Весці БДПУ. Серыя 3. 2020. № 4. С. 32–39.

УДК 517.537.38

СХОДИМОСТЬ НА МНОЖЕСТВЕ *p*-КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ И СВОЙСТВА *p*-КОМПЛЕКСНЫХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

В. В. Довгодилин,
аспирант
кафедры теории функций БГУ

UDC 517.537.38

CONVERGENCE ON THE MULTITUDE OF *p*-COMPLEX NUMBERS AND PROPERTIES OF *p*-COMPLEX DEGREE ROWS

V. Dovgodilin,
Postgraduate Student of the Department
of Theory of Functions, BSU

Поступила в редакцию 12.11.20.

Received on 12.11.20.

В статье с помощью параболической нормы введено понятие сходимости в кольце *p*-комплексных чисел. Рассмотрены *p*-комплексные степенные ряды, найдена область абсолютной сходимости, условия равномерной сходимости. Доказаны теоремы о почленном дифференцировании и интегрировании степенных рядов и *p*-голоморфности их суммы.

Ключевые слова: кольцо *p*-комплексных чисел, дуальные числа, делители нуля, норма, сходимость, *p*-голоморфность, степенные ряды.

With the help of parabola norm the article introduces the notion of convergence in the ring of *p*-complex numbers. It considers *p*-complex degree rows, finds the area of absolute convergence, the conditions of even convergence. It proves the theorems about term by term differentiation and integration of degree rows and *p*-holomorphy of their sum.

Keywords: ring of *p*-complex numbers, dual numbers, divisors of zero, norm, convergence, *p*-holomorphy, degree rows.

Введение. Теория *p*-комплексных (дуальных) чисел и функций *p*-комплексных переменных в математической литературе освещена недостаточно. Имеющиеся результаты приведены в [1–3] и касаются в основном алгебраических свойств кольца *p*-комплексных чисел, а также непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости *p*-комплексных функций. Дуальные числа находят применение в различных областях математики и физики, поэтому актуальным является дальнейшее изучение свойств *p*-комплексных функций. В статье рассмотрены вопросы сходимости в кольце *p*-комплексных чисел и изучены некоторые свойства степенных рядов.

Кольцо p-комплексных чисел. В этом разделе приведем некоторые свойства *p*-комплексных чисел, более подробно они рассмотрены в [1, с. 20–23].

Определение 1. p-комплексными числами (дуальными) называются пары (x, y) действительных чисел x и y, если для них определены понятие равенства и операции сложения и умножения следующим образом:

1. $(x, y) = (a, b)$ равносильно $x = a$ и $y = b$.
2. $(x, y) + (a, b) = (x + a, y + b)$.
3. $(x, y)(a, b) = (xa, xb + ya)$.

Множество всех *p*-комплексных чисел будем обозначать $\mathbb{C}_p$.

Отождествим с вещественными *p*-комплексные числа вида $(x,0)$, то есть $(x,0) = x$, а значит $(1,0) = 1$ и $(0,0) = 0$. Число $(0,1)$ будем называть ***параболической единицей*** и обозначать через j. Отметим следующие равенства:

$$j^2 = jj = (0,1)(0,1) = (0,0+0) = (0,0) = 0,$$

$$(0, y) = (0,1)(y,0) = jy,$$

$$(x, y) = (x,0) + (0, y) = x + jy.$$

Последнее дает так называемую ***алгебраическую форму*** p-комплексного числа, то есть $\forall z \in \mathbb{C}_p: \ z = (x, y) = x + jy$. Отметим, что $\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \ \forall z \in \mathbb{C}_p: \ \alpha z = (\alpha x, \alpha y)$.

Для $\forall (x, y) = z \in \mathbb{C}_p$, число $x = \mathrm{Re} z$ назовем ***действительной*** частью, а $y = \mathrm{Par} z$ ***параболической:*** $z = \mathrm{Re} z + j\mathrm{Par} z$. Число $(x - jy)$ назовем ***сопряженным*** к $z = x + jy$ и обозначим $\bar{z}$.

