Весці БДПУ. Серыя 3. 2020. № 4. С. 25–31.

УДК 512.6

UDC 512.6

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В КОЛЬЦЕ *h*-КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

ALGEBRAIC EQUATIONS WITH MATERIAL COEFFICIENTS IN THE RING OF *h*-COMPLEX NUMBERS

В. А. Павловский,
аспирант кафедры теории функций БГУ

V. Pavlovsky,
Postgraduate Student of the Department of Theory of Functions, BSU

Поступила в редакцию 12.11.20.

Received on 12.11.20.

Рассмотрен вопрос существования корней алгебраического уравнения в кольце *h*-комплексных чисел. Установлена теорема об *h*-комплексных корнях этого уравнения. Приводятся частные случаи, в которых рассмотрены различные условия существования и отсутствия корней алгебраических уравнений в кольце *h*-комплексных чисел. Также уделено внимание особенностям разрешимости алгебраических уравнений в кольце *h*-комплексных чисел, таким, как существование делителей нуля и кратных корней.

Ключевые слова: алгебраические уравнения, кольцо *h*-комплексных чисел, корни уравнения, делители нуля, кратные корни.

The article considers the problem of existence of the roots of algebraic equation in the ring of *h*-complex numbers. It states the theorem about *h*-complex roots of this equation. It gives particular examples which consider various conditions of existence and absence of roots of algebraic equations in the ring of *h*-complex numbers. It pays attention to the peculiarities of solution of algebraic equations in the ring of *h*-complex numbers such as existence of divisors of zero and multiple roots.

Keywords: algebraic equations, ring of *h*-complex numbers, roots of an equation, divisors of zero, multiple roots.

Введение. В математической литературе теория *h*-комплексных (двойных) чисел и функций *h*-комплексных переменных освещена недостаточно. Имеющиеся результаты приведены в [1−5]. Актуальными являются исследования, связанные с дальнейшим изучением вопросов анализа на множестве *h*-комплексных чисел. В статье рассмотрены вопросы, связанные с решением алгебраических уравнений в кольце *h*-комплексных чисел.

Алгебраические уравнения в кольце $\mathbb{C}_h$. Пусть $\mathbb{C}_h$ − кольцо всех *h*-комплексных чисел, то есть чисел вида $a+bj$, где $a,b\in\mathbb{R}$ $j^2=1,\ j\neq\pm1$ [5]. В кольце $\mathbb{C}_h$ имеются делители нуля, каковыми являются числа вида $a\pm aj$, Нетрудно это проверить:

$$(a+aj)\cdot(a-aj)=a^2-a^2j^2=a^2-a^2=0.$$

Особо отметим случай, когда $a=\dfrac{1}{2}$, тогда делители нуля обладают следующими свойствами:

а) $\forall n\in\mathbb{N}:\ \left(\dfrac{1\pm j}{2}\right)^n=\dfrac{1\pm j}{2}$;

б) числа $\dfrac{1\pm j}{2}$ образуют базис в $\mathbb{C}_h$, то есть любое *h*-комплексное число $a+bj$ можно однозначно представить в виде:

$$a+bj=(a+b)\frac{1+j}{2}+(a-b)\frac{1-j}{2}.$$

Пусть *n* − произвольное натуральное число. Рассмотрим многочлен *n*-й степени от переменной $z\in\mathbb{C}_h$

$$P_n(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0,$$

с коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$.

Предполагается, что $a_n \neq 0$.

Напомним, что уравнение

$$P_n(z) = 0 \tag{1}$$

называется алгебраическим уравнением степени *n*. Число α называется корнем уравнения (1) кратности $k \in \mathbb{N}$, если

$$P_n(z) = (z - \alpha)^k \cdot P_1(z),$$

где $P_1(\alpha) \neq 0$.

