МАТЭМАТЫКА

Весці БДПУ. Серыя 3. 2020. № 2. С. 19–23.

УДК 517.968.25

ЗНАХОДЖАННЕ ПРЫ ДАПАМОЗЕ F-МАНАГЕННЫХ ГІПЕРКАМПЛЕКСНЫХ ФУНКЦЫЙ АГУЛЬНАГА РАШЭННЯ СІСТЭМЫ ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНЫХ РАЎНАННЯЎ У ЧАСТКОВЫХ ВЫТВОРНЫХ ДРУГОГА ПАРАДКУ

У. А. Шылінец,
кандыдат фізіка-матэматычных навук, загадчык кафедры вышэйшай матэматыкі УА ФПБ «Міжнародны ўніверсітэт “МІТСО”»;

І. М. Гуло,
кандыдат фізіка-матэматычных навук, загадчык кафедры матэматыкі і методыкі выкладання матэматыкі Беларускага дзяржаўнага педагагічнага ўніверсітэта імя Максіма Танка

Паступіў у рэдакцыю 20.04.20.

UDC 517.968.25

FINDING THE GENERAL SOLUTION FOR THE SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN PARTIAL DERIVATIVES OF THE SECOND ORDER WITH THE HELP OF F-MONOGENIC HYPERCOMPLEX FUNCTIONS

V. Shilinets,
PhD in Physics and Mathematics, Head of the Department of Higher Mathematics, IILSR;

I. Gulo,
PhD in Physics and Mathematics, Head of the Department of Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank

Received on 20.04.20.

Пры дапамозе F-манагенных гіперкамплексных функцый знойдзена агульнае рашэнне сістэмы трох дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных другога парадку.

Ключавыя словы: сістэма дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных, гіперкамплексная функцыя, манагеннасць у сэнсе У. С. Фёдарава, фармальныя вытворныя.

With the help of F-monogenic hypercomplex functions general solution for the system of three differential equations in partial derivatives of the second order has been found.

Keywords: system of differential equations in partial derivatives, hypercomplex function, monogeny in the sense of V. Fedorov, formal derivatives.

Уводзіны. У шэрагу прац [1–7] для даследавання раўнанняў і сістэм дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных выкарыстоўваліся гіперкамплексныя манагенныя ў сэнсе У. С. Фёдарава (F-манагенныя) функцыі [8]. У дадзенай працы пры дапамозе F-манагенных гіперкамплексных функцый даследуецца сістэма дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных другога парадку з трыма невядомымі функцыямі. Для даследавання дадзенай сістэмы выкарыстоўваюцца гіперкамплексныя функцыі выгляду

$$f = u + \lambda v + \lambda^2 w \left(\lambda^3 = -1 \right) \qquad (1)$$

Неабходна адзначыць, што функцыі выгляду (1) выкарыстоўваюцца для даследавання функцыянальна-інварыянтных рашэнняў сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў Максвэла для электрамагнітнага поля ў пустаце [9–10], а таксама функцыянальна-інварыянтных вектар-аналітычных функцый [11–12].

Мноства ўсіх камплексных або рэчаісных функцый, адназначна вызначаных у некаторым адназвязным абсягу D эўклідавай прасторы $E^n(x_1, ..., x_n)$, дзе $n \geq 2$, і непарыўна дыферэнцавальных k разоў у абсягу D, будзем абазначаць $C^k(D)$(выпадак $k = 0$ адпавядае функцыям, непарыўным у абсягу D).

Мноства ўсіх функцый выгляду

$$F = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k \left(x_1, ..., x_n \right) e_k$$

($\varphi_k \in C^k(D)$; e_1, ..., e_m – базіс некаторай лінейнай асацыятыўна-камутатыўнай алгебры A з адзінкай над полем камплексных або рэчаісных лікаў) будзем абазначаць $C^k(D, A)$.

