ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ВСЕСОЮЗНЫЙ ЕЖЕМЕСЯЧНЫЙ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ФЕВРАЛЬ № 2 ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

ТОМ 27

МИНСК
«НАВУКА І ТЭХНІКА»
1991

Очевидно, условия (35) являются необходимыми и для задачи (9). Однако, как показывает следующая лемма, для разрешимости задачи (9) этих условий, вообще говоря, не достаточно.

Л е м м а 3. *Пусть* ρ — *максимальное число линейно независимых решений и системы (1),* $\nabla u \in H_{\mu,\lambda-1}$, *удовлетворяющих краевым условиям*

$$
\begin{gathered}
(u^+)'=0 \ \text{на}\ \Gamma_{\mathrm{I}}, \qquad (v^+)'=0 \ \text{на}\ \Gamma_{\mathrm{II}}, \\
(u^+-u^-)'=(v^+-v^-)'=0 \ \text{на}\ \Gamma_K
\end{gathered}
\tag{38}
$$

и не являющихся решениями однородной задачи (9) (когда $\varphi=\psi=0$). *Тогда*

$$
0\leqslant\rho\leqslant\rho_0, \qquad \rho_0=l(m_{\mathrm{I}}+m_K-n_{\mathrm{I}}-n_K), \tag{39}
$$

и для разрешимости задачи (9) необходимо и достаточно добавления к (35) $\rho_0-\rho$ *некоторых линейно независимых условий ортогональности на правую часть* (φ, ψ).

В частности, если кривые Γ_{I}, Γ_{II}, Γ_K *являются попарно непересекающимися контурами, то любое решение задачи (38) является решением однородной задачи (9), а условия (35) необходимы и достаточны для разрешимости неоднородной задачи (9).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $R:X\to Y$ и $\tilde R:\tilde X\to\tilde Y$ операторы, определяемые левыми частями соответственно (9) и (31). Пространство $\tilde X$ является расширением пространства X на $l(m_{\mathrm{I}}+m_K)$ измерений, если элементы последнего отождествить с парами $(u, 0)$. В определении $\tilde Y$ выполнение условий согласования (12) не предполагается, поэтому $\tilde Y$ является расширением Y на $l(n_{\mathrm{I}}+n_K)$ измерений. Поэтому с учетом обозначения (39) индексы операторов R, $\tilde R$ связаны соотношением $\operatorname{ind} R=\operatorname{ind}\tilde R+\rho_0$. Пусть r и k — размерности ядра и коядра оператора R и пусть $\tilde r$ и $\tilde k$ имеют аналогичный смысл по отношению к $\tilde R$. Легко видеть, что $\tilde r$ совпадает с числом линейно независимых решений задачи (38), так что по определению $\tilde r-r=\rho$. С другой стороны, соотношение для индексов означает, что $\tilde r-\tilde k=r-k+\rho_0$ или $k-\tilde k=\rho_0-\rho$. Поскольку $k\geqslant\tilde k$ и k — число линейно независимых условий ортогональности (35), отсюда следует первое утверждение леммы.

Пусть выполнено условие на Γ ее второго утверждения. Тогда $m_{\mathrm{I}}=n_{\mathrm{I}}$, $m_K=n_K$ и, значит, $\rho_0=0$. В силу (39) отсюда $\rho=0$, так что остается воспользоваться первым утверждением.

Отметим, что, согласно доказательству теоремы 1, величина ρ_0 совпадает с правой частью (26), поэтому с учетом (27)

$$
\rho_0=\frac{l}{2}\sum_{j=1}^{m}\left[|\tilde P_j/P|-k(P_j)\right].
$$

Если $j\in\{K\}$, то $|\tilde P_j/P|\geqslant 2$. Поэтому $|\tilde P_j/P|\geqslant k(P_j)$ для всех j и, значит, $\rho_0\geqslant 0$, что согласуется с неравенством (39).

Литература

1. С о л д а т о в А. П. // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 1. С. 800—804.
2. С о л д а т о в А. П. // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 1. С. 136—144.
3. М у с х е л и ш в и л и Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1986.
4. С о л д а т о в А. П. // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 10. С. 1828—1830.
5. С о л д а т о в А. П. // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299, № 1. С. 825—828.
6. М а л ь ц е в А. И. Основы линейной алгебры. М., 1970.

