Весці БДПУ. Серыя 3. 2020. № 2. С. 27–33.

УДК 510.22

ОЦЕНКА ДЛЯ МЕРЫ МНОЖЕСТВА РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ С ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМИ ПОЛИНОМАМИ

М. А. Ламчановская,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физико-математических дисциплин Института информационных технологий БГУИР;

О. В. Рыкова,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики БГУИР

UDC 510.22

ESTIMATION OF THE MEASURE OF MULTITUDE OF SOLVING THE SYSTEM OF INEQUALITIES WITH INTEGER POLYNOMIALS

M. Lamchanovskaya,
PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Physical-Mathematical Disciplines, Institute of Informational Technologies, BSUIR;

O. Rykova,
PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, BSUIR

Поступила в редакцию 20.04.20.

Received on 20.04.20.

В классе целочисленных полиномов *P(x)* $P_n(Q) = \{P(x) \in Z[x]_x$: $\deg P \leq n$, $H(P) \leq Q\}$ рассматривается система неравенств $\prod_{i=1}^{k}\left|P(x_i)\right| < Q^{-w}$, $2 \leq k < n$. Обозначим через B множество $\overline{x} = (x_1,...,x_k)$, для которых эти неравенства имеют хотя бы одно решение при $P(x) \in P_n(Q)$. В работе при достаточно большом $Q > Q_0(n)$ доказано неравенство $\mu B < 1/4 \mu П$, где μM – мера Лебега множества $M \subset R^k$.

Ключевые слова: целочисленный полином, степень полинома, дискриминант, мера Лебега, действительные числа.

In the class of integer polynomials *P(x)* $P_n(Q) = \{P(x) \in Z[x]_x$: $\deg P \leq n$, $H(P) \leq Q\}$ the system of inequalities $\prod_{i=1}^{k}\left|P(x_i)\right| < Q^{-w}$, $2 \leq k < n$. is being considered. Let us designate the multitude $\overline{x} = (x_1,...,x_k)$ through *B*, for which these inequalities have at least one solution with $P(x) \in P_n(Q)$. In the work with rather large $Q > Q_0(n)$ the inequality $\mu B < 1/4 \mu П$, μM – has been proved, where is Lebesgue measure of the multitude $M \subset R^k$.

Keywords: integer polynomial, degree of polynomial, discriminant, Lebesgue measure, real numbers.

Введение. Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ – многочлен с целыми коэффициентами, H – его высота. В [1] доказана теорема о совместной аппроксимации нуля значениями целочисленных многочленов, реализующих теорему Минковского о линейных формах и их производных.

Пусть задано натуральное число $Q > 1$ и некоторые промежутки $I_j \subset \mathbb{R}$ длины $\left|I_j\right| = Q^{-v}, 0 < v < \frac{1}{k}, 1 \leq k \leq n.$ Рассмотрим многочлен с целыми коэффициентами

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x].$$

Под высотой многочлена *P(x)* будем подразумевать величину $H(P) = \max_{0 \leq i \leq n}\left|a_i\right|.$ Степень многочлена *P(x)* будем обозначать как $\deg P = n$. Определим множество многочленов с целыми коэффициентами ограниченной степени и высоты:

$$\mathcal{P}_n(Q) := \left\{P(x) \in \mathbb{Z}[x], \deg \in P \leq n, H(P) \leq Q\right\}.$$

Пусть далее $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \Pi = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_k$ – вещественный вектор. Через μB будем обозначать меру Лебега измеримого множества $B \in \mathbb{R}^k, k \in \mathbb{N}$, для элементов которого неравенство

$$\prod_{i=1}^{k} |P(x_i)| < Q^{-w}, \; w > n - k + 1 \tag{1}$$

справедливо для любого $x \in B$ хотя бы при одном полиноме $P(x) \in P_n(Q)$.

Основная часть.

Теорема: $\mu B < \frac{1}{4} \mu \Pi$.

Задача о разрешимости неравенств вида (1) берет свое начало с работы К. Малера [9] и его гипотезы, доказанной В. Г. Спринджуком.

Приведем несколько лемм. Через $c_1 = c_1(n), c_2$... обозначим положительные числа, которые зависят только от степени многочлена и не зависят от его высоты и Q.

Лемма 1. Пусть $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_s(x)$ – многочлены и $P(x) = P_1(x) \cdot P_2(x) \cdot \ldots \cdot P_s(x) \cdot$
Тогда

$$c_1 H(P_1) \cdot \ldots \cdot H(P_s) < H(P) < c_2 H(P_1) \cdot \ldots \cdot H(P_s).$$

Лемма 1 доказана в [3, 6].