Известно [6], что любой многочлен вида

$$P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

степени *n* с вещественными коэффициентами над полем $\mathbb{R}$ может быть разложен на линейные и квадратичные множители, то есть.

$$P_n(x) = (x - x_1)^{k_1} \ldots (x - x_s)^{k_s} \cdot \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{l_1} \ldots \left(x^2 + p_r x + q_r\right)^{l_r},$$

где

$$x_1, \ldots, x_s \in \mathbb{R}, \qquad (k_1 + \ldots + k_s) + 2(l_1 + \ldots + l_r) = n,$$

$$\frac{p_\nu^2}{4} - q_\nu < 0, \qquad p_\nu, q_\nu \in \mathbb{R}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, r.$$

Такое представление единственно с точностью до порядка следования множителей. Алгебраическое уравнение в кольце $\mathbb{C}_h$ можно переписать в виде:

$$\begin{gathered} z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = \\ = (z - z_1)^{k_1} \ldots (z - z_s)^{k_s} \cdot \left(z^2 + p_1 z + q_1\right)^{l_1} \ldots \left(z^2 + p_r z + q_r\right)^{l_r} = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Отметим, что квадратичные множители вида $\left(z^2 + p_i z + q_i\right)^{l_i}$ неприводимы над кольцом $\mathbb{C}_h$ и не являются делителями нуля.

Теорема 1. Пусть многочлен с вещественными коэффициентами представлен в виде

$$\begin{gathered} z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = \\ = (z - z_1)^{k_1} \ldots \ (z - z_s)^{k_s} \cdot \left(z^2 + p_1 z + q_1\right)^{l_1} \ldots \ \left(z^2 + p_r z + q_r\right)^{l_r}, \end{gathered}$$

где

$$x_1, \ldots, x_s, p_1, q_1, \ldots, p_r, q_r \in \mathbb{R}, \qquad \frac{p_\nu^2}{4} - q_\nu < 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, r,$$

то в кольце *h*-комплексных чисел он имеет s^2 различных корней, из которых s корней – вещественные (они расположены на оси абсцисс), $s^2 - s$ корней – *h*-комплексные, $\frac{s(s-1)}{2}$ из них лежат в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_h$, а $\frac{s(s-1)}{2}$ – в нижней.

Доказательство. Используя разложение

$$x + jy = \frac{1+j}{2}(x + y) + \frac{1-j}{2}(x - y), \tag{3}$$

возведем $x + jy$ в степень n

$$\left(x+jy\right)^n=\left[\frac{1+j}{2}\left(x+y\right)+\frac{1-j}{2}\left(x-y\right)\right]^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{1+j}{2}\right)^k\left(x+y\right)^k\left(\frac{1-j}{2}\right)^{n-k}\left(x-y\right)^{n-k}=$$

$$=\left(\frac{1+j}{2}\right)^n\left(x+y\right)^n+\left(\frac{1-j}{2}\right)^n\left(x-y\right)^n=\frac{1+j}{2}\left(x+y\right)^n+\frac{1-j}{2}\left(x-y\right)^n.$$

Теперь, используя представление

$$\left(x+jy\right)^n=\frac{1+j}{2}\left(x+y\right)^n+\frac{1-j}{2}\left(x-y\right)^n,$$

разложим многочлен $P_n\left(z\right)$ по базису $\frac{1+j}{2},\frac{1-j}{2}$ и представим уравнение (1) так:

$$P_n\left(z\right)=\left(x+jy\right)^n+a_{n-1}\left(x+jy\right)^{n-1}+\ldots+a_1\left(x+jy\right)+a_0=$$

$$=\frac{1+j}{2}\left[\left(x+y\right)^n+a_{n-1}\left(x+y\right)^{n-1}+\ldots+a_1\left(x+y\right)+a_0\right]+$$

$$+\frac{1-j}{2}\left[\left(x-y\right)^n+a_{n-1}\left(x-y\right)^{n-1}+\ldots+a_1\left(x-y\right)+a_0\right]=0.$$