$\mathbb{C}_p$ является коммутативным кольцом с единицей, однако не является полем (в отличие от поля комплексных чисел). Покажем последнее.

Пусть $(a, b) = z \in \mathbb{C}_p$, будем искать такое число $(c, d) = z^{-1} \in \mathbb{C}_p$, что $zz^{-1} = 1$. Перепишем равенство в алгебраической форме $(a + jb)(c + jd) = 1$, перемножив, получим

$$ac - 1 + j(cb + ad) = 0.$$

откуда следует, что $c = \dfrac{1}{a}$, а $d = -\dfrac{b}{a^2}$. То есть, $z^{-1} = \dfrac{1}{a} - j\dfrac{b}{a^2}$, а значит p-комплексное число с нулевой действительной частью обратного элемента не имеет.

Таким образом, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}_p$, где $\mathrm{Re} z_2 \neq 0$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2)^{-1} = (x_1 + jy_1)\left(\frac{1}{x_2} - j\frac{y_2}{x_2^2}\right) = \frac{x_1}{x_2} + j\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2}$$

Числа вида jc, где $c \in \mathbb{R}$ и только они, являются делителями нуля.

Легко проверяется равенство $(x + jy)^n = x^n + jnyx^{n-1}$.

Норма в $\mathbb{C}_p$ и ее свойства

Введем на $\mathbb{C}_p$ норму следующим образом: $\| z \| = \| x + jy \| = \max\{|x|, |y|\}$. Эту норму будем называть ***параболической***. ***Модулем*** p-комплексного числа назовем $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Приведем некоторые свойства параболической нормы.

Свойства 1–5.

1. Для любых $a, z \in \mathbb{C}_p$ верно $\| az \| \leq 2 \| a \| \| z \|$.

2. При $n \in \mathbb{N}$, $\| z^n \| \leq n \| z \|^n$.

3. Если $\mathrm{Re} z \neq 0$, $\dfrac{1}{\| z \|} \leq \left\| \dfrac{1}{z} \right\|$.

4. Если $\mathrm{Re} z \neq 0$, $\left\| \dfrac{w}{z} \right\| \leq 2 \| w \| \left\| \dfrac{1}{z} \right\|$.

5. $\| z \| \leq 2|z| \leq 4 \| z \|$.

Доказательство.

1. $\| az \| = \| (\alpha + j\beta)(x + jy) \| = \| \alpha x + j(\beta x + \alpha y) \| = \max\{|\alpha x|, |\beta x + \alpha y|\}$, тогда $|\alpha x| \leq \| a \| \| z \|$ и $|\beta x + \alpha y| \leq |\beta x| + |\alpha y| \leq 2 \| a \| \| z \|$, из этих неравенств и следует, что $\| az \| \leq 2 \| a \| \| z \|$.

2. $\| z^n \| = \| (x + jy)^n \| = \| x^n + jnyx^{n-1} \| = \max\{|x^n|, |nyx^{n-1}|\} =$

$= |x|^{n-1} \max\{|x|, |ny|\} \leq \| z \|^{n-1} n \| z \| = n \| z \|^n$.

3. $\left\| \dfrac{1}{z} \right\| = \left\| \dfrac{1}{x + jy} \right\| = \left\| \dfrac{x - jy}{x^2} \right\| = \max\left\{\left|\dfrac{x}{x^2}\right|, \left|\dfrac{y}{x^2}\right|\right\} = \dfrac{1}{x^2}\max\{|x|, |y|\} = \dfrac{\| z \|}{x^2} \geq \dfrac{\| z \|}{\| z \|^2} = \dfrac{1}{\| z \|}$.

4. Следует из свойства 1.