Лемма 2. Пусть все координаты вектора $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ трансцендентны и B_1, B_2 множества точек $\bar{x} \in \Pi$, для которых неравенства

$$\prod_{i=1}^{k} |P(x_i)| < Q^{-\lambda_1}, \prod_{i=1}^{k} |F(x_i)| < Q^{-\lambda_1}$$

имеют решение в целочисленных многочленах $P(x)$ степени не выше n и целочисленных неприводимых многочленах $F(x)$ степени не выше n соответственно. Тогда, если

$$\mu B_2 < c_3(n) \mu \Pi, \; 0 < c_3 < 1,$$

то

$$\mu B_1 < c_4(n) \mu \Pi, \; c_3 < c_4 < 1.$$

Доказательство леммы 2 близко к доказательству утверждения §5 главы 1 из [1].

Лемма 3. Пусть при некотором $\lambda_2 > 0$ неравенство

$$\prod_{i=1}^{k} |F_1(x_i)| < Q^{-\lambda_2}$$

имеет решение для множества B_1, $\mu B_1 < c_5 \mu \Pi$, в целочисленных неприводимых многочленах $F_1(x)$ степени не выше n. Тогда неравенство

$$\prod_{i=1}^{k} |F_2(x_i)| < Q^{-\lambda_2}$$

имеет решение для некоторого множества B_2, $\mu B_2 < c_6 \mu \Pi$, в целочисленных неприводимых полиномах $F_2(x)$ степени не выше n, подчиненных условию

$$\max_{0 \le i \le n-1} |a_i(F_2)| \le a_n(F_2) = H(F_2), \tag{2}$$

где $a_i(F_2)$ – коэффициенты полинома $F_2(x)$.

Доказательство леммы 3 близко к доказательству утверждения §6 главы 1 из [6, 7].

Леммы 2 и 3 позволяют свести доказательство теоремы к рассмотрению неравенства (1) в неприводимых многочленах, удовлетворяющих условию (2). Обозначим через $\mathcal{R}_n(Q)$ класс неприводимых многочленов $P(x)\in\mathcal{P}(Q)$ с условием (2), для которых $a_n(P) = H$.

Доказательство теоремы будем проводить для случая $k = 2$. Обобщение теоремы на случай произвольного k несложно. Пусть $P(x)\subset\mathcal{P}_n(Q)$ и α_1, α_2, ... α_n – его корни. Нетрудно доказать [6, 7], что

$$|\alpha_i|\le n\left(i=1,2,\ldots,n\right). \tag{3}$$

Упорядочим корни следующим образом

$$\mathrm{Re}\alpha_1\le\mathrm{Re}\alpha_2\le\ldots\le\mathrm{Re}\alpha_n.$$

В случае равенства ранее будем записывать тот корень, у которого меньше модуль мнимой части, а в случае равенства модулей ранее поставим тот корень, мнимая часть которого положительна. Выберем два любых корня α_i и α_j. Относительно каждого из них все остальные корни упорядочим следующим образом:

$$\left|\alpha_i-\alpha_{i_2}\right|\le\left|\alpha_i-\alpha_{i_3}\right|\le\ldots\le\left|\alpha_i-\alpha_{i_n}\right|, \tag{4}$$

$$\left|\alpha_J-\alpha_{J_2}\right|\le\left|\alpha_J-\alpha_{J_3}\right|\le\ldots\le\left|\alpha_J-\alpha_{J_n}\right|. \tag{5}$$

Введем обозначения

$$\left|\alpha_i-\alpha_{i_l}\right|=Q^{-\lambda_l}\left(l=2,\ldots,n\right), \tag{6}$$

$$\left|\alpha_i-\alpha_{i_s}\right|=Q^{-\lambda_S}\left(S=2,\ldots,n\right). \tag{7}$$

Учитывая леммы 2 и 3, для доказательства теоремы при $k = 2$ достаточно доказать, что при любом $\varepsilon < 0$ неравенство

$$\left|P\left(x_1\right)\right|\left|P\left(x_2\right)\right|<Q^{-(n-1)-\varepsilon} \tag{8}$$

имеет решение в целочисленных неприводимых многочленах *P(x),* подчиненных условию (2). Зафиксируем ε и положим

$$T=\left|\frac{20n^2}{\varepsilon}\right|+1.$$

Определим целые числа l_i из S_i неравенств

$$\frac{l_i}{T}\le\lambda_i<\frac{l_i+1}{T}\left(i=2,\ldots,n\right), \tag{9}$$

$$\frac{S_i}{T}\le\lambda_s<\frac{S_i+1}{T}\left(i=2,\ldots,n\right). \tag{10}$$

С фиксированной парой корней (α_i, α_s) многочлена *P(x)* будем связывать целочисленный вектор $\bar{S}_{i,j}=\bar{S}=\left(l_{21},\ldots,l_n,S_{21},\ldots,S_n\right)$. Все многочлены $P(x)\in\mathcal{P}_n(Q)$, имеющие один и тот же вектор $\bar{S}$, объединим в класс $\mathcal{P}_n\left(Q,\bar{S}\right)$.