Отсюда заключаем, что уравнение

$$P_n\left(x+jy\right)=0$$

равносильно системе уравнений

$$\begin{cases}\left(x+y\right)^n+a_{n-1}\left(x+y\right)^{n-1}+\ldots+a_1\left(x+y\right)+a_0=0, & (4.1)\\ \left(x-y\right)^n+a_{n-1}\left(x-y\right)^{n-1}+\ldots+a_1\left(x-y\right)+a_0=0. & (4.2)\end{cases}$$

Каждое вещественное решение системы уравнений (4.1) и (4.2) порождает в силу равенства (3) корни в кольце $\mathbb{C}_h$ и наоборот. Лежащим в кольце $\mathbb{C}_h$ корням уравнения

$$P_n\left(x+jy\right)=0$$

соответствуют только вещественные решения данной системы.

Далее используем разложение (2) многочлена $P_n\left(z\right)$ на линейные и квадратичные множители. Так как при вещественном z все квадратичные множители в (2) положительны, то они не порождают корней из $\mathbb{C}_h$. Корни, лежащие в кольце $\mathbb{C}_h$, порождают только вещественные попарно различные корни $z_1,\ldots,z_s$ (без учета их кратностей). Таким образом, решив уравнения (4.1) и (4.2), приходим к системе:

$$\begin{cases}x+y=x_\mu, & \mu=1,2,\ldots,s,\\ x-y=x_\nu, & \nu=1,2,\ldots,s.\end{cases}\qquad(5)$$

Складывая и вычитая уравнения этой системы, находим

$$x_{\mu\nu}=\frac{x_\mu+x_\nu}{2},\quad y_{\mu\nu}=\frac{x_\mu-x_\nu}{2},\qquad \mu,\nu=1,2,\ldots,s.$$

Значит, искомыми корнями в кольце $\mathbb{C}_h$ являются

$$x_{\mu\nu}+jy_{\mu\nu}=\frac{x_\mu+x_\nu}{2}+j\frac{x_\mu-x_\nu}{2},\qquad \mu,\nu=1,2,\ldots,s.$$

Всего имеем s^2 попарно различных корней. При $\mu = \nu$ имеем

$$x_{\mu\mu} + jy_{\mu\mu} = x_\mu \in \mathbb{R}, \qquad \mu = 1,2,\ldots,s.$$

Если $\mu \neq \nu$, то корни

$$x_{\mu\nu} \pm jy_{\mu\nu} = \frac{x_\mu + x_\nu}{2} \pm j\frac{x_\mu - x_\nu}{2}$$

являются попарно сопряженными. Значит, $\frac{s^2 - s}{2}$ лежат в верхней полуплоскости и $\frac{s^2 - s}{2}$ – в нижней. Теорема доказана.

Рассмотрим частные случаи.

Следствие 1. Если уравнение $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1z + a_0 = 0$ с вещественными коэффициентами имеет n различных простых вещественных корней, то в кольце *h*-комплексных чисел оно имеет n^2 корней.

Доказательство. Предположим, что уравнение имеет n различных простых вещественных корней $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n \in \mathbb{R}$. Это означает, что $s = n$, а в разложении (2) многочлена $P_n(z)$ на линейные и квадратичные множители нет квадратичных множителей и, кроме того, $k_1 = \ldots = k_n = 1$. Запишем уравнение (1) в следующем равносильном виде:

$$(x + jy)^n + a_{n-1}(x + jy)^{n-1} + \ldots + a_1(x + jy) + a_0 = 0.$$

Так как по условию исходное уравнение имеет n различных простых вещественных корней, то имеем

$$\begin{cases} x + y = \zeta_\mu \\ x - y = \zeta_\nu \end{cases}, \qquad \mu, \nu = 1,2,\ldots,n.$$

Отсюда находим все корни уравнения в кольце $\mathbb{C}_h$:

$$\begin{cases} x_{\mu\nu} = \dfrac{\zeta_\mu + \zeta_\nu}{2}, \\ y_{\mu\nu} = \dfrac{\zeta_\mu - \zeta_\nu}{2}, \end{cases} \qquad \mu, \nu = 1,2,\ldots,n.$$

Таким образом, придавая каждому индексу μ, ν значения от 1 до n, получаем все n^2 корней в кольце $\mathbb{C}_h$.