Владимирский государственный педагогический институт им П. И. Лебедева-Полянского

Поступила в редакцию 12 декабря 1988 г.

УДК 517.95

Н. Т. СТЕЛЬМАШУК, В. А. ШИЛИНЕЦ

ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ВИДОВ УРАВНЕНИЙ В ФОРМАЛЬНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Известно, что И. Н. Векуа в работе [1] успешно применял дифференциальные операторы (формальные производные)

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

для исследования дифференциального уравнения

$$\Delta u+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=f(x,y),$$

которое с помощью формальных производных $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial \zeta}$ редуцируется к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial \zeta}+A(z,\zeta)\frac{\partial u}{\partial z}+B(z,\zeta)\frac{\partial u}{\partial \zeta}+C(z,\zeta)u=F(z,\zeta)$$

$$(z=x+iy;\ \zeta=x-iy).$$

С помощью функции Римана в работе [1] получено интегральное представление решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial \zeta}+A(z,\zeta)\frac{\partial u}{\partial z}+B(z,\zeta)\frac{\partial u}{\partial \zeta}+C(z,\zeta)u=0, \qquad (*)$$

где $\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial \zeta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, функции A, B, C аналитические от $z=x+iy$ и $\zeta=x-iy$ в цилиндрической области $(D,\bar{D})$, $z\in D$, $\zeta\in \bar{D}$.

Цель настоящей работы — исследование уравнения типа (*)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial p\partial q}+A\frac{\partial u}{\partial p}+B\frac{\partial u}{\partial q}+Cu=0, \qquad (1)$$

но в «обобщенных» формальных производных [2], определяемых равенствами $\frac{\partial u}{\partial p}=\frac{1}{\delta}(u'_x q'_y-u'_y q'_x)$, $\frac{\partial u}{\partial q}=\frac{1}{\delta}(u'_y p'_x-u'_x p'_y)$ $(p=p(x,y)$, $q=q(x,y)$ — заданные в некоторой области D комплексные и дважды дифференцируемые функции и при этом в области D $\delta=\begin{vmatrix} p'_x & p'_y \\ q'_x & q'_y \end{vmatrix}\neq 0)$, которые существенно обобщают операторы $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \zeta}$. В самом деле, при $p=x+iy$, $q=x-iy$ получим $\frac{\partial u}{\partial p}=\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial q}=\frac{\partial u}{\partial \zeta}$.

Следует заметить, что уравнение (1) сводится к уравнению Векуа (*) в единственном случае при $p(x,y)=x+iy$, $q(x,y)=x-iy$. В остальных случаях уравнение (1) не может быть приведено к уравнению (*), так как коэффициенты этого уравнения предполагаются функциями, аналитическими от $z=x+iy$ и $\zeta-x-iy$, а у нас коэффициенты уравнения не предполагаются аналитическими от $x+iy$ и $x-iy$.

Пользуясь случаем, заметим, что формальные производные с успехом применялись в ряде работ для приведения дифференциальных уравнений к каноническому виду, построения функционально-инвариантных решений системы уравнений Максвелла для электромагнитного поля в пустоте [5—12].

В уравнении (1) функции A, B, C предполагаются функциями, аналитическими от p и q в области D, но не обязательно аналитическими от x и y, т. е. $\forall z=x+iy\in D$

$$A=\sum_{k,\,i=0}^{\infty} a_{ik}p^i(z)\,q^k(z), \tag{I}$$

$$B=\sum_{k,\,i=0}^{\infty} b_{ik}p^i(z)\,q^k(z), \tag{II}$$

$$C=\sum_{k,\,i=0}^{\infty} c_{ik}p^i(z)\,q^k(z). \tag{III}$$

Введем следующие обозначения:

$$\tilde{A}(z,\zeta)=\sum_{i,\,k=0}^{\infty} a_{ik}p^i(z)\,q^k(\zeta), \tag{IV}$$

$$\tilde{B}(z,\zeta)=\sum_{i,\,k=0}^{\infty} b_{ik}p^i(z)\,q^k(\zeta), \tag{V}$$

$$\tilde{C}(z,\zeta)=\sum_{i,\,k=0}^{\infty} c_{ik}p^i(z)\,q^k(\zeta), \tag{VI}$$

где $\zeta\in D$, $\zeta\neq z$.