Лемма 4. Число классов $\mathcal{P}_n\left(Q,\bar{S}\right)$ конечно и зависит от n и ε, но не зависит от Q.

Доказательство: Лемма будет доказана, если показать, что любое из целых l_i, S_i принимает лишь конечное, зависящее только от n и ε число значений. Неравенства $-1 \le l_i$, и $-1 \le S_i$

выполняются при достаточно больших Q, так как для любых корней d_1 и d_2 многочлена $P(x)$ из (3) следует $|d_1 - d_2| \le 2n$. Получим верхнюю оценку для l_i, S_i. Рассмотрим дискриминант $D(P)$ многочлена $P(x)$. Так как $P(x)$ неприводим, то $|D(P)| \ge 1$. С другой стороны,

$$|D(P)| = Q^{2n-2} \prod_{1 \le i \le j \le n} |\alpha_i - \alpha_s|^2 \le c(n) Q^{2n-2} |\alpha_l - \alpha_s|^2 \tag{11}$$

для любых $l \ne k \,(1 \le l \le n, 1 \le k \le n)$. Из (11) получаем

$$1 \le |D(P)|^{\frac{1}{2}} \le c(n) Q^{n-1} |x_l - x_s|. \tag{12}$$

Если $|\alpha_i - \alpha_s| < Q^{-n}$, то при достаточных больших Q равенство (12) противоречиво. Поэтому $|\alpha_i - \alpha_s| < Q^{-n}$. Отсюда и из (9,10) следует, что $l_i \le nT$ и $S_i \le nT$, а значит, число различных векторов $\overline{S}$ не превосходит $(nT + 2)^{2n-2}$.

Учитывая лемму 4, можем считать, что неравенство (8) рассматривается для многочленов $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q, \overline{S})$ с фиксированным вектором $\overline{S}$.

Пусть для некоторого $\overline{x}$ выполняется неравенство (8). Можно считать, что $|P(x_1)| < Q^{v_1(x_1)}, |P(x_2)| < Q^{v_2(x_2)}$ и $v_1(x_1) + v_2(x_2) \ge n - 1 + \varepsilon$. Определим целые числа t_1, t_2 из неравенств

$$\frac{t_1}{T} < v_1(x_1) \le \frac{t_1 + 1}{T} \tag{13}$$

$$\frac{t_2}{T} < v_2(x_2) \le \frac{t_2 + 1}{T}. \tag{14}$$

Из определения t_1, t_2 следует, что

$$\begin{cases} |P(x_1)| < Q^{\frac{-t_1}{T}} \\ |P(x_2)| < Q^{\frac{-t_2}{T}} \end{cases}, \tag{15}$$

где $\dfrac{t_1 + t_2}{T} \ge v_1(x_1) + v_2(x_2) - \dfrac{2}{T} > n - 1 + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

По теореме Спринджука [6, 7] неравенства $|P(x_1)| < Q^{-n-1}, |P(x_2)| < Q^{-n-1}$ выполняются бесконечно часто лишь для множества чисел x_1 и x_2, имеющего нулевую меру Лебега на $\mathbb{R}$, поэтому в системе (15) можно считать, что $t_1 < (n+1)T, t_2 < (n+1)T$. С другой стороны, из справедливости неравенства $|P(x_1)| < c(n)$ для всех x следует, что $t_1 > -T - 1$ и $t_2 > -T - 1$.

Таким образом, как t_1, так и t_2 принимают не более $(t + 2)T$ значений. Поэтому если для некоторого $\overline{x}$ неравенство (8) имеет бесконечное число решений, то для этого $\overline{x}$ бесконечное число раз выполняется система неравенств (15) с фиксированными $t_1 = t_1(\overline{x})$ u $t_2 = t_2(\overline{x})$, удовлетворяющими неравенству (16), или это $\overline{x}$ принадлежит множеству нулевой меры. Зафиксируем t_1 и t_2 в системе (15).