Следствие 2. Уравнение $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1z + a_0 = 0$, где n – четное, с вещественными коэффициентами в кольце $\mathbb{C}_h$ не имеет корней, если оно не имеет корней в $\mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть уравнение не имеет вещественных корней. Тогда в разложении (2) многочлена $P_n(z)$ на линейные и квадратичные множители нет линейных множителей, а только квадратичные, $s = 0$, n – четное, а все корни системы (5) – комплексные.

$$\begin{cases} x + y = x_\mu + iy_\mu, \\ x - y = x_\nu + iy_\nu, \end{cases} \tag{6}$$

где $y_\mu \neq 0$, $y_\nu \neq 0$. Решая систему (6), находим

$$x_{\mu\nu} = \frac{x_\mu + x_\nu}{2} + i\frac{y_\mu + y_\nu}{2},$$

$$y_{\mu\nu} = \frac{x_\mu - x_\nu}{2} + i\frac{y_\mu - y_\nu}{2}.$$

Гиперболические части чисел $x_{\mu\nu}$ и $y_{\mu\nu}$ не могут одновременно быть равными нулю, так как тогда будет $y_\mu = y_\nu = 0$. Значит, корни уравнения будут иметь вид

$$x_{\mu\nu} + iy_{\mu\nu},$$

и они будут посторонними как корни из $\mathbb{C}_h$. В этом случае уравнение (1) корней в $\mathbb{C}_h$ не имеет.

Следствие 3. Если уравнение $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$ с вещественными коэффициентами имеет единственный корень в $\mathbb{R}$, то других корней в кольце h-комплексных чисел нет.

Доказательство. Пусть уравнение имеет единственный вещественный корень x_0, тогда n – нечетное, а система (5) имеет вид

$$\begin{cases} x + y = x_0, \\ x - y = x_0. \end{cases}$$

Отсюда $x = x_0$, $y = 0$. В этом случае уравнение имеет единственный корень $x_0 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}_h$.

Рассмотрим еще случай, когда среди корней многочлена $P_n(z)$ в кольце $\mathbb{C}_h$ имеются делители нуля.

Теорема 2. Делители нуля вида $\lambda \cdot \frac{1 \pm j}{2}$ являются корнями уравнения $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$, если и только если это уравнение имеет, по крайней мере, два вещественных корня, один из которых равен нулю.

Доказательство. Пусть уравнение имеет в качестве корней делители нуля $\lambda\frac{1+j}{2}$ и $\lambda\frac{1-j}{2}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$.

Тогда справедливо выражение

$$\left(z - \lambda\frac{1+j}{2}\right)\cdot\left(z - \lambda\frac{1-j}{2}\right) = \left[\left(z - \frac{\lambda}{2}\right) - j\frac{\lambda}{2}\right]\cdot\left[\left(z - \frac{\lambda}{2}\right) + j\frac{\lambda}{2}\right] =$$

$$= \left(z - \frac{\lambda}{2}\right)^2 - \frac{\lambda^2}{4} = z^2 - \lambda z = 0.$$

Отсюда очевидно, что $z_1 = 0$, $z_2 = \lambda$ являются корнями уравнения (1).

Докажем обратное утверждение. Пусть $z_1 = 0$, $z_2 = \lambda$ – корни уравнения (1). Тогда решение данного уравнения сведется к решению системы

$$\begin{cases} a_0 = 0, \\ \lambda^2 + a_1\lambda = 0. \end{cases}$$

Умножив обе части уравнения

$$\lambda^2 + a_1\lambda = 0$$

на $\frac{1 \pm j}{2}$ и преобразовав

$$(\lambda^2 + a_1\lambda)\cdot\frac{1 \pm j}{2} + a_0 = (\lambda^2\frac{1 \pm j}{2} + a_1\lambda\frac{1 \pm j}{2}) + a_0 = (\lambda^2\left(\frac{1 \pm j}{2}\right)^2 + a_1\lambda\frac{1 \pm j}{2}) + a_0 = 0,$$

получим следующее равносильное системе уравнение

$$\left(\left(\lambda\frac{1\pm j}{2}\right)^2+a_1\lambda\frac{1\pm j}{2}\right)+a_0=0,$$

отсюда следует, что делители нуля $\lambda\cdot\frac{1\pm j}{2}$ являются корнями уравнения (1).

