

МЕТОДЫКА ВЫКЛАДАННЯ МАТЭМАТЫКІ

Весці БДПУ. Серыя 3. 2020. № 4. С. 58–64.

УДК 51(075.8)

UDC 51(075.8)

НОВЫЙ ВЗГЛЯД НА ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ В ПЕРИОД ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ ВО ВРЕМЯ ПАНДЕМИИ

NEW VISION OF TYPE CALCULATIONS IN THE PERIOD OF DISTANT LEARNING DURING THE PANDEMIC

А. А. Черняк,
доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и методики преподавания математики Белорусского государственного педагогического университета имени Максима Танка;

Ж. А. Черняк,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и физики Белорусской государственной академии связи;

С. А. Богданович,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и методики преподавания математики Белорусского государственного педагогического университета имени Максима Танка

A. Chernyak,
Doctor in Physics and Mathematics, Professor of the Department of Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank;

Z. Chernyak,
PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Mathematics and Physics, Belarusian State Academy of Communications;

S. Bogdanovich,
PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank

Поступила в редакцию 1.10.20.

Received on 1.10.20.

Обосновывается актуальность типовых расчетов как одного из ключевых инструментов дистанционного обучения. Излагаются основные принципы построения современных сборников тематических заданий, адаптированных к уровню подготовки (или знаний) нынешних студентов и условиям форс-мажорных обстоятельств.

Ключевые слова: типовые расчеты по высшей математике, дистанционное обучение.

The article substantiates the relevance of type calculations as one of the key tools of distant learning. It presents the main principles of building modern collections of topical tasks adapted to the level of training (or knowledge) of the current students and the conditions of force-majeure circumstances.

Keywords: type calculations in higher mathematics, distant learning.

Типовые расчеты – это наборы тематических индивидуальных заданий, предназначенные для оценки усвоения отдельного раздела учебного предмета. Речь пойдет сейчас о высшей математике.

Основное содержание. Как правило, задания по выполнению типовых расчетов выдаются студентам в начале изучения нового раздела. Тогда же объявляется срок их сдачи преподавателю для проверки. По сути, типовые расчеты – это индивидуальные задания обобщенного характера и протяженного времени выполнения. При работе над типовыми расчетами предполагается возможным :

- консультироваться с преподавателем, сокурсниками и другими осведомленными лицами;

- пользоваться литературой и конспектами, содержащими как теорию, так и образцы решений аналогичных заданий.

Таким образом, выполнение типового расчета – это многогранный процесс, являющийся (в полном смысле этих слов) управляемой контролируемой работой студентов.

В советское время всеобщей централизации существовало пособие с непререкаемым авторитетом и в области типовых расчетов по высшей математике [1].

Сейчас каждый из ведущих вузов считает делом чести составить и издать свои сборники индивидуальных (тематических/типовых) заданий по высшей математике.

До весны нынешнего года типовые расчеты можно было скорее считать данью прошлому, нежели современным элементом учебного процесса в вузе. Однако внезапный вынужденный (в силу эпидемиологической обстановки) переход к всеобщему удаленному обучению в корне изменил отношение к типовым расчетам. Введение удаленной (дистанционной) формы обучения поставило задачу активизировать текущий контроль за усвоением учебного материала.

Преподаватель, лишенный прежних возможностей – полноценно контролировать понимание студентами своего предмета на лекциях и практических занятиях, – был вынужден либо использовать тесты (с высокой вероятностью *угадывания* правильных ответов), либо активно внедрять типовые расчеты (индивидуальные задания), которые можно как выдавать, так и проверять дистанционно.

Поэтому в весеннем семестре 2019/2020 учебного года тематические индивидуальные задания стали очень востребованными. При этом наибольшее внимание и интерес привлекли такие наборы заданий, при работе с которыми можно приобрести не только технические навыки решения задач конкретного раздела высшей математики, но и понять их смысловую составляющую.

Если ставить во главу угла качество типовых расчетов, то основными критериями, на наш взгляд, являются:

- содержательность заданий;
- неперегруженность вычислительными подробностями;
- «свежесть» («незаезженность») формулировок;
- оптимальность охвата теории;
- минимизация дублирования однотипных задач.

Помимо этого огромное преимущество имеют те сборники типовых расчетов, в которых наряду с вариантами заданий приводятся подробно разобранные решения базовых задач. К таким сборникам относятся [2–8].

Сборники [2–8], содержащие наборы индивидуальных домашних заданий, примеры их решений, краткие теоретические сведения, приобрели большую популярность уже у нескольких поколений преподавателей и студентов в Беларуси. Доказательством их востребованности могут служить решебники задач из этих пособий, наводнившие интернет.