5. Для начала докажем неравенство $|x|+|y|\le 2\sqrt{x^2+y^2}$. Возведем его в квадрат: $|x|^2+|y|^2+2|x||y|\le 4|x|^2+4|y|^2$, тогда $0\le 3|x|^2+3|y|^2-2|x||y|$, тогда дискриминант $D=4|y|^2-36|y|^2\le 0$, таким образом, неравенство всегда верно.

$$\|z\|=\max\{|x|,|y|\}\le |x|+|y|\le 2\sqrt{x^2+y^2}=2|z|.$$

Теперь оценим $|z|$ через $\|z\|$:

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}\le |x|+|y|\le 2\max\{|x|,|y|\}=2\|z\|.$$

Таким образом, справедливы оценки:

$$\|z\|\le 2|z|\le 4\|z\|.$$

Сходимость в $\mathbb{C}_p$

Пусть $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность в $\mathbb{C}_p$ и $z_n=x_n+jy_n$.

Определение 2. Число $z\in\mathbb{C}_p$ назовем **пределом** последовательности p-комплексных чисел, если

$$\forall\epsilon>0\quad \exists N_\epsilon\in\mathbb{N}\quad \forall n>N_\epsilon:\ \|z_n-z\|<\epsilon.$$

Обзоначаем $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z$.

Теорема 1. Если $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность действительных чисел, то следующие условия равносильны:

а) $\exists\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a\in\mathbb{R}$ в смысле $\mathbb{R}$;

б) $\exists\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a\in\mathbb{R}$ в смысле $\mathbb{C}_p$.

Доказательство вытекает из цепочки равенств

$$\|a_n-a\|=\max\{|\mathrm{Re}a_n-\mathrm{Re}a|,\ |\mathrm{Par}a_n-\mathrm{Par}a|\}=|a_n-a|.$$

Теорема 2. Если $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность p-комплексных чисел, то следующие условия равносильны:

а) $\exists\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z=x+jy$;

б) $\exists\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$ и $\exists\lim\limits_{n\to\infty} y_n=y$.

Доказательство вытекает из неравенств

$$|x_n-x|\le\max\{|x_n-x|,\ |y_n-y|\}=\|z_n-z\|$$

$$|y_n-y|\le\max\{|x_n-x|,\ |y_n-y|\}=\|z_n-z\|$$

и

$$\|z_n-z\|=\max\{|x_n-x|,\ |y_n-y|\}\le|x_n-x|+|y_n-y|.$$

Теорема 3. Если предел последовательности существует, то он единственен.

Доказательство. Допустим, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z_1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z_2$. Тогда возьмем $\epsilon=\|z_1-z_2\|/2>0$. Найдется номер N_ϵ такой, что $\|z_n-z_1\|<\epsilon$ и $\|z_n-z_2\|<\epsilon$ для $n>N_\epsilon$, тогда

$$\|z_1-z_2\|\le\|z_1-z_n\|+\|z_2-z_n\|<\epsilon+\epsilon=2\epsilon=\|z_1-z_2\|,$$

полученное противорение и показывает, что $z_1=z_2$. Ч. т. д.

Для предела p-комплексных последовательностей остаются верными теорема о пределе суммы, произведения, а также критерий Коши.

Производная и интеграл p-голоморфных функций

Приведем некоторые свойства p-голоморфных функций, доказательства которых можно найти в работах [2], [3] и которые будут использованы при изучении p-комплексных степенных рядов.

Определение 3. Говорят, что функция $f : D \subset \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}_p$ ***непрерывна*** в $z_0 \in \mathbb{C}_p$, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$, то есть

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z \in D : \| z - z_0 \| < \delta \Rightarrow \| f(z) - f(z_0) \| < \epsilon.$$

Определение 4. Функция $f : D \subset \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}_p$ называется ***p-дифференцируемой*** в точке $z \in \mathbb{C}_p$, если $\exists A \in \mathbb{C}_p$ такое, что

$$f(z+h) - f(z) = Ah + o(\| h \|).$$

Определение 5. Говорят, что функция $f : D \subset \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}_p$ ***p-голоморфна*** в точке $z \in \mathbb{C}_p$, если существует предел

$$f'(z) = \lim_{h \to 0,\ \operatorname{Re} h \neq 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h},$$

число $f'(z)$ называется ***производной*** в точке z. Функция p-голоморфная в каждой точке D называется ***p-голоморфной*** в D.