Няхай дадзены функцыі F, $\rho_k \in C^1(D, A)$. Фармальныя вытворныя $\dfrac{\partial F}{\partial p_k}(k = 1, ..., n)$ – гэта такія функцыі ад x_1, ..., x_n, якія вызначаюцца з сістэмы

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial x_i}, \qquad (2)$$

дзе $\left|\dfrac{\partial p_k}{\partial x_i}\right|^{-1}$ існуе (k, i = 1, .., n) [13–14].

Аналагічна будуюцца дыферэнцыяльныя аператары (фармальныя вытворныя) вышэйшых парадкаў для функцый F, $\rho_k \in C^2(D, A)$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p_k^2} = \frac{\partial}{\partial p_k}\left(\frac{\partial F}{\partial p_k}\right); \quad \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial}{\partial p_j}\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right) \qquad (3)$$

$$(k, i, j = 1, n; i \neq j).$$

Няхай функцыі f, $\rho_k \in C^1(D, A)$ (k = 1, ..., m; $m \le n$). Тады функцыя f будзе манагеннай у сэнсе У. С. Фёдарава (F-манагеннай) у абсягу D па функцыях p_1, ..., p_m [15], калі знойдуцца такія адзіныя функцыі $\theta_k \in C^1(D, A)$ (k = 1, ..., m), што для ўсіх пунктаў абсягу D

$$df = \sum_{k=1}^{m} \theta_k \, dp_k.$$

Асноўная частка. Даследуем сістэму дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных другога парадку наступнага выгляду:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \\
+2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\
\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \\
-2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \\
\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} - \\
-2\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0,
\end{gathered} \qquad (4)$$

дзе u, v, w – шуканыя камплексназначныя функцыі трох рэчаісных зменных x, y, z класа $C^2(D)$. Разгледзім задачу знаходжання агульнага рашэння сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў (4).

Няхай алгебра A – асацыятыўна-камутатыўная алгебра з базісам 1, λ, λ^2, дзе закон множання вызначаецца роўнасцю $\lambda^3 = -1$. Увядзём у разгляд гіперкамплексную функцыю

$$f = u + \lambda v + \lambda^2 w \; (f \in C^2(D, A)).$$

Базай будзем называць сукупнасць функцый, па якіх знаходзяцца фармальныя вытворныя [14]. У якасці базы фармальных вытворных выбіраем гіперкамплексныя функцыі

$$p = x + 2y\lambda + z\lambda^2, \; q = y\lambda + z\lambda^2, \; t = z\lambda^2.$$

Тады з азначэння фармальных вытворных (2) і (3) вынікае наступная тэарэма.

Тэарэма 1. Сістэма дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных (4) раўназначная раўнанню ў фармальных вытворных

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \qquad (5)$$

Разгледзім дыферэнцыяльнае раўнанне ў фармальных вытворных (5). Яго можна запісаць у выглядзе $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial f}{\partial t} + f\right) = 0,$ адкуль вынікае, што

$$\frac{\partial f}{\partial t} + f = V_1, \qquad (6)$$

дзе V_1 – адвольная функцыя, манагенная ў сэнсе У. С. Фёдарава па функцыях ρ і q у абсягу D. У гэтым выпадку дамовімся пісаць $V_1 = V_1[\rho, q, D, A]$.

Раўнанне (6) можна запісаць у наступным выглядзе:

$$\frac{\partial}{\partial t}(f - V_1) = -(f - V_1).$$

Рашэнне апошняга раўнання знаходзім падстаноўкай выгляду $f - V_1 = V_2 \exp(-t)$ і атрымаем $\dfrac{\partial V_2}{\partial t} = 0,$ гэта значыць $V_2 = V_2[\rho, q, D, A]$ – адвольная функцыя, F-манагенная па функцыях $p = x + 2y\lambda + z\lambda^2$ і $q = y\lambda + z\lambda^2 \; (\lambda^3 = -1)$ у абсягу D.

Такім чынам, атрымліваем наступную тэарэму.