Отметим, что существование делителей нуля среди корней уравнения не следует из наличия нулевого корня уравнения. Например, уравнение

$$a_1z+a_0=0,\quad a_1\neq 0 \tag{7}$$

при $a_0=0$ имеет единственный корень $z=0$, соответственно среди корней уравнения (7) нет делителей нуля.

Разложение многочлена на множители в кольце $\mathbb{C}_h$**.** В кольце $\mathbb{C}_h$ разложение многочлена на множители не является единственным.

Многочлен вида

$$P_n(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0,$$

степени n с вещественными коэффициентами над кольцом $\mathbb{C}_h$ может быть разложен на множители в виде произведения

$$P_n(z)=\prod_{\mu,\nu=1}^{n}\left(z-x_{\mu\nu}+jy_{\mu\nu}\right)\cdot\left(z-x_{\mu\nu}-jy_{\mu\nu}\right).$$

Например, для квадратичного трехчлена с вещественными корнями

$$x^2+ax+b=\left(x-x_\mu\right)\left(x-x_\nu\right),\qquad x_\mu\neq x_\nu,$$

имеем:

$$x_{\mu\nu}\pm jy_{\mu\nu}=\frac{x_\mu+x_\nu}{2}\pm j\frac{x_\mu-x_\nu}{2},$$

и тогда будет разложение над $\mathbb{C}_h$ иметь вид:

$$\left(x-x_{\mu\nu}+jy_{\mu\nu}\right)\cdot\left(x-x_{\mu\nu}-jy_{\mu\nu}\right)=\left(x-x_{\mu\nu}\right)^2-y_{\mu\nu}^2=x^2-2xx_{\mu\nu}+x_{\mu\nu}^2-y_{\mu\nu}^2=$$

$$=x^2-2\frac{x_\mu+x_\nu}{2}x+\left(\frac{x_\mu+x_\nu}{2}\right)^2-\left(\frac{x_\mu-x_\nu}{2}\right)^2=$$

$$=x^2-\left(x_\mu+x_\nu\right)\cdot x+x_\mu x_\nu=\left(x-x_\mu\right)\left(x-x_\nu\right)=x^2+ax+b.$$

Теорема 3. Многочлен

$$P_n(x)=\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\ldots\left(x-x_{2s}\right),\quad x_1,\ldots,x_{2s}\in\mathbb{R}.$$

с простыми попарно различными корнями над кольцом $\mathbb{C}_h$ будет иметь $2s$ различных разложений.

Доказательство. Количество различных разложений многочлена $P_n(x)$ будем искать в явном виде методом индукции по s. Пусть $s=1$, тогда над кольцом $\mathbb{C}_h$ многочлен $P_n(x)$ имеет два разложения:

$$P_n(x)=\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)=\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}+j\frac{x_1-x_2}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}-j\frac{x_1-x_2}{2}\right).$$

Пусть теперь $s = 2$, тогда многочлен $P_n(x)$ имеет четыре разложения:

$$P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) =$$

$$= \left(x - \frac{x_1 + x_2}{2} + j\frac{x_1 - x_2}{2}\right)\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2} + j\frac{x_1 - x_2}{2}\right)\left(x - \frac{x_3 + x_4}{2} - j\frac{x_3 - x_4}{2}\right)\times$$

$$\times\left(x - \frac{x_3 + x_4}{2} - j\frac{x_3 - x_4}{2}\right) = \left(x - \frac{x_2 + x_3}{2} + j\frac{x_2 - x_3}{2}\right)\left(x - \frac{x_2 + x_3}{2} + j\frac{x_2 - x_3}{2}\right)\times$$