Пусть $S(\alpha_i)$ – множество действительных и комплексных чисел x_1, обладающих свойством

$$\min_{1\le i\le n}|x_1-\alpha_l|=|x_1-\alpha_i|. \tag{16}$$

Аналогично, пусть $S(\alpha_j)$ – множество вещественных и комплексных чисел x_2, обладающих свойством

$$\min_{1\le j\le n}|x_2-\alpha_s|=|x_1-\alpha_j|. \tag{17}$$

Очевидно, что $S(x_j)(j = 1, ..., n)$ представляют собой интервалы, причем два крайних интервала имеют вид $(-\infty, \eta_1)$, $(\eta_2, +\infty)$ где η_1 и η_2 – некоторые вещественные алгебраические числа.

Если для некоторого $\bar{x}$ система неравенств (15) имеет бесконечное число решений, то для этого $\bar{x}$ бесконечное число раз выполняется система неравенств (15) с условием $x_1\in S(\alpha_i), x_2\in S(\alpha_j)$ для некоторых i и j ($1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$,) Зафиксируем i и j, то есть будем рассматривать систему неравенств (15) при фиксированных t_1 и t_2 и $x_1 \in S(\alpha_i)$, $x_2 \in S(\alpha_j)$:

$$\begin{cases} |P(x_1)|<Q^{\frac{-t_1}{T}} \\ |P(x_2)|<Q^{\frac{-t_2}{T}} \\ x_1\in S(\alpha_i), x_2\in S(\alpha_j) \end{cases}. \tag{18}$$

Лемма 5. Пусть $|P(x)|\in\mathcal{P}(Q), x\in S(\alpha)$.
Тогда

$$|x-\alpha_j|\le 2^n\frac{|P(x)|}{|P'(\alpha_j)|}, \tag{19}$$

$$|x-\alpha_j|\le\min_{j\ge2}\left(2^n\frac{|P(x)|}{|P'(\alpha_j)|}|\alpha_i-\alpha_{i2}|...|\alpha_i-\alpha_{ij}|\right), \tag{20}$$

где $\alpha_{i2},..., \alpha_{in}$, упорядочены, как в (4).

Доказательство. Из неравенства (17), определяющего $S(\alpha_j)$, получаем

$$|\alpha_i-\alpha_{ij}|\le|x-\alpha_j|+|x-\alpha_{ij}|\le2|x-\alpha_{ij}|(j=2,\dots,n). \tag{21}$$

Из тождеств

$$|x-\alpha_i|\le\frac{|P(x)|}{Q|x-\alpha_2|...|x-\alpha_n|}, \tag{22}$$

$$P'(\alpha_j)=Q|\alpha_i-\alpha_{i2}|\dots|\alpha_i-\alpha_{in}|, \tag{23}$$

и из неравенств (21) имеем

$$|x-\alpha_i|\le2^n\frac{|P(x)|}{|P'(\alpha_i)|}. \tag{24}$$

Аналогично, используя (22), (23) и (24), получаем:

$$|x-\alpha_i|^j\le|x-\alpha_{i2}|\dots|x-\alpha_{ij}|=\frac{P(x)}{Q|x-\alpha_{ij+1}|\dots|x-\alpha_{in}|}\le2^{n-j}\frac{|P(x)|}{|P'(\alpha_i)|}|x-\alpha_{i2}|\dots|x-\alpha_{ij}|.$$

Лемма 6. Пусть $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$,

$$|x - \alpha_i| < |x - \alpha_{i2}|. \tag{25}$$

Тогда

$$|x - \alpha_i| \geq 2^{-n} \frac{|P(x)|}{|P'(\alpha_i)|}. \tag{26}$$

Доказательство. Для любого j ($j = 2, ..., n$)

$$|x - \alpha_{ij}| \leq |x - \alpha_i| + |\alpha_i - \alpha_{i_j}| \leq 2|\alpha_i - \alpha_{ij}|$$

в силу неравенства (25) при $j = 2$ и неравенства (4) при $j > 2$. Из тождества (23) путем замены $|x - \alpha_{ij}|$ на $2|\alpha_i - \alpha_{ij}|$ получаем (26).

Определим числа ρ_i и q_i, пользуясь (9) и (10):

$$p_i = \frac{l_{i+1} + \ldots + l_n}{T}, \tag{27}$$

$$q_i = \frac{S_{i+1} + \ldots + S_n}{T}. \tag{28}$$

Лемма 7. Пусть $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q, \bar{S})$. Тогда

$$|P^l(\alpha_i)| < c(n) Q^{1-p_l}. \tag{29}$$

Доказательство. При $l = 1$ неравенство (29) следует из (24), (5) и (27), так как

$$|P'(\alpha_i)| = Q|\alpha_i - \alpha_{i2}| \ldots |\alpha_i - \alpha_{in}| = Q^{1-(\mu_1 + \ldots + \mu_n)} \leq Q^{1-p_1}$$

