МАТЭМАТЫКА

Весці БДПУ. Серыя 3. 2020. № 4. С. 19–24.

УДК 517.968.25

UDC 517.968.25

РАШЭННЕ ЗАДАЧЫ КАШЫ ДЛЯ ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНАГА РАЎНАННЯ Ў ФАРМАЛЬНЫХ ВЫТВОРНЫХ

SOLUTION OF CAUCHY PROBLEM FOR DIFFERENTIAL EQUATION IN FORMAL DERIVATIVES

У. А. Шылінец,
кандыдат фізіка-матэматычных навук, загадчык кафедры вышэйшай матэматыкі УА ФПБ «Міжнародны ўніверсітэт “МІТСО”»;

І. М. Гуло,
кандыдат фізіка-матэматычных навук, загадчык кафедры матэматыкі і методыкі выкладання матэматыкі Беларускага дзяржаўнага педагагічнага ўніверсітэта імя Максіма Танка

V. Shilinets,
PhD in Physics and Mathematics, Head of the Department of Higher Mathematics, EE “International University MITSO”;

I. Gulo,
PhD in Physics and Mathematics, Head of the Department of Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank

Паступіў у рэдакцыю 14.10.20.

Received on 14.10.20.

Пры дапамозе F-манагенных гіперкамплексных функцый даследавана задача Кашы для дыферэнцыяльнага раўнання ў фармальных вытворных *n*-га парадку.

Ключавыя словы: дыферэнцыяльнае раўнанне, гіперкамплексная функцыя, манагеннасць у сэнсе У. С. Фёдарава, фармальныя вытворныя.

With the help of F-momogenous hypercomplex functions the solution of Cauchy problem for differential equation in formal derivatives of n-th order is studied.

Keywords: differential equation, hypercomplex function, monogeny in the sense of V. Fedorov, formal derivatives.

Уводзіны. Для вывучэння дыферэнцыяльных раўнанняў выкарыстоўваюцца розныя метады. Адным з такіх метадаў з’яўляецца метад функцый, манагенных у сэнсе У. С. Фёдарава (F-манагенных) [1–7]. У прыватнасці, пры дапамозе F-манагенных функцый можна пабудаваць функцыянальна-інварыянтныя рашэнні сістэмы Максвэла для электрамагнітнага поля ў пустаце [8, 9]. Акрамя гэтага, пры дапамозе адзначаных функцый для асобных відаў дыферэнцыяльных раўнанняў і сістэм дыферэнцыяльных раўнанняў удаецца будаваць рашэнні ў замкнутай форме [10].

У працы [11] даследавалася задача Кашы для дыферэнцыяльнага раўнання ў фармальных вытворных другога парадку. У дадзенай працы вывучаецца задача Кашы для дыферэнцыяльнага раўнання ў фармальных вытворных *n*-га парадку.

Асноўная частка. Няхай $p = p(x, y)$, $q = q(x, y)$ – адназначныя функцыі класа $C^1(D)$ для некаторага абсягу D плоскасці x, y.

Лічым гэтыя функцыі ці камплекснымі, ці гіперкамплекснымі і ў апошнім выпадку мяркуем, што значэнні гэтых функцый у абсягу D з’яўляюцца элементамі якой-небудзь асацыятыўна-камутатыўнай алгебры з адзінкай над полем камплексных лікаў.

Мяркуем $\delta = p'_x q'_y - p'_y q'_x$. Будзем заўсёды лічыць, што ў абсягу D існуе δ^{-1}.

Пры гэтых умовах фармальнымі вытворнымі $\frac{\partial f}{\partial p}$, $\frac{\partial f}{\partial q}$ функцыі $f = f(x, y) \in C^1(D)$ называюцца такія функцыі ад x, y, якія вызначаюцца ў абсягу D роўнасцямі [12]:

$$\frac{\partial f}{\partial p}=\frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial x}\right),\ \frac{\partial f}{\partial q}=\frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}\right).$$

У выпадку функцый p, q і f класа $C^n(D)$ будзем прытрымлівацца наступнага азначэння фармальных вытворных n-га парадку [12]:

$$\frac{\partial^n f}{\partial q^n}=\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial q^{n-1}}\right).$$

Далей будзем лічыць, што p і q – аналітычныя ад x функцыі пры $y=y_0=const$. Напрыклад, $p=xt(y)$, дзе t – непарыўна-дыферэнцавальная функцыя па y.

Даследуем наступную задачу.