1. Определение. Функцией Римана для уравнения (1) назовем аналитическую от $p=p(x,y)$ и $q=q(x,y)$ в области D функцию $\tilde{v}=\sum_{i,\,k=0}^{\infty} d_{ik}p^i(z)\,q^k(\zeta)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial p\,\partial q}-\frac{\partial\tilde{A}\tilde{v}}{\partial p}-\frac{\partial\tilde{B}\tilde{v}}{\partial q}+\tilde{C}\tilde{v}=0 \quad (p=p(z),\ q=q(\zeta)) \tag{2}$$

и следующим условиям:

$$\tilde{v}|_{z=t}=\exp\Big(\int_{\tau}^{\zeta}\tilde{A}\,dq(\eta)\Big),\quad \tilde{v}|_{\zeta=\tau}=\exp\Big(\int_{t}^{z}\tilde{B}\,dp(\xi)\Big). \tag{3}$$

Здесь

$$\tilde{A}=\sum_{i,\,k=0}^{\infty} a_{ik}p^i(t)\,q^k(\eta);\quad \tilde{B}=\sum_{i,\,k-0}^{\infty} b_{ik}p^i(\xi)\,q^k(\tau);$$

$$\tilde{v}|_{z=t}=\sum_{i,\,k=0}^{\infty} d_{ik}p^i(t)\,q^k(\zeta);\quad \tilde{v}|_{\zeta=\tau}=\sum_{i,\,k=0}^{\infty} d_{ik}p^i(z)\,q^k(\tau);$$

$\int_{\tau}^{\zeta}\tilde{A}\,dq(\eta)$, $\int_{t}^{z}\tilde{B}\,dp(\xi)$ — интегральные операторы, изученные в работе [4]; t и τ — некоторые фиксированные точки в области D; z и ζ — произвольные точки из D; η, ξ — переменные интегрирования.

Используя свойства формальных производных [2] и интегральных операторов в условиях (3) [4], из уравнения (2) получим ему равносильное уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q}\Big[\tilde{v}(z,\zeta)-\int_{\tau}^{\zeta}\tilde{A}(z,\eta)\,\tilde{v}(z,\eta)\,dq(\eta)-\int_{t}^{z}\tilde{B}(\xi,\zeta)\,\tilde{v}(\xi,\zeta)\,dp(\xi)+$$

$$+\int_t^z dp(\xi)\int_\tau^\zeta C(\xi,\eta)\tilde{v}(\xi,\eta)\,dq(\eta)\,]=0.$$

Отсюда на основании свойств формальных производных и функций, моногенных в смысле В. С. Федорова [2, 3], получим

$$\tilde{v}(z,\zeta)-\int_\tau^\zeta \tilde{A}(z,\eta)\tilde{v}(z,\eta)\,dq(\eta)-\int_t^z \tilde{B}(\xi,\zeta)\tilde{v}(\xi,\zeta)\,dp(\xi)+$$

$$+\int_t^z dp(\xi)\int_\tau^\zeta C(\xi,\eta)\tilde{v}(\xi,\eta)\,dq(\eta)=\Phi_1[p]+\Phi_2[q], \tag{4}$$

где Φ_1 — функция, F-моногенная по p, а $\Phi_2[q]$ — функция, F-моногенная по q. (Формальная производная по q вычисляется в точке ζ, формальная производная по p — в точке z; $\Phi_1[p]=\Phi_1[p(\zeta)]$; $\Phi_2[q]=\Phi_2[q(z)]$.)

Полагая в последнем интегральном уравнении $\zeta=\tau$, $z=t$, получим

$$\tilde{v}(t,\tau)=\Phi_1[p(\tau)]+\Phi_2[q(t)].$$

Однако $\tilde{v}(t,\tau)=\exp\left(\int_\tau^\tau \tilde{A}\,dq(\eta)\right)=e^0=1$, t, τ — фиксированные, но произвольные точки из D. Следовательно, для любой пары точек t и τ из D имеем

$$\Phi_1[p(\tau)]+\Phi_2[q(t)]=1.$$

Значит, вместо точек t и τ в последнем равенстве можем поставить точки z и ζ и тогда будем иметь

$$\Phi_1[p(\zeta)]+\Phi_2[q(z)]=1,$$

и интегральное уравнение примет вид

$$\tilde{v}(z,\zeta)-\int_\tau^\zeta \tilde{A}(z,\eta)\tilde{v}(z,\eta)\,dq(\eta)-\int_t^z \tilde{B}(\xi,\zeta)\tilde{v}(\xi,\zeta)\,dp(\xi)+$$

$$+\int_t^z dp(\xi)\int_\tau^\zeta C(\xi,\eta)\tilde{v}(\xi,\eta)\,dq(\eta)=1. \tag{5}$$