Эти сборники являются неисчерпаемым источником одноплановых стандартных задач по высшей математике, которые (помимо их основного назначения) можно использовать для составления контрольных работ, тестов, экзаменационных билетов и т. д. Они удовлетворяют запросы обоих участников учебного процесса, как преподавателей, так и студентов, поскольку сочетают простоту и доступность задач, что дает возможность успешно справляться с решениями, не вникая в суть математической теории. Это является продолжением негативной традиции средней школы по отношению к элементарной математике.

Мы считаем, что при разработке сборников типовых расчетов нужно придерживаться следующих принципов:

- приоритета заданий, требующих применения знаний по целому разделу, над формально-вычислительными заданиями по отдельным темам (задания с оригинальными авторскими формулировками предназначены не для использования в качестве еженедельного домашнего задания, а для предъявления в начале изучения раздела на определенный срок);
- полноты теоретических знаний (предполагает отсутствие кратких теоретических подсказок, необходимость комплексного применения различных теоретических фактов для решения одного задания, выполнения требований сопоставления результатов вычислений с подходящим теоретическим фактом либо выяснения геометрического (физического, механического, экономического) смысла полученной величины);
- преодоления порогового уровня знаний (большинство заданий имеет средний уровень сложности, соответствующий требованиям учебной программы, для наиболее подготовленных студентов предлагаются более сложные задачи);
- большинство задач имеет средний уровень сложности, соответствующий требованиям программы; для продвинутых студентов предлагаются более сложные задачи;
- единства математики (выражается в реализации взаимосвязей между различными разделами математики: в заданиях по теме «Векторная алгебра и аналитическая геометрия» закладывается фундамент для разделов «Определенный интеграл, его геометрические приложения» и «Кратные интегралы»; в заданиях по теме «Введение в математический анализ» приводятся задания, предваряющие результаты в теме «Ряды» и там же делается упор на важнейшие для всего анализа понятия главной части функции и символа о-малое.

Сказанное выше проиллюстрируем примерами вариантов заданий из некоторых разделов.

Векторная алгебра и аналитическая геометрия

Задания одного из вариантов.

1) Постройте кривые, заданные уравнениями а) – д):

$$\text{а) } x = -3\sqrt{y-4}; \quad \text{б) } \begin{cases} x = 6 \cos t, \\ y = 8 \sin t, \end{cases} \quad t \in [\pi; 2\pi]; \quad \text{в) } 4x^2 - 25y^2 - 100x - 50y - 25 = 0;$$

$$\text{г) } r = 18 \cos \phi, \quad \frac{\pi}{6} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}; \quad \text{д) } \begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 9 \sin^3 t, \end{cases} \quad y \leq 0.$$

2) Постройте области, ограниченные заданными кривыми а) – в*).

$$\text{а) } y^2 = 50x, \quad x + y = 100; \quad \text{б) } x^2 + y^2 = 16, \quad x = -3, \quad x = 1;$$

$$\text{в) }^* \begin{cases} x = 7(t - \sin t), \\ y = 7(1 - \cos t), \\ y = 7 \quad (0 < x < 14\pi, \quad y \geq 7). \end{cases}$$

Задания одного из вариантов.

1) В пространстве R^3 постройте область, ограниченную поверхностями γ_1 , γ_2 , и проекции этой области на координатные плоскости:

$$\gamma_1: z^2 + x^2 + y^2 = 49, \quad \gamma_2: x^2 + z^2 = 33 \text{ (внутри цилиндра)}.$$

2) Приведите уравнение $F(x, y, z) = 0$ поверхности второго порядка к каноническому виду и укажите ее тип:

$$x^2 - y^2 - 4x + 8y - 2z^2 = 0.$$

Введение в математический анализ

Задания одного из вариантов.

Для данной последовательности a_n вычислите:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad a_n = \frac{3^{n+1}(2n^3 + 1)}{(n+2)!}.$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}, \quad a_n = \left(\frac{5n+2}{n+1} \right)^{2n+1}.$$

Задания двух из 30 вариантов.

Выделите главную часть функции $f(x) = g(x) + h(x)$ вида Ax^k при $x \rightarrow 0$, используя данные, приведенные ниже.

Вариант	$g(x)$	$h(x)$
1	$7^{2x} - 5^{3x}$	$2x - \arctg 3x$
2	$\sqrt{\cos x} - 1$	$\sin^2 2x$

Задания двух из 30 вариантов.