Задача. Знайсці рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання ў фармальных вытворных n-га парадку

$$\frac{\partial^n f}{\partial q^n}=0, \tag{1}$$

якое задавальняе наступным умовам:

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y_0)=\varphi_1(x), \\ \dfrac{\partial f(x,y_0)}{\partial q}=\varphi_2(x), \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y_0)}{\partial q^2}=\varphi_3(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial^{n-1} f(x,y_0)}{\partial q^{n-1}}=\varphi_n(x), \end{array}\right\} \tag{2}$$

дзе $\varphi_i(x)$ $(i=1,...,n)$ – зададзеныя камплексныя ці гіперкамплексныя аналітычныя ад x функцыі, $x\in(a,b)$, (a,b) – праекцыя абсягу D на вось Ox.

Пяройдзем да даследавання сфармуляванай задачы.

Тэарэма. Агульнае рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання ў фармальных вытворных n-га парадку (1) мае выгляд

$$f=\sum_{k=0}^{n-1}h_k q^k,\ (x,y)\in D, \tag{3}$$

дзе $h_k=h_k[p;D]$ – любыя функцыі, манагенныя ў абсягу D адносна функцыі p $(k=0,1,...,n-1)$.

Доказ. Як вядома [12], роўнасць $\frac{\partial f}{\partial p}=0$ у абсягу D раўназначная манагеннасці функцыі f адносна p у гэтым абсягу.

Такім чынам, тэарэма для $n=1$ даказаная.

Дапусцім цяпер, што тэарэма праўдзівая для $n=m$, і дакажам яе праўдзівасць для $n=m+1$.

Сапраўды, няхай у абсягу D маем:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p}=0\ \left(\varphi\equiv\frac{\partial^m f}{\partial q^m}=0\right).$$

Тады $\varphi = \varphi[p; D]$ і, значыць,

$$\frac{\partial^m f}{\partial q^m} = \varphi[p; D],$$

адкуль атрымліваем

$$\frac{\partial^m}{\partial q^m}\left(f - \varphi[p; D]\frac{q^m}{m!} \right) = 0.$$

Аднак для $n = m$ мы лічым тэарэму праўдзівай, а таму з апошняй роўнасці вынікае, што функцыя f у абсягу D мае выгляд:

$$f - \varphi[p; D]\frac{q^m}{m!} = \sum_{k=0}^{m-1} h_k[p; D]q^k.$$

Тым самым тэарэма праўдзівая для $n = m + 1$.

Тэарэма даказаная.

Умовы (2) з улікам (3) маюць выгляд:

$$\left.\begin{aligned}
&f(x, y_0) = \sum_{k=0}^{n-1} h_k[p(x, y_0)]q^k(x, y_0) = \varphi_1(x),\\
&\frac{\partial f(x, y_0)}{\partial q} = \sum_{k=1}^{n-1} k h_k[p(x, y_0)]q^{k-1}(x, y_0) = \varphi_2(x),\\
&\frac{\partial^2 f(x, y_0)}{\partial q^2} = \sum_{k=2}^{n-1} k(k-1)h_k[p(x, y_0)]q^{k-2}(x, y_0) = \varphi_3(x),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{\partial^{n-2} f(x, y_0)}{\partial q^{n-2}} = (n-1)!\,h_{n-1}[p(x, y_0)]q(x, y_0) + (n-2)!\,h_{n-2}[p(x, y_0)] = \varphi_{n-1}(x),\\
&\frac{\partial^{n-1} f(x, y_0)}{\partial q^{n-1}} = (n-1)!\,h_{n-1}[p(x, y_0)] = \varphi_n(x).
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Мяркуем, што

$$h_{n-1}[p(x, y)] = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k p^k(x, y), \tag{5}$$

$$h_{n-2}[p(x, y)] = \sum_{k=1}^{\infty} b_k p^k(x, y), \tag{6}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$h_1[p(x, y)] = \sum_{k=1}^{\infty} a_k p^k(x, y), \tag{7}$$

$$h_0[p(x, y)] = \sum_{k=1}^{\infty} c_k p^k(x, y). \tag{8}$$

Пры гэтым лічым, што $p = xt(y)$, а $q = q(x, y)$ – функцыя, аналітычная ад x пры $y = y_0 = const$.

У формулах (4) функцыя h_k $(k = 0, 1, ..., n-1)$ – адвольная F-манагенная функцыя па функцыі p у абсягу D. Як паказана ў працы [1], функцыя, аналітычная ад p, з'яўляецца F-манагеннай па функцыі p у абсягу D. Таму натуральна шукаць функцыю h_{n-1}, якая задавальняе ўмове

$$(n-1)!\,h_{n-1}[p(x, y_0)] = \varphi_n(x) \tag{9}$$

у класе функцый, аналітычных ад p, гэта значыць у класе функцый (5).

Мяркуючы ў роўнасці (5) $p = xt(y)$, атрымаем

$$h_{n-1}[p(x,y)] = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k x^k t^k(y), \beta_k = const\ . \tag{10}$$

Паводле ўмовы

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x^k, \alpha_k = const\ , \tag{11}$$

на падставе роўнасцяў (9) – (11) атрымліваем, што

$$(n-1)!\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k x^k t^k(y_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x^k\ , \tag{12}$$

дзе α_k $(k = 1,2,3...)$ – вядомыя пастаянныя.