Так как функция Римана $\tilde{v}(z,\zeta)$ определяется интегральным уравнением (5), удовлетворяет условиям (3), то из этого следует, что функция Римана является функцией четырех переменных z, ζ, t, τ. В дальнейшем будем обозначать функцию Римана $\tilde{v}$ символом $G(z,\zeta,t,\tau)$.

Таким образом, нами установлено, что функция Римана для уравнения (1) удовлетворяет интегральному уравнению (5).

2. В этом разделе получим с помощью функции Римана интегральное представление решения уравнения (1). Введем обозначение

$$F(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}+\tilde{A}(z,\zeta)\frac{\partial u}{\partial p}+\tilde{B}(z,\zeta)\frac{\partial u}{\partial q}+\tilde{C}(z,\zeta)u,$$

где $\tilde{A}(z,\zeta)$, $\tilde{B}(z,\zeta)$, $\tilde{C}(z,\zeta)$ определяются равенствами (I)—(III). Теперь уравнение (1) можно записать в виде $F(u)=0$. Далее из условий (3) получим

$$G(t,\zeta,t,\tau)=\exp\left(\int_\tau^\zeta \tilde{A}(t,\eta)\,dq(\eta)\right),\quad G(z,\tau,t,\tau)=\exp\left(\int_t^z \tilde{B}(\xi,\tau)\,dp(\xi)\right). \tag{6}$$

Отсюда на основании свойств интегральных операторов, стоящих в показателях правых частей равенств (6), имеем

$$\frac{\partial G(t,\zeta,t,\tau)}{\partial q}=\tilde{A}(t,\zeta)\exp\left(\int_\tau^\zeta \tilde{A}(t,\eta)\,dq(\eta)\right),$$

$$\frac{\partial G(z,\tau,t,\tau)}{\partial p}=\bar{B}(z,\tau)\exp\Big(\int_t^z B(\xi,\tau)\,dp(\xi)\Big) \tag{7}$$

$(q=q(\zeta),\ p=p(z)$. Это означает, что формальная производная по p определяется в точке z, а по q — в точке ζ.)

Учитывая, что функция G удовлетворяет как функция Римана уравнению (2), т. е.

$$\frac{\partial^2 G}{\partial p\partial q}-\frac{\partial \bar{A}G}{\partial p}-\frac{\partial \bar{B}G}{\partial q}+\bar{C}G=0,$$

а также принимая во внимание свойства интегральных операторов $\int_\tau^\zeta \tilde{A}(t,\eta)\,dq(\eta)$, $\int_t^z \tilde{B}(\xi,\tau)\,dp(\xi)$, легко доказать следующее тождество:

$$\frac{\partial^2 uG}{\partial p\partial q}-GF(u)=\frac{\partial}{\partial p}\left[u\left(\frac{\partial G}{\partial q}-AG\right)\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial q}\left[u\left(\frac{\partial G}{\partial p}-BG\right)\right] \tag{8}$$

$$(p=p(z),\ q=q(\zeta),\ u=u(z,\zeta)),$$

если функция u аналитична от p и q в области D, т. е. если $u(z,\zeta)=$ $=\sum_{i,k=0}^{\infty} a_{ik}p^i(z)\,q^k(\zeta)$ для любых $z\in D$ и $\zeta\in D$. Здесь $G=$ $=G(z,\zeta,t,\tau)$, $A=\bar{A}(z,\zeta)$, $B=\bar{B}(z,\zeta)$ (см. равенства (IV), (V)).

Переставим местами в равенстве (8) z, t и ζ, τ, т. е. в этом равенстве будем предполагать, что $G=G(t,\tau,z,\zeta)$, $B=B(t,\tau)$, $u=u(t,\tau)$, $A=$ $=\tilde{A}(t,\tau)$, $p=p(t)$, $q=q(\tau)$.