Тэарэма 2. Агульнае рашэнне раўнання (5) мае выгляд

$$f = V_1 = V_2 \exp(-t), \tag{7}$$

дзе $V_1 = V_1[\rho, q, D, A]$, $V_2 = V_2[\rho, q, D, A]$ – адвольныя функцыі, F-манагенныя па функцыях ρ і q у абсягу D.

У агульным рашэнні (7) дыферэнцыяльнага раўнання (5) прысутнічаюць функцыі $V_1 = V_1[\rho, q, D, A]$, $V_2 = V_2[\rho, q, D, A]$, F-манагенныя па функцыях $\rho = x + 2y\lambda + z\lambda^2$ і $q = y\lambda + z\lambda^2$ абсягу D. Абазначым клас такіх функцый праз $f = [\rho, q, D, A]$ і даследуем структуру функцый класа $f = [\rho, q, D, A]$.

Поруч з гіперкамплекснай сістэмай з базісам 1, λ+ λ^2 ($\lambda^3 = -1$) разгледзім гіперкамплексную сістэму з базісам

$$e_1 = \frac{1}{3}(\lambda^2 - \lambda + 1),$$
$$e_2 = \frac{1}{6}((-1-\sqrt{3}i)\lambda^2 + (1-\sqrt{3}i)\lambda + 2),$$
$$e_3 = \frac{1}{6}((-1+\sqrt{3}i)\lambda^2 + (1+\sqrt{3}i)\lambda + 2),$$

дзе $i^2 = -1$.

Тады $e_1 + e_2 + e_3 = 1$, $e_i \cdot e_k = 0$ $(i \neq k)$, $e_1(e_1 + e_2 + e_3) = e_1$, адкуль $e_1^2 = e_1$;

аналагічна $e_2^2 = e_2, e_3^2 = e_3$.

Відавочнай з'яўляецца роўнасць

$$\lambda^3 + 1 = (\lambda + 1)\left(\lambda - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(\lambda - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right).$$

Калі ўлічыць, што $\lambda^3 = -1$, то будзем мець

$$e_1(\lambda + 1) = 0, e_2\left(\lambda - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = 0,$$

$$e_3\left(\lambda - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = 0,$$

адкуль

$$\lambda e_1 = -e_1, \lambda e_2 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e_2,$$

$$\lambda e_3 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e_3.$$

Такім чынам, $\lambda = -e_1 + re_2 + \bar{r}e_3$,

$$\lambda^2 = e_1 + r^2 e_2 + \overline{r^2} e_3 \left(r = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

адкуль

$$a + b\lambda + c\lambda^2 = e_1(a - b + c) +$$
$$+ e_2(a + rb + r^2 c) +$$
$$+ e_3(a + \bar{r}b + \overline{r^2}c),$$

дзе a, b, c – камплексныя лікі.

Калі скарыстаць апошнюю роўнасць, то функцыі

$$f = u + \lambda v + \lambda^2 w, p = x + 2y\lambda + z\lambda^2,$$
$$q = y\lambda + z\lambda^2, l = l_1 + \lambda l_2 + \lambda^2 l_3,$$
$$h = h_1 + \lambda h_2 + \lambda^2 h_3$$

можна запісаць наступным чынам:

$$f = Pe_1 + Qe_2 + Re_3,$$
$$p = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3,$$
$$q = \xi e_1 + \eta e_2 + \varsigma e_3,$$
$$l = Ae_1 + Be_2 + Ce_3,$$
$$h = He_1 + Me_2 + Ne_3,$$

дзе

$$P = u - v + w,$$
$$Q = u + rv + r^2 w,$$
$$R = u + \bar{r}v + \overline{r^2}w,$$
$$\alpha = x - 2y + z,$$
$$\beta = x + r2y + r^2 z,$$
$$\gamma = x + \bar{r}2y + \overline{r^2}z,$$
$$\xi = -y + z, \eta = ry + r^2 z,$$
$$\varsigma = \bar{r}y + \overline{r^2}z$$

(аналагічна для A, B, C, H, M, N).