При любом другом l из тождества $P(x) = a_n \prod_{j=1}^{n} (x - \alpha_j)$ получаем

$$P^{(l)}(x) = q = a_n l! \sum_{k_j} (x - \alpha_{k_1}) \cdot (x - \alpha_{k_{n-l}}), \tag{30}$$

где $k_1, \ldots, k_{n-l}$ независимо друг от друга принимают значения 1,…, n, причем $k_1 < \ldots < k_{n-l}$. Из всевозможных произведений $(\alpha_i - \alpha_{ik_1}) \ldots (\alpha_i - \alpha_{ik_{n-l}})$ наибольшим по модулю, в силу неравенства (4), является произведение $(\alpha_i - \alpha_{i_{l+1}}) \ldots (\alpha_i - \alpha_{i_n})$ Поэтому из (30) получаем:

$$|P^{(l)}(\alpha_i)| < c(n) Q |\alpha_i - \alpha_{i_{l+1}}| \ldots |\alpha_i - \alpha_{i_n}|.$$

Отсюда следует (29).

Далее сделаем переход от класса $\mathcal{P}(Q, \bar{S})$ к конечному числу подклассов, каждый из которых будет характеризоваться одинаковым поведением множества решений системы неравенства (19) при изменении t_1 и t_2.

Для любой системы неравенств

$$\begin{cases} |P(x_1)| < Q^{w_1}, \\ |P(x_2)| < Q^{w_2} \end{cases}$$

через $\tau_p(w_1)$ будем обозначать пересечение круга

$$|z_1-\alpha_i|\le\frac{2^nQ^{-w_1}}{|P'(\alpha_i)|}$$

с действительной осью x_1, а через $\tau_p(w_2)$ – пересечение круга

$$|z_2-\alpha_j|\le\frac{2^nQ^{-w_2}}{|P'(\alpha_j)|}$$

с действительной осью x_2. Здесь z_1 и z_2 – комплексные числа. Так как α_i и α_j могут быть комплексными числами, то для некоторых w_1 и w_2 возможно, что $\tau_p(w_1)\ne\varnothing$ и $\tau_p(w_2)\ne\varnothing$. Если для некоторого w_1' мы имеем $\tau_p(w_1')\ne\varnothing$, то $\tau_p(w_1)\ne\varnothing$ для всех $w_1<w_1'$ и представляет собой интервал, в котором наряду с точками $x_1\in S(\alpha_1)$ могут содержаться и точки $x_1\in S(\alpha_l)(l\ne 1)$.

Наряду с системой (19) мы будем рассматривать системы неравенств

$$\begin{cases}|P(x_1)|<Q^{\frac{-t_1-l_1}{T}},\\ |P(x_2)|<Q^{\frac{-t_2-l_2}{T}},\\ x_1\in S(\alpha_i),\ x_2\in S(\alpha_j)\end{cases}\tag{31}$$

с целыми l_1 и l_2. Обозначим через k_1 такое целое l_1, что $\tau_p\left(\frac{t_1-l_1}{T}\right)\subset S(\alpha_i)$, но уже $\tau_p\left(\frac{t_1-l_1-1}{T}\right)\not\subset S(\alpha_i)$, то есть в $\tau_p\left(\frac{t_1-l_1}{T}\right)$ есть хотя бы одна точка $S(\alpha_l)(l\ne i)$. Аналогично, через k_2 обозначим такое целое l_2, что $\tau_p\left(\frac{t_2-l_2}{T}\right)\notin S(\alpha_i)$, но $\tau_p\left(\frac{t_2-l_2-1}{T}\right)\notin S(\alpha_j)$, что означает существование $x_2\in\tau_p\left(\frac{t_2-l_2-1}{T}\right)$, принадлежащего $S(\alpha_l)(l\ne i)$.

Из неравенства (20) следует, что числа $x_1\in S(\alpha_j)$, для которых выполняется первое неравенство системы (31), содержатся в интервале $\tau_p\left(\frac{t_1-l_1}{T}\right)$, а все $x_2\in S(\alpha_j)$, для которых выполняется второе неравенство системы (31), содержатся в интервале $\tau_p\left(\frac{t_2-l_2}{T}\right)$.

Лемма 8. Количество векторов $\bar{k}=(k_1,k_2)$ зависит от n и ε и не зависит от Q.

Доказательство. Из неравенства $|P(x)|<c(n)Q$, которое справедливо для всех $x\in(-n,n)$, следует, что $k_1<t_1+T\le(n+2)T$ и $k_2<t_2+T\le(n+2)T$. С другой стороны, если $k_1>t_1-2nT$, то в интервале $\tau_p2(n)$ содержатся как точки $x_1'\in S(\alpha_j)$, так и точки $x_1''\in S(\alpha_l)(l\ne i)$.

