 + x^2)^{-1}$.

Доказ тэарэмы заключаецца ў непасрэдным падліку з дапамогай рэштаў інтэгралаў ад здабытку дзвюх розных функцый сістэмы (1), памножанага на $(1 + x^2)^{-1}$.

Калі $f(x)$ інтэгравальная на R з вагой $(1 + x^2)^{-1}$, то ёй можна суаднесці ў адпаведнасць шэраг Фур'е па сістэме