Тады ўмова манагеннасці функцыі f па функцыях p і q.

$$df = l dp + h dq$$

прыме наступны выгляд:

$$e_1 dP + e_2 dQ + e_3 dR =$$
$$= e_1 A d\alpha + e_2 B d\beta + e_3 C d\gamma +$$
$$+ e_1 H d\xi + e_2 M d\eta + e_3 N d\varsigma,$$

адкуль

$$dP = Ad\alpha + Hd\xi, dQ = Bd\beta + Md\eta,$$
$$dR = Cd\gamma + Nd\varsigma,$$

гэта значыць камплексная функцыя P з'яўляецца F-манагеннай па дзвюх камплексных функцыях α і ξ, Q з'яўляецца F-манагеннай па функцыях β і η, R – F-манагеннай па функцыях γ і ς.

Атрыманы вынік сфармулюем у выглядзе тэарэмы.

Тэарэма 3. Для таго каб функцыя $f = u + \lambda v + \lambda^2 w\left(\lambda^3 = -1\right)$ была F-манагеннай па функцыях $p = x + 2y\lambda + z\lambda^2$ і $q = y\lambda + z\lambda^2$ ($u, v, w \in C^1(D)$; $u = u(x, y, z)$ і г. д.), неабходна і дастаткова, каб камплексная функцыя $P = u - v + w$ была манагеннай па камплексных функцыях $\alpha = x - 2y + z$ і $\xi = -y + z$; камплексная функцыя $Q = u + rv + r^2w$ была манагеннай па камплексных функцыях $\beta = x + r2y + r^2z$ і $\eta = ry + r^2z$; камплексная функцыя $R = u + \bar{r}v + \overline{r^2}w$ была манагеннай па функцыях $\gamma = x + \bar{r}2y + \overline{r^2}z$ і $\varsigma = \bar{r}y + \overline{r^2}z$.

Такім чынам, для кампанентаў u, v, w функцыі $f = u + \lambda v + \lambda^2 w$ ($\lambda^2 = -1$), F-манагеннай па дзвюх функцыях $\rho = x + 2y\lambda - z\lambda^2$ і $q = y\lambda + z\lambda^2$, маем

$$\left.\begin{aligned} u - v + w &\equiv P[\alpha, \xi], \\ u + vr + wr^2 &\equiv Q[\beta, \eta], \\ u + v\bar{r} + w\overline{r^2} &\equiv R[\gamma, \varsigma], \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

дзе $P[\alpha, \xi]$ ($Q[\beta, \eta]$, $R[\gamma, \varsigma]$) – адвольная камплексная функцыя, F-манагенная па функцыях α і ξ (β і η, γ і ς).

З роўнасцей (8) вынікае наступная тэарэма.

Тэарэма 4. Структура функцыі $f = u + \lambda v + \lambda^2 w$, F-манагеннай па функцыях $\rho = x + 2y\lambda + z\lambda^2$ і $q = y\lambda + z\lambda^2$, вызначаецца формуламі

$$u = \frac{P + Q + R}{3},$$
$$v = \frac{\bar{r}Q - P + rR}{3},$$
$$w = \frac{P - rQ - \bar{r}R}{3},$$

дзе $P \equiv P[\alpha, \xi]$ ($Q \equiv Q[\beta, \eta,]$ $R \equiv R[\gamma, \varsigma]$) – адвольная камплексная функцыя, F-манагенная па функцыях $\alpha = x - 2y + z$ і $\xi = -y + z$ ($\beta = x + r2y + r^2z$ і $\eta = ry + r^2z$, $\gamma = x + \bar{r}2y + \overline{r^2}z$ і $\varsigma = \bar{r}y + \overline{r^2}z$) у абсягу D; $r = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Заключэнне. Каб атрымаць рашэнне u, v, w сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных (4), неабходна вылучыць кампаненты пры базісных адзінках 1, λ, λ^2 агульнага рашэння (7) дыферэнцыяльнага раўнання ў фармальных вытворных (5).