З роўнасці (12) вынікае, што

$$\beta_k = \frac{1}{(n-1)!\, t^k(y_0)} \alpha_k\ ,\ k = 1,2,3...\ .$$

Такім чынам, функцыя h_{n-1}, якая задавальняе ўмове (9), мае наступны выгляд:

$$h_{n-1}[p(x,y)] = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{t^k(y_0)} x^k t^k(y)\ .$$

Знойдзем цяпер з умовы

$$\frac{\partial^{n-2} f(x,y_0)}{\partial q^{n-2}} = (n-1)!\, h_{n-1}[p(x,y_0)] q(x,y_0) + (n-2)!\, h_{n-2}[p(x,y_0)] = \varphi_{n-1}(x) \tag{13}$$

функцыю h_{n-2}, мяркуючы, што гэтая функцыя мае выгляд

$$h_{n-2}[p] = \sum_{k=1}^{\infty} b_k p^k\ , \tag{14}$$

дзе $p = xt(y)$.

З роўнасці (13) вынікае, што

$$h_{n-2}[p(x,y_0)] = (\varphi_{n-1}(x) - (n-1)!\, h_{n-1}[p(x,y_0)] q(x,y_0)) \frac{1}{(n-2)!}\ . \tag{15}$$

Правая частка роўнасці (15) – вядомая аналітычная функцыя ад x пры $x \in (a,b)$, бо такімі з'яўляюцца ўсе функцыі, якія ўваходзяць у правую частку.

Такім чынам,

$$(\varphi_{n-1}(x) - (n-1)!\, h_{n-1}[p(x,y_0)] q(x,y_0)) \frac{1}{(n-2)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k x^k\ , \tag{16}$$

дзе $\gamma_1, \gamma_2, ...$ – вядомыя канстанты.

З умовы (15) на падставе (14) і (16) атрымаем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k t^k(y_0) x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k x^k\ ,$$

адкуль вынікае, што

$$b_k = \frac{\gamma_k}{t^k(y_0)}, k = 1,2,3,... \quad .$$

Аналагічным чынам на падставе ўмоў (4) знаходзім функцыі $h_{n-3},\ h_{n-4},\ \dots,\ h_1,\ h_0$.

Заключэнне. Такім чынам, сфармуляваная задача рэшана.
Заўвага. Калі ўзяць $p = z = x + iy$, $q = \overline{z} = x - iy$, то раўнанне (1) прыме выгляд

$$\frac{\partial^n f}{\partial \overline{z}^n} = 0 \, .$$

Апошняе раўнанне, як вядома, вызначае так званую поліаналітычную функцыю.

Літаратура

1. *Федоров, В. С.* Основные свойства обобщенных моногенных функций / В. С. Федоров // Известия вузов. Математика. – 1958.– № 6.– С. 257–265.
2. *Павлов, С. Д.* Решение систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными с помощью моногенных функций в смысле В. С. Федорова / С. Д. Павлов // Anal. stiint. Univ. Iasi. – 1962. – F. 2. – T. 8. – P. 323–329.
3. *Стельмашук, Н. Т.* О некоторых линейных дифференциальных системах в частных производных / Н. Т. Стельмашук // Сибирский математический журнал. – 1964. – № 1.– Т. 5.– С. 166–173.
4. *Кусковский, Л. Н.* О краевой задаче типа Римана – Гильберта / Л. Н. Кусковский // Дифференциальные уравнения. – 1975. – № 3. – Т. 11. – С. 52–532.
5. *Стельмашук, Н. Т.* Метод формальных производных для решения задачи Коши для одной системы дифференциальных уравнений в частных производных / Н. Т. Стельмашук, В. А. Шилинец // Дифференциальные уравнения. – 1993. – № 11. – Т. 29. – С. 2019–2020.
6. *Stelmashuk, N. T.* The solution of the boundary value problem for a system of equations in formal derivatives by means dual differential operators / N. T. Stelmashuk, V. A. Shylinets // Труды института математики НАН Беларуси. – 2004. – № 2. – Т. 12. – С. 170–171.
7. *Стельмашук, Н. Т.* О преобразовании к каноническому виду системы линейных уравнений в частных производных с помощью двойных дифференциальных операторов / Н. Т. Стельмашук, В. А. Шилинец // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008.– № 2. – С. 61–65.
8. *Стельмашук, Н. Т.* Об одном исследовании системы Максвелла с помощью F-моногенных функций / Н. Т. Стельмашук // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1967. – № 2. – Т. 7.– С. 431–436.
9. *Стэльмашук, М. Т.* Пабудова інтэгральных выяўленняў для функцыянальна-інварыянтных рашэнняў сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў Максвэла / М. Т. Стэльмашук, У. А. Шылінец // Весці БДПУ. – 1999. – № 2.– С. 147–150.