Для функции $f(x) + g(x)$ при $x \rightarrow 0$ выделите главную часть вида Ax^k , используя данные, приведенные ниже:

$$1) f(x) = e^{(x-2)^2-3} - e + \arctg x; \quad g(x) = 5^{3x^2-2x} - e^{\sin x} + \ln(1+2x-3x^2).$$

$$2) f(x) = -2\log_3(\cos x^4) + 2x^3; \quad g(x) = \sqrt[3]{1+x^4-2x^5} - 1 + \arcsin^4\left(\frac{x^9}{3}\right).$$

Задание.

Вычислите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ – функции из предыдущего задания. Исходя из полученного результата определите, какое из следующих трех утверждений верно при $x \rightarrow 0$:

1) $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковый порядок малости;

2) $f(x) = o(g(x))$;

3) $g(x) = o(f(x))$.

В заключение приведем полные наборы заданий из двух разделов «Комплексные числа» и «Двойные и криволинейные интегралы».

Комплексные числа

Задание 1. Для данных комплексных чисел $z_1 = 2 - 2i$ и $z_2 = 4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ найдите:

- 1) их сумму и разность (результат запишите в алгебраической форме);
- 2) их произведение (результат запишите в тригонометрической форме);
- 3) их частное (результат запишите в тригонометрической форме).

Задание 2. Для последовательности комплексных чисел $z_n = \frac{16 \cdot \operatorname{ch} \frac{\pi n i}{6}}{n^3 + 3}$ составьте последовательность $\{\operatorname{Re} z_n\}$ и вычислите ее предел (если он существует).

Задание 3. Запишите число $z = \overline{\left(\frac{2 + 3i^{21}}{1 - 4i^{19}} - \frac{1}{i} \right)}$ в алгебраической форме.

Задание 4. Изобразите множества комплексных чисел, удовлетворяющих условиям:

а) $|z| = 2$; б) $|z + 1 - 2i| = 2$; в) $\begin{cases} |z + 1 - 2i| < 2, \\ 3 < \operatorname{Im} z \leq 4. \end{cases}$

Задание 5. Для числа $z = -2 \left(\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} + i \operatorname{ctg} \frac{7\pi}{6} \right)$ найдите $\left(\frac{z}{4} \right)^6$ и все значения корня $\sqrt[3]{-\frac{|z|^2}{2}}$.

Задание 6.

1. Решите уравнения:

а) $(1 + i)z + 4 = 2i$; б) $2z^2 + 3iz + 2 = 0$; в) $z^3 + 6z^2 + 2z + 12 = 0$.

2. Запишите уравнение окружности с центром в точке $z = 0$, на которой лежит корень уравнения а).

3. Вычислите расстояние между корнями z_1 и z_2 уравнения б).

4. Найдите периметр треугольника с вершинами в точках w_1, w_2, w_3 , где w_i – корень уравнения в), $i = 1, 2, 3$.

Двойные и криволинейные интегралы

Дана сумма повторных интегралов по области D :

$$\int_{-1}^0 dx \int_{-2x}^2 f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_x^2 f(x, y) dy.$$

Задание 1. Изобразите область интегрирования D и измените порядок интегрирования.

Задание 2. Найдите площадь области D двумя способами:

- 1) непосредственно по рисунку;
- 2) с помощью двойного интеграла.

Задание 3. Вычислите массу пластинки, имеющей форму области D , если функция $\rho = 3x^2 + 4y$ задает плотность распределения массы по пластинке.

Задание 4. Найдите периметр области D двумя способами:

- 1) непосредственно по рисунку как длину замкнутой ломаной L , где L – контур области D ;
- 2) с помощью криволинейного интеграла первого рода.

Задание 5. Найдите массу ломаной L , где L – контур области D , если $\rho = 3x^2 + 4y$ – плотность распределения массы по этой дуге.

Задание 6. Вычислите работу силы $\vec{F} = (2x + y)\vec{i} - 6x^2y\vec{j}$ вдоль положительно ориентированного контура L двумя способами:

- 1) с помощью криволинейного интеграла второго рода;
- 2) с помощью формулы Грина.