Пусть теперь z_0 и ζ_0 — фиксированные точки, тогда из (8), учитывая сказанное, получим

$$\int_{z_0}^{z}\frac{\partial^2 uG}{\partial q\partial p}\,dp(t)-\int_{z_0}^{z} GF(u)\,dp(t)=u\left(\frac{\partial G}{\partial q}-AG\right)\Big|_{z_0}^{z}+$$

$$+\int_{z_0}^{z}\frac{\partial}{\partial q}\left[u\left(\frac{\partial G}{\partial p}-BG\right)\right]dp(t),$$

$$\left[\frac{\partial uG}{\partial q}\right]_{t=z}-\left[\frac{\partial uG}{\partial q}\right]_{t=z_0}-\int_{z_0}^{z} GF(u)\,dp(t)=$$

$$=u(z,\tau)\left(\frac{\partial G}{\partial q}-AG\right)_{t=z}-u(z_0,\tau)\left(\frac{\partial G}{\partial q}-AG\right)_{t=z_0}+$$

$$+\int_{z_0}^{z}\frac{\partial}{\partial q}\left[u\left(\frac{\partial G}{\partial p}-BG\right)\right]dp(t). \tag{9}$$

На основании (7) $\left(\frac{\partial G}{\partial q}-AG\right)_{t=z}=0$, так как здесь $G=G(z,\zeta,z,\tau)$. (Роль t в равенстве (7) играет символ z.)

Равенство (9) принимает вид

$$\left[\frac{\partial uG}{\partial q}\right]_{t=z}-\left[\frac{\partial uG}{\partial q}\right]_{t=z_0}-\int_{z_0}^{z} GF(u)\,dp(t)=$$

$$=u(z_0,\tau)\left(\frac{\partial G}{\partial q}-AG\right)_{t=z_0}+\int_{z_0}^{z}\frac{\partial}{\partial q}\left[u\left(\frac{\partial G}{\partial p}-BG\right)\right]dp(t). \tag{10}$$

...ва (10) имеем

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta}\left[\frac{\partial uG}{\partial q}\right]_{t=z}dq(\tau)-\int_{\zeta_0}^{\zeta}\left[\frac{\partial uG}{\partial q}\right]_{t=z_0}dq(\tau)-$$

$$-\int_{z_0}^{z}dp(t)\int_{\zeta_0}^{\zeta}GF(u)\,dq(\tau)=-\int_{\zeta_0}^{\zeta}u(z_0,\tau)\left(\frac{\partial G}{\partial q}-AG\right)_{t=}$$

$$+\int_{\zeta_0}^{\zeta}\left\{\int_{z_0}^{z}\frac{\partial}{\partial q}\left[u\left(\frac{\partial G}{\partial p}-BG\right)\right]dp(t)\right\}dq(\tau).$$

Из последнего равенства получим

$$(uG)_{\substack{t=z\\ \tau=\zeta}}-(uG)_{\substack{t=z\\ \tau=\zeta_0}}-(uG)_{\substack{t=z_0\\ \tau=\zeta}}+(uG)_{\substack{t=z_0\\ \tau=\zeta_0}}-$$

$$-\int_{z_0}^{z}dp(t)\int_{\zeta_0}^{\zeta}GF(u)\,dq(\tau)=-\int_{\zeta_0}^{\zeta}u(z_0,\tau)\left(\frac{\partial G}{\partial q}-AG\right)_{t=z_0}dq$$

$$+\int_{z_0}^{z}\left\{\left[u\left(\frac{\partial G}{\partial p}-BG\right)\right]_{\tau=\zeta}-\left[u\left(\frac{\partial G}{\partial p}-BG\right)\right]_{\tau=\zeta_0}\right\}dp(t).$$

...основании (6), (7) имеем

$G(z,\zeta,z,\zeta)=1,$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial p}-BG\right)_{\tau=\zeta}=0,$$

...ак

$$\frac{\partial G(z,\tau,t,\tau)}{\partial p}=B(z,\tau)\exp\left(\int_{t}^{z}B(\xi,\tau)\,dp(\xi)\right),$$