Літаратура

1. *Стельмашук, Н. Т.* О некоторых линейных дифференциальных системах в частных производных / Н. Т. Стельмашук // Сибирский математический журнал. – 1964.– Т. 5.– № 1.– С. 166–173.
2. *Фёдоров, В. С.* Решение некоторых уравнений в частных производных методами F - моногенных функций / В. С. Фёдоров, Н. Т. Стельмашук // Rev. Roum. de Math. Pures et Appl – 1973. – Т. 18.– № 2.– P. 233–241.
3. *Кусковский, Л. Н.* О краевой задаче типа Римана – Гильберта / Л. Н. Кусковский // Дифференциальные уравнения. – 1975. – Т. 11.– № 3.– С. 523–532.
4. *Стельмашук, Н. Т.* О решении одной линейной дифференциальной системы в частных производных методами F-моногенных функций / Н. Т. Стельмашук, С. Б. Пенчанский // Дифференциальные уравнения. – 1990.– Т. 26. – № 4.– С. 724–727.

References

1. *Stel'mashuk, N. T.* O nekotoryh linejnyh differencial'nyh sistemah v chastnyh proizvodnyh / N. T. Stel'mashuk // Sibirskij matematicheskij zhurnal. – 1964.– T. 5.– № 1.– S. 166–173.
2. *Fyodorov, V. S.* Reshenie nekotoryh uravnenij v chastnyh proizvodnyh metodami F - monogennyh funkcij / V. S. Fyodorov, N. T. Stel'mashuk // Rev. Roum. de Math. Pures et Appl – 1973. – T. 18.– № 2.– R. 233–241.
3. *Kuskovskij, L. N.* O kraevoj zadache tipa Rimana – Gil'berta / L. N. Kuskovskij // Differencial'nye uravneniya. – 1975.– T. 11. – № 3.– S. 523–532.
4. *Stel'mashuk, N. T.* O reshenii odnoj linejnoj differencial'noj sistemy v chastnyh proizvodnyh metodami F-monogennyh funkcij / N. T. Stel'mashuk, S. B. Penchanskij // Differencial'nye uravneniya. – 1990.– T. 26. – № 4.– S. 724–727.

5. *Стельмашук, Н. Т.* Метод формальных производных для решения задачи Коши для одной системы дифференциальных уравнений в частных производных / Н. Т. Стельмашук, В. А. Шилинец // Дифференциальные уравнения. – 1993.– Т. 29. – № 11.– С. 2019–2020.
6. *Stelmashuk, N. T.* The solution of the boundary value problem for a system of equations in formal derivatives by means dual differential operators / N. T. Stelmashuk, V. A. Shylinets // Труды института математики НАН Беларуси.– 2004.– № 2. – Т 12.– С. 170–171.
7. *Стельмашук, Н. Т.* О преобразовании к каноническому виду системы линейных уравнений в частных производных с помощью двойных дифференциальных операторов / Н. Т. Стельмашук, В. А. Шилинец // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 2. – С. 61–65.
8. *Фёдоров, В. С.* Основные свойства обобщённых моногенных функций / В.С. Фёдоров // Известия вузов. Математика. – 1958. – № 6. – С. 257–265.
9. *Стельмашук, Н. Т.* О некоторых решениях системы Максвелла / Н. Т. Стельмашук // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1970.– Т. 10. – № 1. – С. 250–252.
10. *Стэльмашук, М. Т.* Аб адной краявой задачы для функцыянальна-інварыянтных рашэнняў сістэмы Максвэла / М. Т. Стэльмашук, У. А. Шылінец // Весці БДПУ. – 1994. – № 1.– С. 91–95.
11. *Стэльмашук, М. Т.* Аб краявой задачы для функцыянальна-інварыянтных вектар-аналітычных функцый / М. Т. Стэльмашук, У. А. Шылінец, Г. А. Андрэева // Весці БДПУ. Сер. 3.– 2010.– № 2.– С. 17–19.
12. *Стельмашук, Н. Т.* Краевая задача для функционально-инвариантных вектор-аналитических функций / Н. Т. Стельмашук, В. А. Шилинец, Г. А. Андреева // Математическое моделирование и краевые задачи: тр. VII Всерос. науч. конф. с междунар. участием. – Ч. 3. Дифференциальные уравнения и краевые задачи. – Самара: СамГТУ, 2010. – С. 266–268.
13. *Гусев, В. А.* Об одном обобщении ареолярных производных / В. А. Гусев // Bul. stiint. al Instit. politehnic Timisoara.– 1962.– F. 2.– Т. 7.– P. 223–238.
14. *Стельмашук, Н. Т.* Определение и свойства формальных производных / Н. Т. Стельмашук // Математика: сб. науч. тр. – Минск : МГПИ, 1973. – С. 52–59.
15. *Морев, И. А.* Об одном обобщении понятия моногенных функций / И. А. Морев // Математический сборник. – 1957.– Т. 42. – № 2.– С. 197–206.