References

1. *Fedorov, V. S.* Osnovnye svojstva obobshchennyh monogennyh funkcij / V. S. Fedorov // Izvestiya vuzov. Matematika. – 1958.– № 6.– S. 257–265.
2. *Pavlov, S. D.* Reshenie sistem linejnyh differencial'nyh uravnenij s chastnymi proizvodnymi s pomoshch'yu monogennyh funkcij v smysle V. S. Fedorova / S. D. Pavlov // Anal. stiint. Univ. Iasi. – 1962. – F. 2. – T. 8. – P. 323–329.
3. *Stel'mashuk, N. T.* O nekotoryh linejnyh differencial'nyh sistemah v chastnyh proizvodnyh / N. T. Stel'mashuk // Sibirskij matematicheskij zhurnal. – 1964. – № 1.– T. 5.– S. 166–173.
4. *Kuskovskij, L. N.* O kraevoj zadache tipa Rimana – Gil'berta / L. N. Kuskovskij // Differencial'nye uravneniya. – 1975. – № 3. – T. 11. – S. 52–532.
5. *Stel'mashuk, N. T.* Metod formal'nyh proizvodnyh dlya resheniya zadachi Koshi dlya odnoj sistemy differencial'nyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh / N. T. Stel'mashuk, V. A. Shilinec // Differencial'nye uravneniya. – 1993. – № 11. – T. 29. – S. 2019–2020.
6. Stelmashuk, N. T. The solution of the boundary value problem for a system of equations in formal derivatives by means dual differential operators / N. T. Stelmashuk, V. A. Shylinets // Trudy instituta matematiki NAN Belarusi. – 2004. – № 2. – T. 12. – S. 170–171.
7. *Stel'mashuk, N. T.* O preobrazovanii k kanonicheskomu vidu sistemy linejnyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh s pomoshch'yu dvojnyh differencial'nyh operatorov / N. T. Stel'mashuk, V. A. Shilinec // Vesci NAN Belarusi. Ser. fiz.-mat. navuk. – 2008.– № 2. – S. 61–65.
8. *Stel'mashuk, N. T.* Ob odnom issledovanii sistemy Maksvella s pomoshch'yu F-monogennyh funkcij / N. T. Stel'mashuk // Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki. – 1967. – № 2. – T. 7.– S. 431–436.
9. *Stel'mashuk, M. T.* Pabudova integral'nyh vyyaŭlennyaŭ dlya funkcyyanal'na-invaryyantnyh rashennyaŭ sistemy dyferencyyal'nyh raŭnannyaŭ Maksvela / M. T. Stel'mashuk, U. A. Shylinec // Vesci BDPU. – 1999. – № 2.– S. 147–150.

10. *Шылінец, У. А.* Даследаванне сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных пры дапамозе F-манагенных гіперкамплексных функцый / У. А. Шылінец, І. М. Гуло // Весці БДПУ. Серыя 3. – 2019. – № 4. – С. 5–8.
11. *Стэльмашук, М. Т.* Рашэнне задачы Кашы для дыферэнцыяльнага раўнання другога парадку / М. Т. Стэльмашук, У. А. Шылінец // Состояние, проблемы и перспективы теории и практики обучения математике, физике и информатике : матер. межд. науч. конф.– Мінск : БГПУ, 2002. – С. 149–151.
12. *Гусев, В. А.* об одном обобщении ареолярных производных / В. А. Гусев // Bul. stiint. al Instit. politehnic Timisoara. – 1962. – F. 2.– T. 7. – P. 223–238.

10. *Shylinec, U. A.* Dasledavanne sistemy dyferencyyal'nyh raŭnannyaŭ u chastkovyh vytvornyh pry dapamoze F-managennyh giperkampleksnyh funkcyj / U. A. Shylinec, I. M. Gulo // Vesci BDPU. Seryya 3. – 2019. – № 4. – S. 5–8.
11. *Stel'mashuk, M. T.* Rashenne zadachy Kashy dlya dyferencyyal'naga raŭnannya drugoga paradku / M. T. Stel'mashuk, U. A. Shylinec // Sostoyanie, problemy i perspektivy teorii i praktiki obucheniya matematike, fizike i informatike : mater. mezhd. nauch. konf. – Minsk : BGPU, 2002. – S. 149–151.
12. *Gusev, V. A.* ob odnom obobshchenii areolyarnyh proizvodnyh / V. A. Gusev // Bul. stiint. al Instit. politehnic Timisoara. – 1962. – F. 2.– T. 7. – P. 223–238.