Нетрудно проверить равносильность определений 4 и 5.

Всюду далее, если это не будет приводить к противоречиям, под дифференцируемостью и голоморфностью будем понимать соответственно p-дифференцируемость и p-голоморфность.

Лемма 1. Пусть f и g дифференцируемы в $z \in \mathbb{C}_p$, $a, b \in \mathbb{C}_p$ и h дифференцируема в $g(z)$, тогда:

1. $(af(z) + bg(z))' = af'(z) + bg'(z)$.
2. $(f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$.
3. $\left(\dfrac{f(z)}{g(z)}\right)' = (f'(z)g(z) - f(z)g'(z)) / g^2(z)$, если $\operatorname{Re} g(z) \neq 0$.
4. $(h(g(z)))' = h'(g)g'(z)$.

Теорема 4. Дифференцируемость функции $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ в некоторой области равносильна существованию непрерывных частных производных от $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в этой области и выполнению следующих аналогов условий Коши – Римана:

$$\begin{cases} u_x(x,y) = v_y(x,y) \\ u_y(x,y) = 0, \end{cases}$$

причем $f'(z) = f'(x + jy) = u_x(x,y) + jv_x(x,y)$.

Лемма 2. Если $f(z)$ дифференцируема в некоторой области, то она представима в виде $f(z) = u(x) + j(yu'(x) + \phi(x))$.

Определение 6. Пусть $\gamma:[a,b]\to D$ гладкий путь в области $D\subset\mathbb{C}_p$, ориентированный от a к b. Пусть $f:D\to\mathbb{C}_p$ непрерывная функция. Тогда ***интегралом*** от f по пути γ будем называть

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Теорема 5. Пусть $I\subset\mathbb{R}$ открытое связное множество. Пусть голоморфная функция $f:I\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}_p$ имеет вид $f(z)=u(x)+j(yu'(x)+\phi(x))$. Тогда f имеет первообразную $F(z)=\int f(z)dz=\int u(x)dx+j\left(u(x)y+\int\phi(x)dx\right)+c,$ где $c\in\mathbb{C}_p$.

Ряды в $\mathbb{C}_p$

Пусть $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность в $\mathbb{C}_p$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

$S_n=\sum_{k=1}^{n} c_k$ называется **частичной суммой** этого ряда.

Определение 7. Если последовательность частичных сумм имеет предел $S\in\mathbb{C}_p$, то ряд называется ***сходящимся**, а* S ***суммой*** ряда. Если предела не существует, то ряд называется ***расходящимся***.

Очевидно, что ряд сходится тогда и только тогда, когда

$$0=\lim_{n\to\infty}\| S-S_n\|=\lim_{n\to\infty}\|\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k\|$$

Теорема 6 (Критерий Коши). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall\epsilon>0\quad\exists N_\epsilon\in\mathbb{N}\quad\forall n>N_\epsilon\quad\forall p\in\mathbb{N}:\ \|\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k\|<\epsilon.$$

Доказательство вытекает из свойств пределов p-комплексных последовательностей.

Так как $c_n=a_n+jb_n$, то, в силу теоремы 2, сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ равносильна сходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, причем

$$S=\sum_{n=1}^{\infty} c_n=\sum_{n=1}^{\infty} a_n+j\sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Определение 8. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ **сходится абсолютно,** если сходится ряд, составленный из норм $\sum_{n=1}^{\infty}\| c\|$.

Теорема 7. Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство вытекает из неравенства $\|\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k\|\le\sum_{k=n+1}^{n+p}\| c_k\|$ в силу критерия Коши.

Рассмотрим функции $f,f_n:D\subset\mathbb{C}_p\to\mathbb{C}_p$.

Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность функций p-комплексного переменного.