...гая в последнем равенстве $\tau=\zeta$, придем к равенству (12). Из (1...
...м

$$u(z,\zeta)\,G(z,\zeta,z,\zeta)-u(z,\zeta_0)\,G(z,\zeta_0,z,\zeta)-$$

$$-u(z_0,\zeta)\,G(z_0,\zeta,z,\zeta)+u(z_0,\zeta_0)\,G(z_0,\zeta_0,z,\zeta)-$$

$$\int_{z_0}^{z}dp\int_{\zeta_0}^{\zeta}GF(u)\,dq(\tau)=-\int_{\zeta_0}^{\zeta}u(z_0,\tau)\left(\frac{\partial G}{\partial q}-AG\right)dq(\tau)-\qquad(13)$$

$$-\int_{z_0}^{z}\left[u\left(\frac{\partial G}{\partial p}-BG\right)\right]_{\tau=\zeta_0}dp(t).$$

...уя в правой части равенства (13) по частям и учитывая, что ...$=1$, получим интегральное представление любой функции u, ...й от функций p и q в области D:

$$u(z,\zeta)=u(z_0,\zeta_0)\,G(z_0,\zeta_0,z,\zeta)+$$

$$...G(z_0,\tau,z,\zeta)\left[\frac{\partial u(z_0,\tau)}{\partial q}+\tilde{A}(z_0,\tau)\,u(z_0,\tau)\right]dq(\tau)+$$

$$...(t,\zeta_0,z,\zeta)\left[\frac{\partial u(t,\zeta_0)}{\partial p}+\tilde{B}(t,\zeta_0)\,u(t,\zeta_0)\right]dp(t)+$$

$$+\int_{z_0}^{z}dp(t)\int_{\zeta_0}^{\zeta}GF(u)\,dq(\tau)\qquad(1...$$

$$(q=q(\tau),\ p=p(t)).$$

$\Big($При нахождении $\dfrac{\partial f}{\partial q(\tau)}=-\dfrac{1}{\delta}(f_{\tau_2}p_{\tau_1}-f_{\tau_1}p_{\tau_2})$ частные производные функций f, p надо брать по координатам точки $\tau=\tau_1+i\tau_2$.$\Big)$ Если функция $u=u(z,\zeta)$ является решением уравнения (1), т. е. $F(u)=0$, то из формулы (13′) получим интегральное представление решения уравнения (1)

$$u(z,\zeta)=u(z_0,\zeta_0)G(z_0,\zeta_0,z,\zeta)+$$

$$+\int_{\zeta_0}^{\zeta}G(z_0,\tau,z,\zeta)\left[\frac{\partial u(z_0,\tau)}{\partial q}+\tilde{A}(z_0,\tau)u(z_0,\tau)\right]dq(\tau)+ \tag{13''}$$

$$+\int_{z_0}^{z}G(t,\zeta_0,z,\zeta)\left[\frac{\partial u(t,\zeta_0)}{\partial p}+\tilde{B}(t,\zeta_0)u(t,\zeta_0)\right]dp(t),$$

где $u(z_0,\zeta_0)$ — заданное значение искомого решения при $z=z_0$ и $\zeta=\zeta_0$.

3. Пример. Построить функцию Римана для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial p\partial q}+\frac{1}{4}(a+ib)\frac{\partial u}{\partial p}+\frac{1}{4}(a-ib)\frac{\partial u}{\partial q}=0, \tag{14}$$

где $a=\text{const}$, $b=\text{const}$.

Обозначив $\frac{1}{4}(a+ib)=A$, $\frac{1}{4}(a-ib)=B$, перепишем исходное уравнение в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial p\partial q}+A\frac{\partial u}{\partial p}+B\frac{\partial u}{\partial q}=0. \tag{15}$$

Сопряженным с уравнением (15) будет уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial p\partial q}-A\frac{\partial v}{\partial p}-B\frac{\partial v}{\partial q}=0. \tag{16}$$

Теперь интегральное уравнение типа (5), равносильное уравнению (16), есть уравнение вида

$$\tilde{v}(z,\zeta)-B\int_t^z\tilde{v}(\xi,\zeta)dp(\xi)-A\int_\tau^\zeta\tilde{v}(z,\eta)dq(\eta)=1,$$

$$\tilde{v}(z,\zeta)=1+B\int_t^z\tilde{v}(\xi,\zeta)dp(\xi)+A\int_\tau^\zeta\tilde{v}(z,\eta)dq(\eta) \tag{17}$$