$$\times\left(x - \frac{x_1 + x_4}{2} - j\frac{x_1 - x_4}{2}\right)\left(x - \frac{x_1 + x_4}{2} - j\frac{x_1 - x_4}{2}\right) = \left(x - \frac{x_1 + x_3}{2} + j\frac{x_1 - x_3}{2}\right)\times$$

$$\times\left(x - \frac{x_1 + x_3}{2} + j\frac{x_1 - x_3}{2}\right)\left(x - \frac{x_2 + x_4}{2} - j\frac{x_2 - x_4}{2}\right)\left(x - \frac{x_2 + x_4}{2} - j\frac{x_2 - x_4}{2}\right).$$

Пусть теперь $s = k$, тогда многочлен $P_n(x)$:

$$P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{2k}) = \prod_{\mu,\nu=1}^{2k}\left(z - x_{\mu\nu} + jy_{\mu\nu}\right)\cdot\left(z - x_{\mu\nu} - jy_{\mu\nu}\right),$$

причем таких произведений

$$\frac{(2k)^2 - 2k}{2k} = 2k - 1.$$

Заменяя k на s и с учетом разложения с вещественными корнями, получаем $2s$ разложений. Теорема доказана.

Заключение. В статье доказана теорема о количестве корней алгебраического уравнения в кольце h-комплексных чисел, охватывающая случай кратных корней уравнения. Доказано, что если уравнение на множестве вещественных чисел имеет n корней, то в кольце h-комплексных чисел оно имеет n^2 корней; если уравнение не имеет вещественных корней, то и в кольце h-комплексных чисел корней нет. Выведены необходимые и достаточные условия того, что среди корней уравнения есть делители нуля.

ЛИТЕРАТУРА.

1. *Ивлев, Д. Д.* О двойных числах и их функциях / Д. Д. Ивлев // Матем. просв. Математика, ее преподавание, приложения и история. Сер. 2, 6. – 1961. – С. 197–203.
2. *Розенфельд, Б. А.* Неевклидовы геометрии / Б. А. Розенфельд. – М. : Гостехиздат, 1955.
3. *Яглом, И. М.* Комплексные числа и их применение в геометрии / И. М. Яглом. – М. : Физматгиз, 1963.
4. *Antonuccio, F.* Semi-complex analysis and mathematical physics / F. Antonuccio. – Wadham college. Oxford OX1 3PN UK, 2008. – 56 p.
5. *Зверович, Э. И.* Нахождение областей сходимости и вычисление сумм степенных рядов от h-комплексного переменного / Э. И. Зверович, В. А. Павловский // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 2. – С. 189–193.
6. *Курош, А. Г.* Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – М. : Наука, 1968.

REFERENCES

1. *Ivlev, D. D.* O dvojnyh chislah i ih funkciyah / D. D. Ivlev // Matem. prosv. Matematika, ee prepodavanie, prilozheniya i istoriya. Ser. 2, 6. – 1961. – C. 197–203.
2. *Rozenfel'd, B. A.* Neevklidovy geometrii / B. A. Rozenfel'd. – M. : Gostekhizdat, 1955.
3. *Yaglom, I. M.* Kompleksnye chisla i ih primenenie v geometrii / I. M. Yaglom. – M. : Fizmatgiz, 1963.
4. *Antonuccio, F.* Semi-complex analysis and mathematical physics / F. Antonuccio. – Wadham college. Oxford OX1 3PN UK, 2008. – 56 p.
5. *Zverovich, E. I.* Nahozhdenie oblastej skhodimosti i vychislenie summ stepennyh ryadov ot h-kompleksnogo peremennogo / E. I. Zverovich, V. A. Pavlovskij // Ves. Nac. akad. navuk Belarusi. Ser. fiz.-mat. navuk. – 2020. – T. 56, № 2. – S. 189–193.
6. *Kurosh, A. G.* Kurs vysshej algebry / A. G. Kurosh. – M. : Nauka, 1968.