Определение 9. Говорят, что $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к f ***поточечно*** на D, если

$$\forall z\in D\quad\forall\epsilon>0\quad\exists N_\epsilon\in\mathbb{N}\quad\forall n>N_\epsilon:\ \| f_n(z)-f(z)\|<\epsilon.$$

Определение 10. Говорят, что $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к f ***равномерно*** на D, если

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_\epsilon \quad \forall z \in D: \ \| f_n(z) - f(z) \| < \epsilon.$$

Это условие равносильно тому, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{z\in D} \| f_n(z) - f(z) \| = 0$. Очевидно, что из равномерной сходимости следует поточечная.

Рассмотрим степенной ряд p-комплексного переменного вида $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, где $c_n \in \mathbb{C}_p$.

Теорема 8. Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, сходится абсолютно в полосе $|\mathrm{Re} z| < R$, где $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\| c_n \|}}$, и расходится вне ее.

Доказательство. В силу радикального признака Коши, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \| c_n z^n \|$ сходится, если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\| c_n z^n \|} < 1$. Из этого условия найдем те z, при которых ряд сходится абсолютно. Пусть $x \neq 0$.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\| c_n z^n \|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\| (a_n + jb_n)(x^n + jnyx^{n-1}) \|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\| (a_n x^n + j(b_n x^n + a_n nyx^{n-1})) \|} =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\max\left\{ |a_n x^n|;\ |b_n x^n + a_n nyx^{n-1}| \right\}} \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n x^n| + |b_n x^n| + |a_n nyx^{n-1}|} \le$$

$$\le |x| \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\| c_n \|} \sqrt[n]{1 + 1 + \left| \frac{ny}{x} \right|} = |x| \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\| c_n \|} < 1,$$

отсюда следует, что $|\mathrm{Re} z| = |x| < \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\| c_n \|}} = R.$

При $x = 0$ условия абсолютной сходимости выполняются автоматически.

При $|x| > R$ ряд расходится, так как общий член не стремится к нулю.

Следствие 1. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ сходится абсолютно в некоторой точке $z_0 \in \mathbb{C}_p$, тогда ряд сходится абсолютно в полосе $|\mathrm{Re} z| < |\mathrm{Re} z_0|$.

Теорема 9. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, сходится равномерно на любом компакте в полосе абсолютной сходимости $\{|\mathrm{Re} z| < R\}$.

Доказательство. Пусть компакт $K \subset \{|\mathrm{Re} z| < R\}$.

Найдутся такие $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, что $K \subset \{z \in \mathbb{C}_p : |x| < r_1, |y| < r_2, \quad r_1 < R\}$. Рассмотрим последовательность частичных сумм $\{S_n\}$, где $S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$, и покажем, что она равномерно сходится к $S = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Так как

$$\| c_n z^n \| = \max\left\{ |a_n x^n|;\ |b_n x^n + a_n nyx^{n-1}| \right\} \le |a_n x^n| + |b_n x^n| + |a_n nyx^{n-1}|,$$

то

$$\| S(z) - S_n(z) \| = \| \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k z^k \| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \| c_k z^k \| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(|a_n x^n| + |b_n x^n| + |y| |a_n nx^{n-1}| \right) \le$$

$$\le \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_n r_1^n| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_n r_1^n| + |r_2| \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_n n r_1^{n-1}|.$$

Переходя к супремуму на K

$$\sup_{z\in K}\|S(z)-S_n(z)\| \le \sum_{k=n+1}^{\infty}\left|a_n r_1^n\right|+\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|b_n r_1^n\right|+\left|r_2\right|\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|a_n n r_1^{n-1}\right|,$$

так как все три ряда справа – остатки сходящихся рядов, то переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем требуемое: $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{z\in K}\|S(z)-S_n(z)\|=0.$

Теорема 10. Сумма степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ является p-голоморфной функцией в полосе абсолютной сходимости $\{|\mathrm{Re}z|<R\}$.

Доказательство. Пусть $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$. .