В неравенстве

$$\left|\alpha_i - \alpha_j\right| < \left|\alpha_1' - \alpha_i\right| + \left|x_1' - x_1''\right| + \left|x_1'' - \alpha_l\right|$$

точки x_1' и x_1'' можно взять как угодно близкими, поэтому будем считать, что $\left|x_1' - x_1''\right| + \left|x_1'' - \alpha_l\right| < 2\left|\alpha_1' - \alpha_i\right|$. Из определения получаем, что

$$\left|\alpha_1' - \alpha_i\right| < 2^n \frac{Q^{-2n}}{\left|P'(\alpha_i)\right|},$$

оттуда $\left|\alpha_i - \alpha_j\right| < 3 \cdot 2^n \dfrac{Q^{-2n}}{\left|P'(\alpha_i)\right|}$ и

$$\left|\alpha_i - \alpha_{i_1}\right| \dots \left|\alpha_i - \alpha_{i_n}\right| \left|\alpha_i - \alpha_l\right| < 3 \cdot 2^n Q^{-2n-1}.$$

Из неприводимости полинома *P(x)* следует, что его дискриминант $\left|D(P)\right| \geq 1$. Имеем

$$1 \leq \left|D(P)\right| = Q^{-2(n-1)} \prod_{1 \leq t < S \leq n} \left|\alpha_t - \alpha_s\right|^2 < c(n) H^{2(n-1)} \left|\alpha_i - \alpha_{i_2}\right| \dots \left|\alpha_i - \alpha_{i_n}\right| < c(n) Q^{-3}$$

Полученное неравенство противоречиво и показывает, что $k_1 \geq t_1 - 2nT \geq -T - 1 - 2nT \geq -(2n + 2)T$. Аналогичное неравенство справедливо и для k_2. Отсюда следует, что вектор k может принимать не более $(3n+4)^2 T^2$ значений.

Многочлены *P(x)*, принадлежащие $\mathcal{P}(Q, \bar{S})$, будем относить к одному и тому же подклассу $\mathcal{P}(Q, \bar{S}, \bar{k})$, если они имеют один и тот же вектор $\bar{k} = (k_1, k_2)$. Теперь ясно, что теорема будет доказана, если ее доказать для системы (19) в многочленах $P(x) \in \mathcal{P}(Q, \bar{S}, \bar{k})$ при $x_1 \in S(\alpha_i), x_2 \in S(\alpha_j)$.

Пусть $P(x) \in \mathcal{P}(Q, \bar{S})$ и $F(x) \in \mathcal{P}(Q, \bar{S})$. Обозначим через $\alpha_i(P)$ корни *P(x)* и через $\alpha_i(F)$ корни $F(x) (1 \leq i \leq n)$.

Лемма 9. Пусть выполнены два условия:

$$\tau_p(w) \cap \tau_p(w) \neq \varnothing \tag{32}$$

$$\frac{l_2}{T} < \frac{w + 1 - p_2}{2}. \tag{33}$$

Тогда для всех $x \in \tau_p(w)$

$$\left|F(x)\right| < c(n) H^{-w + \frac{\varepsilon}{20}}. \tag{34}$$

Доказательство. Так как $\tau_p(w)$ и $\tau_F(w)$ пересекаются, то для любых двух точек $x_1 \in \tau_p(w)$ и $x_2 \in \tau_p(w)$ справедливо неравенство

$$\left|x_1 - x_2\right| \leq 2 \max_{x \in \tau_p(w)} \left|x - \alpha_i(P)\right| + 2 \max_{x \in \tau_F(w)} \left|x - \alpha_i(F)\right| \leq 2^{n+1} Q^{-w} \left(\frac{1}{\left|P'(\alpha(P))\right|} + \frac{1}{\left|F'(\alpha(F))\right|} \right) \tag{35}$$

Так как *P(x)* и *F(x)* принадлежат одному и тому же классу $\mathcal{P}_n\left(Q,\bar{S}\right)$, то:

$$\max\left(\frac{1}{\left|P'\left(\alpha\left(P\right)\right)\right|}+\frac{1}{\left|F'\left(\alpha\left(F\right)\right)\right|}\right)<Q^{p_1+\frac{n}{T}-1}. \qquad (36)$$