5. *Stel'mashuk, N. T.* Metod formal'nyh proizvodnyh dlya resheniya zadachi Koshi dlya odnoj sistemy differencial'nyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh / N. T. Stel'mashuk, V. A. Shilinec // Differencial'nye uravneniya. – 1993.– T. 29. – № 11.– S. 2019–2020.
6. *Stelmashuk, N. T.* The solution of the boundary value problem for a system of equations in formal derivatives by means dual differential operators / N. T. Stelmashuk, V. A. Shylinets // Trudy instituta matematiki NAN Belarusi. – 2004.– № 2. – T 12.– S. 170–171.
7. *Stel'mashuk, N. T.* O preobrazovanii k kanonicheskomu vidu sistemy linejnyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh s pomoshch'yu dvojnyh differencial'nyh operatorov / N. T. Stel'mashuk, V. A. Shilinec // Vesci NAN Belarusi. Ser. fiz.-mat. navuk. – 2008. – № 2. – S. 61–65.
8. *Fyodorov, V. S.* Osnovnye svojstva obobshchyonnyh monogennyh funkcij / V.S. Fyodorov // Izvestiya vuzov. Matematika. – 1958. – № 6. – S. 257–265.
9. *Stel'mashuk, N. T.* O nekotoryh resheniyah sistemy Maksvella / N. T. Stel'mashuk // Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki. – 1970.– T. 10.– № 1. – S. 250–252.
10. *Stel'mashuk, M. T.* Ab adnoj krayavoj zadachy dlya funkcyyanal'na-invaryyantnyh rashennyaŭ sistemy Maksvela / M. T. Stel'mashuk, U. A. Shylinec // Vesci BDPU. – 1994. – № 1.– S. 91–95.
11. *Stel'mashuk, M. T.* Ab krayavoj zadachy dlya funkcyyanal'na-invaryyantnyh vektar-analitychnyh funkcyj / M. T. Stel'mashuk, U. A. Shylinec, G. A. Andreeva // Vesci BDPU. Ser. 3.– 2010.– № 2.– S. 17–19.
12. *Stel'mashuk, N. T.* Kraevaya zadacha dlya funkcional'no-invariantnyh vektor-analiticheskih funkcij / N. T. Stel'mashuk, V. A. Shilinec, G. A. Andreeva // Matematicheskoe modelirovanie i kraevye zadachi: tr. VII Vseros. nauch. konf. s mezhdunar. uchastiem. – Ch. 3. Differencial'nye uravneniya i kraevye zadachi. – Samara: SamGTU, 2010. – S. 266–268.
13. Gusev, V. A. Ob odnom obobshchenii areolyarnyh proizvodnyh / V. A. Gusev // Bul. stiint. al Instit. politehnic Timisoara.– 1962.– F. 2.– T. 7.– P. 223–238.
14. *Stel'mashuk, N. T.* Opredelenie i svojstva formal'nyh proizvodnyh / N. T. Stel'mashuk // Matematika: sb. nauch. tr. – Minsk : MGPI, 1973. – S. 52–59.
15. *Morev, I. A.* Ob odnom obobshchenii ponyatiya monogennyh funkcij / I. A. Morev // Matematicheskij sbornik. – 1957.– T. 42. – № 2.– S. 197–206.