— частный случай уравнения

$$\tilde{v}(z,\zeta)=1+\lambda B\int_t^z\tilde{v}(\xi,\zeta)dp(\xi)+\lambda A\int_\tau^\zeta\tilde{v}(z,\eta)dq(\eta), \tag{18}$$

решением которого, как легко проверить, является сумма следующего ряда:

$$\tilde{v}(z,\zeta)=1+\sum_{m=1}^{\infty}\lambda^m f_m(z,\zeta), \tag{19}$$

где $f_{m+1}=B\int_t^z f_m(\xi,\zeta)dp(\xi)+A\int_\tau^\zeta f_m(z,\eta)dq(\eta)$. Положим $f_0=1$ и получим

$$f_1=B\int_t^z dp(\xi)+A\int_\tau^\zeta dq(\eta)=B[p(z)-p(t)]+A[q(\zeta)-q(\tau)],$$

$$f_2 = B^2 \frac{[p(z)-p(t)]^2}{2!} + 2AB \frac{[p(z)-p(t)][q(\zeta)-q(\tau)]}{1!} + $$
$$+ A^2 \frac{[q(\zeta)-q(\tau)]^2}{2!},$$

. . . .

$$f_m = \sum_{s=0}^{m} C_m^s B^{m-s} A^s \frac{1}{(m-s)!s!} [p(z)-p(t)]^{m-s} [q(\zeta)-q(\tau)]^s =$$
$$= \frac{1}{m!} \sum_{s=0}^{m} C_m^s \frac{B^{m-s} A^s m! [p(z)-p(t)]^{m-s} [q(\zeta)-q(\tau)]^s}{(m-s)!s!},$$
$$f_m = \frac{1}{m!} \sum_{s=0}^{m} (C_m^s)^2 B^{m-s} A^s [p(z)-p(t)]^{m-s} [q(\zeta)-q(\tau)]^s. \quad (20)$$

С учетом того, что для уравнения (17) $\lambda = 1$, формула (19), определяющая функцию Римана для уравнения (14), на основании (20) примет вид

$$\tilde{v} = G(z, \zeta, t, \tau) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m!} \sum_{s=0}^{m} (C_m^s)^2 B^{m-s} A^s \times \right.$$
$$\left. \times [p(z)-p(t)]^{m-s} [q(\zeta)-q(\tau)]^s \right).$$

Литература

1. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М., 1948.
2. Гусев В. А. // Bul. stiint. si tehnic al inst. Politehnic. Timisoara. 1962. Т. 7. F. 2. P. 223—238.
3. Федоров В. С. // Изв. вузов. Математика. 1958. № 6. С. 257—265.
4. Стельмашук Н. Т. // Anal. stiint. Univ. Iasi. 1962. T. 8. F. 2. P. 331—342.
5. Стельмашук Н. Т. // Сиб. мат. журн. 1964. Т. 5, № 1. С. 166—173.
6. Федоров В. С., Стельмашук Н. Т. // Revue Roumaine de mathematiques pures et appliquees. 1973. Т. 18, N 2. P. 233—241.
7. Шилинец В. А. Решение некоторых линейных дифференциальных систем в частных производных первого порядка с помощью моногенных функций в смысле В. С. Федорова. Минск, 1985. Деп. в ВИНИТИ 20.03.85, № 1990—85 Деп.
8. Стельмашук Н. Т. // Изв. вузов. Математика. 1964. № 3. С. 136—142.
9. Стельмашук Н. Т., Пенчанский С. Б. // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 4. С. 734—737.
10. Стельмашук Н. Т. // Укр. мат. журн. 1972. Т. 24, вып. 1. С. 117—120.
11. Стельмашук Н. Т. // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1971. Т. 11, № 1. С. 271—274.
12. Стельмашук Н. Т. // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1967. Т. 7, № 2. С. 431—436.

Минский государственный педагогический институт им. А. М. Горького

Поступила в редакцию 16 октября 1989 г.

УДК 517.95

Р. П. ТАРАСОВ

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ В ИЗОГНУТОМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ЦИЛИНДРЕ

Введение. Волновое уравнение для сред с переменной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(x)$ имеет вид [1, с. 35]

$$\Delta_3 u_i(x) + \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{3} u_j(x) \frac{\partial \ln \varepsilon(x)}{\partial x_j} + \varepsilon(x) \mu \omega^2 u_i(x) = 0, \ i = 1, 2, 3,$$