Из (35) и (36) получаем:

$$\left|x_1-x_2\right|<2^{n+2}Q^{-w+p_1+\frac{n}{T}-1}. \qquad (37)$$

Воспользуемся разложением *F(x)* в ряд Тейлора в корне $\alpha_i(F)$ этого многочлена:

$$F\left(x\right)=F\left(\alpha_i\left(F\right)\right)+F'\left(\alpha_i\left(F\right)\right)\left(x-\alpha_i\left(F\right)\right)+\frac{1}{2}F''\left(\alpha_i\left(F\right)\right)\left(x-\alpha_i\left(F\right)\right)^2+\ldots+$$
$$+\frac{1}{n!}F^{(n)}\left(\alpha_i\left(F\right)\right)\left(x-\alpha_i\left(F\right)\right). \qquad (38)$$

Если $x\in\tau_p\left(w\right)$, то из (37) получаем:

$$\left|x-\alpha_i\left(F\right)\right|<2^{n+2}Q^{-w+p_1+\frac{n}{T}-1}.$$

Поэтому

$$F'\left(\alpha_i\left(F\right)\right)\left(x-\alpha_i\left(F\right)\right)<c\left(n\right)Q^{1-p_1-w+p_1+\frac{n}{T}-1}=c\left(n\right)Q^{-w+\frac{n}{T}}. \qquad (39)$$

Оценим сверху третий член разложения (36). Для этого воспользуемся оценкой $(x-\alpha_i(F))$ и леммой 7. Имеем:

$$\left|\frac{1}{2}F''\left(\alpha_i\left(F\right)\right)\left(x-\alpha_i\left(F\right)\right)^2\right|<c\left(n\right)Q^{1-p_2-2w+2p_1+\frac{n}{T}-2}=c\left(n\right)Q^{-w+2\frac{l_2}{T}+p_2-w+\frac{n}{T}-1}. \qquad (40)$$

Применяя неравенства (33), получаем, что $2\frac{l_2}{T}-w+2-p_2<0,$ поэтому (40) можно переписать в виде

$$\left|\frac{1}{2}F''\left(\alpha_i(F)\right)(x-\alpha_i(F))^2\right|<c(n)Q^{1-p_2-2w+2p_1+\frac{n}{T}-2}=c(n)Q^{-w+2\frac{l_2}{T}+p_2-w+\frac{n}{T}-1}. \qquad (41)$$

Далее, при $3\leq S\leq n\left|\left(\frac{1}{S!}F^{(S)}\left(\alpha_i\left(F\right)\right)\left(x-\alpha_i\left(F\right)\right)\right)^S\right|<c\left(n\right)Q^{1-p_2-sw\cdot sp_1-s+\frac{sn}{T}}=$

$$=c\left(n\right)Q^{-w+\frac{n}{T}-(S-1)(w+1)+\frac{(s-1)n}{T}+sp_1-ps}.$$

Из неравенства (33) и неравенства $\frac{l_s}{T}\leq\frac{l_t}{T}$ для $s>t$ следует, что

$$\left(S-1\right)\left(w+1\right)+P_s\geq\left(s-1\right)P_1+\left(S-1\right)\frac{l_2}{T}+P_s\geq sP_1. \qquad (43)$$

Применяя неравенства (42) и (43) для любого $S\geq 3,$ имеем:

$$\left|\left(\frac{1}{S!}F^{(S)}\left(\alpha_i\left(F\right)\right)\left(x-\alpha_i\left(F\right)\right)^S\right)\right|<c\left(n\right)Q^{-w+\frac{\varepsilon}{20}}.$$

Последнее неравенство вместе с разложением неравенства (39),(41) доказывает лемму.
Лемма 10. Система неравенств

$$\begin{cases}\left|P\left(x\right)\right|<H^{-n+\gamma}\\ \left|P\left(x\right)\right|<H^{1-\varepsilon-\gamma}\end{cases}, \qquad (44)$$

где $0 < \gamma < 1$ при любом $\varepsilon > 0$ имеет для почти всех $x \in R$ (в смысле меры Лебега) лишь конечное число решений в многочленах $P(x) \in Z[x]$.

С помощью этой леммы и ее обобщений доказывается регулярность распределения алгебраических чисел ограниченной степени.

Лемма 11. Пусть $B(\varepsilon)$ – множество точек (w_1, w_2 $\in R$, для которых система неравенств

$$\begin{cases} \left|P\left(w_1\right)\right| < H^{-w_1+\gamma_1} \\ \left|P\left(w_2\right)\right| < H^{-w_1+\gamma_1} \\ \left|P'\left(w_1\right)\right| < H^{1-\gamma_1-\gamma_1-\varepsilon} \end{cases} \quad (45)$$

где $w_1 + w_2 = n - 10 < \gamma_1 + \gamma_2 < 1$ имеет бесконечное число решений в многочленах $P\left(x\right) \in Z\left[x\right]$. Тогда $\mu B\left(\varepsilon\right) = 0$ при любом $\varepsilon > 0$, где $\mu B\left(\varepsilon\right) -$ мера Лебега множества $B(\varepsilon)$.