Отметим, что некоторые из описанных выше идей были успешно апробированы авторским коллективом под руководством одного из авторов данной статьи в сборниках тематических заданий [9–10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты) / Л. А. Кузнецов. – М., Высшая школа, 1994. – 206 с.
2. Рябушко, А. П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: в 3 ч. Ч. 1 / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец. – Минск : Вышэйшая школа, 1990. – 271 с.
3. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : в 3 ч. Ч. 2 / А. П. Рябушко [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 1991. – 352 с.
4. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : в 3 ч. Ч. 3 / А. П. Рябушко [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 1991. – 288 с.
5. Индивидуальные задания по высшей математике : в 4 ч. Ч. 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной / А. П. Рябушко [и др.]. ; под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск : Вышэйшая школа, 2013. – 304 с.
6. Индивидуальные задания по высшей математике : в 4 ч. Ч. 2. Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения / А. П. Рябушко [и др.] ; под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск : Вышэйшая школа, 2014. – 396 с.
7. Индивидуальные задания по высшей математике : в 4 ч. Ч. 3. Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля / А. П. Рябушко [и др.] ; под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск : Вышэйшая школа, 2013. – 367 с.
8. Рябушко, А. П. Индивидуальные задания по высшей математике. В 4 ч. Ч. 4. Операционное исчисление. Элементы теории устойчивости. Теория вероятностей. Математическая статистика / А. П. Рябушко. – Минск : Вышэйшая школа, 2013. – 336 с.

REFERENCES

1. Kuznecov, L. A. Sbornik zadaniy po vysshej matematike (tipovye raschety) / L. A. Kuznecov. – M., Vysshaya shkola, 1994. – 206 s.
2. Ryabushko, A. P. Sbornik individual'nyh zadaniy po vysshej matematike: v 3 ch. Ch. 1 / A. P. Ryabushko, V. V. Barhatov, V. V. Derzhavec. – Minsk : Vyshejschaya shkola, 1990. – 271 s.
3. Sbornik individual'nyh zadaniy po vysshej matematike : v 3 ch. Ch. 2 / A. P. Ryabushko [i dr.]. – Minsk : Vyshejschaya shkola, 1991. – 352 s.
4. Sbornik individual'nyh zadaniy po vysshej matematike : v 3 ch. Ch. 3 / A. P. Ryabushko [i dr.]. – Minsk : Vyshejschaya shkola, 1991. – 288 s.
5. Individual'nye zadaniya po vysshej matematike : v 4 ch. Ch. 1. Linejnaya i vektornaya algebra. Analiticheskaya geometriya. Differencial'noe ischislenie funkcij odnoj peremennoj / A. P. Ryabushko [i dr.]. ; pod obshch. red. A. P. Ryabushko. – Minsk : Vyshejschaya shkola, 2013. – 304 s.
6. Individual'nye zadaniya po vysshej matematike : v 4 ch. Ch. 2. Kompleksnye chisla. Neopredelennye i opredelennye integraly. Funkcii neskol'kih peremennyh. Obyknovennye differencial'nye uravneniya / A. P. Ryabushko [i dr.] ; pod obshch. red. A. P. Ryabushko. – Minsk : Vyshejschaya shkola, 2014. – 396 s.
7. Individual'nye zadaniya po vysshej matematike : v 4 ch. Ch. 3. Ryady. Kratnye i krivolinejnye integraly. Elementy teorii polya / A. P. Ryabushko [i dr.]. ; pod obshch. red. A. P. Ryabushko. – Minsk : Vyshejschaya shkola, 2013. – 367 s.
8. Ryabushko, A. P. Individual'nye zadaniya po vysshej matematike. V 4 ch. Ch. 4. Operacionnoe ischislenie. Elementy teorii ustojchivosti. Teoriya veroyatnostej. Matematicheskaya statistika / A. P. Ryabushko. – Minsk : Vyshejschaya shkola, 2013. – 336 s.

-
- 9 Математика. Сборник тематических заданий с образцами решений : в 3 ч. Ч. 1: Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Введение в математический анализ / Ж. А. Черняк [и др.]. – Минск : БГУИР, 2018. – 220 с.
10. Математика. Сборник тематических заданий с образцами решений : в 3 ч. Ч. 2 : Комплексные числа. Интегральное исчисление функции одной переменной. Дифференциальное исчисление функций многих переменных. Дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений / Ж. А. Черняк [и др.]. – Минск : БГУИР, 2020. – 160 с.
- 9 Matematika. Sbornik tematycznych zadanij s obrazcami reshenij : v 3 ch. Ch. 1: Linejnaya algebra. Analiticheskaya geometriya. Vvedenie v matematicheskij analiz / Zh. A. Chernyak, [i dr.]. – Minsk : BGUIR, 2018. – 220 s.
10. Matematika. Sbornik tematycznych zadanij s obrazcami reshenij : v 3 ch. Ch. 2 : Kompleksnye chisla. Integral'noe ischislenie funkcii odnoj peremЕННОj. Differencial'noe ischislenie funkcij mnogih peremennyh. Differencial'nye uravneniya i sistemy differencial'nyh uravnenij / Zh. A. Chernyak [i dr.]. – Minsk : BGUIR, 2020. – 160 s.