Приведем ряд к виду $f(z)=u(x,y)+jv(x,y)$.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+jb_n)\left(x^n+jnyx^{n-1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n+j\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n+y\sum_{n=1}^{\infty}a_n n x^{n-1}\right).$$

Тогда $u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ и $v(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n+y\sum_{n=1}^{\infty}a_n n x^{n-1}$. Все три вещественных ряда абсолютно сходятся на интервале $(-R,R)$, поэтому можно проверить условия Коши – Римана:

$$\begin{cases} u_x(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n n x^{n-1}=v_y(x,y) \\ u_y(x,y)=0, \end{cases}$$

то есть $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ голоморфна в полосе абсолютной сходимости.

Теорема 11. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ можно почленно дифференцировать в полосе абсолютной сходимости $\{|\mathrm{Re}z|<R\}$.

Доказательство. Пусть $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$. В силу теоремы 10 это p-голоморфная функция в полосе абсолютной сходимости, продифференцируем ее

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n\right)'=f'(z)=u_x(x,y)+jv_x(x,y)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)_x+j\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n+y\sum_{n=1}^{\infty}a_n n x^{n-1}\right)_x$$

вещественные ряды справа можно почленно дифференцировать при $|x|<R$,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}a_n n x^{n-1}+j\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n n x^{n-1}+y\sum_{n=2}^{\infty}a_n(n-1)nx^{n-2}\right).$$

С другой стороны,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(c_n z^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}c_n n z^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+jb_n)n\left(x^{n-1}+jy(n-1)x^{n-2}\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n n x^{n-1}+j\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n n x^{n-1}+y\sum_{n=2}^{\infty}a_n(n-1)nx^{n-2}\right).$$

Причем радиус сходимости при дифференцировании не меняется, так как

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\| c_n \|} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\| nc_n \|}.$$

Из теоремы 11 автоматически получаем:

Следствие 2. Сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ бесконечно дифференцируема в полосе абсолютной сходимости.

Теорема 12. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ можно почленно интегрировать в полосе абсолютной сходимости $\{|\mathrm{Re}z| < R\}$.

Доказательство. Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. В силу теоремы 10 это *p*-голоморфная функция в полосе абсолютной сходимости, а значит, по теореме 5, функция f имеет первообразную

$$F(z) = \int f(z)dz = \int a_n x^n dx + j\left(y\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \int \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n dx \right) + c .$$

С другой стороны,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int c_n z^n dz = \sum_{n=0}^{\infty}\int a_n x^n dx + j\left(y\sum_{n=0}^{\infty}\int a_n n x^{n-1} dx + \sum_{n=0}^{\infty}\int b_n x^n dx \right) + c .$$

так как в интервале абсолютной сходимости (R, $-R$) вещественные ряды можно почленно интегрировать, то

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int c_n z^n dz = \int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx + j\left(y\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \int \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n dx \right) + c .$$

причем область сходимости остается неизменной.

Заключение. В статье найдена область абсолютной сходимости степенного ряда *p*-комплексного переменного. Доказано, что ряд равномерно сходится на компактах внутри полосы абсолютной сходимости. Были доказаны теоремы о почленном дифференцировании и интегрировании степенного ряда *p*-комплексного переменного и р-голоморфности его суммы.

Литература

1. *Яглом, И. М.* Комплексные числа и их применение в геометрии / И. М. Яглом. – Изд. 2-е, стереотипное. – М. : Едиториал УРСС, 2004.
2. F. Messelmi, Analysis of Dual Functions. Annual Review of Chaos Theory, Bifurcations and Dynamical Systems Vol. 4, (2013) 37–54.
3. Kyle DenHartigh, Rachel Flim, Liouville theorems in the Dual and Double Planes. Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal, Flim Volume 12, No. 2, Fall 2011.

References

1. *Yaglom, I. M.* Kompleksnye chisla i ih primenenie v geometrii / I. M. Yaglom. – Izd. 2-e, stereotipnoe. – M. : Editorial URSS, 2004.
2. F. Messelmi, Analysis of Dual Functions. Annual Review of Chaos Theory, Bifurcations and Dynamical Systems Vol. 4, (2013) 37–54.
3. Kyle DenHartigh, Rachel Flim, Liouville theorems in the Dual and Double Planes. Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal, Flim Volume 12, No. 2, Fall 2011.