Из лемм 1–11 аналогично рассуждениям в [1] получаем доказательство теоремы.

Заключение. Основным результатом работы является доказательство теоремы, то есть получение эффективной оценки для меры Лебега множества действительных чисел, реализующих данные приближения с заданным порядком.

Литература

1. *Берник, В. И.* Совместная аппроксимация нуля значениями целочисленных полиномов / В. И. Берник, В. Н. Борбат // Тр. матем. института им. В. А. Стеклова. – 1997. – Т. 218. – С. 58–73.
2. *Берник, В. И.* Распределение действительных алгебраических чисел произвольной степени в коротких интервалах / В. И. Берник, Ф. Гетце // Изв. НАН. Сер. Матем. – 2015. – Т. 79. – Выпуск 1. – С. 21–42.
3. *Гельфонд, А. О.* Трансцендентные и алгебраические числа / А. О Гельфонд. – М. : ГИТТЛ, 1952.
4. *Калоша, Н. И.* О распределении комплексных алгебраических чисел в кругах малого радиуса на комплексной плоскости / Н. И. Калоша, М. В. Ламчановская // Тр. Ин-та матем. – 2015. – Т. 23. – Выпуск 1. – С. 85.
5. *Слесорайтене, Р.* Теорема Малера – Спринжука для полиномов третьей степени от двух переменных (II) / Р. Слесорайтене // Литовск. матем. сб. 10. – 1970. – № 4. – С. 791–814.
6. *Спринджук, В. Г.* Доказательство гипотезы Малера о мере множества S-чисел / В. Г. Спринджук // Изв. АН СССР. Сер. матем., 29. – 1965. – С. 379–436.
7. *Спринджук, В. Г.* Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск : «Наука и техника», 1967.
8. *Baker, A.* On Theorem of Sprindzuk, Proc. Royal. Soc., A. 292, №1428 (1966), s. 92–104.
9. *Mahler K.* Ueber das Mass der Menge aller S-Zahlen, Math. Ann., 1932, s. 106.
10. *Wirsing, E.* Approximation mit algebraischen. Zahlen beschrankten Grades, J. reine and angewandte Math., 206, №1 (1961), s. 67–77.

References

1. *Bernik, V. I.* Sovmestnaya approksimaciya nulya znacheniyami celochislennyh polinomov / V. I. Bernik, V. N. Borbat // Tr. matem. instituta im. V. A. Steklova. – 1997. – T. 218. – S. 58–73.
2. *Bernik, V. I.* Raspredelenie dejstvitel'nyh algebraicheskih chisel proizvol'noj stepeni v korotkih intervalah / V. I. Bernik, F. Getce // Izv. NAN. Ser. Matem. – 2015. – T. 79. – Vypusk 1. – S. 21–42.
3. *Gel'fond, A. O.* Transcendentnye i algebraicheskie chisla / A. O Gel'fond. – M. : GITTL, 1952.
4. *Kalosha, N. I. O* raspredelenii kompleksnyh algebraicheskih chisel v krugah malogo radiusa na kompleksnoj ploskosti / N. I. Kalosha, M. V. Lamchanovskaya // Tr. In-ta matem. – 2015. – T. 23. – Vypusk 1. – S. 85.
5. *Slesorajtene, R.* Teorema Malera – Sprinzhuka dlya polinomov tret'ej stepeni ot dvuh peremennyh (II) / R. Slesorajtene // Litovsk. matem. sb. 10. – 1970. – № 4. – S. 791–814.
6. *Sprindzhuk, V. G.* Dokazatel'stvo gipotezy Malera o mere mnozhestva S-chisel / V. G. Sprindzhuk // Izv. AN SSSR. Ser. matem., 29. – 1965. – S. 379–436.
7. *Sprindzhuk, V. G.* Problema Malera v metricheskoj teorii chisel / V. G. Sprindzhuk. – Minsk : «Nauka i tekhnika», 1967.
8. *Baker, A.* On Theorem of Sprindzuk, Proc. Royal. Soc., A. 292, №1428 (1966), s. 92–104.
9. *Mahler K.* Ueber das Mass der Menge aller S-Zahlen, Math. Ann., 1932, s. 106.
10. *Wirsing, E.* Approximation mit algebraischen. Zahlen beschrankten Grades, J. reine and angewandte Math., 206, №1 (1961), s. 67–77.