ВЕСЦІ
АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК
№ 3

АСОБНЫ АДБІТАК

Мінск 1993

При доказательстве предложения используются два вспомогательных утверждения.

Лемма 1. ([2]). *Если k_0 — поле характеристики $\neq 2$, $k_0 \neq GF(3)$, α — элемент, алгебраический над k_0, то подгруппа группы $SL_2(k_0(\alpha))$, порожденная множествами $t_{12}(k_0)$, $t_{21}(k_0\alpha)$, совпадает с $SL_2(k_0(\alpha))$.*

Лемма 2. ([3]). *Если k — поле характеристики $\neq 2$, $k \neq GF(3)$, α — элемент алгебраический над k, n — натуральное число $\geqslant 3$, $h \in SL_n(k)$ — трансвекция, $G = \langle SL_n(k), h_\alpha(k) \cdot \rangle$, то $G = SL_n(k(\alpha))$.*

Доказательство предложения. Пусть M — множество всех корневых k_0-подгрупп группы H, R — подгруппа группы G, порожденная множеством $\bigcup_{g \in G} gMg^{-1}$. Тогда $H \leqslant R \leqslant G$, и R порождается содержащимися в ней корневыми k_0-подгруппами. Достаточно показать, что $R = SL_n(L)$, где L — тело такое, что $k_0 \subseteq L \subseteq K$. Меняя G на R, считаем, что группа G порождается содержащимися в ней корневыми k_0 — подгруппами, и покажем, что в этом случае $G = SL_n(L)$. Пусть $L = \{a \in K \mid t_{12}(ak_0) \leqslant G\}$. Если $a, b \in L$, то $a + b \in L$ в силу равенства $t_{12}(ar)\, t_{12}(br) = t_{12}((a+b)r)$ $(r \in k_0)$. Трансформируя множество $t_{12}(L)$ подходящим элементом группы H, получаем $t_{ij}(L) \subseteq G$ при всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq j$. Обратно, если $t_{ij}(k_0 a) \leqslant G$ для некоторых фиксированных $i, j\ (i \neq j)$, то $t_{12}(k_0 a) \leqslant G$, и $a \in L$. Поэтому в силу равенства $[t_{12}(ar), t_{23}(b)] = t_{13}(abr)$ $(r \in k_0)$ множество L замкнуто относительно умножения. Пусть $a \neq 0$. Содержащаяся в G группа $H_1 = {} = \langle t_{12}(k_0 a), t_{21}(k_0) \rangle$ является подгруппой группы $\operatorname{diag}(SL_2(k_0(a)), 1_{n-2})$. Так как k_0 — подполе центра тела K, то $k_0(a)$ — поле, являющееся алгебраическим расширением поля k_0. По лемме 1 $H_1 = \operatorname{diag}(SL_2(k_0(a)), 1_{n-2})$. В частности, $t_{12}(a^{-1}k_0) \leqslant G$, $a^{-1} \in L$. Таким образом, L — тело, причем $SL_n(L) \leqslant G$. Покажем, что $G \leqslant SL_n(L)$. Пусть $g \in T(G)$, причем $g(k_0) \leqslant G$. Так как G порождается корневыми k_0-подгруппами, то достаточно убедиться в том, что $g(k_0) \leqslant SL_n(L)$. Пусть E_{k_0} — правое векторное пространство под полем k_0 размерности n. Действие H в E_{k_0} свяжем с базисом $\{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$ пространства E_{k_0}. Если P — тело такое, что $k_0 \subseteq P \subseteq K$, то через E_P обозначается векторное пространство, полученное из E_{k_0} расширением тела скаляров k_0 до P, т. е. $E_P = {} = E_{k_0} \otimes_{k_0} P$. Через $\{l_1', l_2', \ldots, l_n'\}$ обозначается базис сопряженного пространства, сопряженный с $\{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$. Пусть $g = g(s, \psi)$ $(s \in E_K$, $\psi \in E_K^*)$, $h = h(t, \varphi) \in T(H)$ $(t \in E_{k_0}$, $\varphi \in E_{k_0}^*)$. Если $\beta = \varphi(s)\,\psi(t) \neq 0$, то в базисе $\{t\varphi(s), s, E^g \cap E^h\}$ пространства E_K, группа $g(k_0)$ реализуется в виде $\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 1 & k_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1_{n-2}\right)$, а группа $h(k_0)$ в виде $\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k_0\beta & 1 \end{pmatrix}, 1_{n-2}\right)$

Таким образом, содержащаяся в G подгруппа $\langle g(k_0), h(k_0) \rangle$ реализуется в этом базисе в виде матричной группы $\left\langle \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 1 & k_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1_{n-2}\right),\right.$

$\left.\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k_0\beta & 1 \end{pmatrix}, 1_{n-2}\right)\right\rangle$, которая, согласно лемме 1, совпадает с $\operatorname{diag}(SL_2 \times$

$\times (k_0(\beta)), 1_{n-2})$. Поэтому $h(k_0\beta) \leqslant G$. По лемме 2 $\langle H, h(k_0\beta) \rangle = SL_n \times \times (k_0)(\beta))$, откуда $t_{12}(\beta k_0) \leqslant G$, и, значит, $\beta \in L$. Таким образом, при всех $h(t, \varphi) \in T(H)$ выполняется включение

$$\varphi(s)\,\psi(t) \in L. \tag{1}$$

Положим $s = \sum_{i=1}^{n} l_i \lambda_i$, $\psi = \sum_{i=1}^{n} \mu_i l_i'$ $(\lambda_i, \mu_i \in K$, $1 \leqslant i \leqslant n)$. Так как матрица трансвекции g в базисе $\{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$ имеет вид

$$
1_n + \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & \lambda_1\mu_2 & \dots & \lambda_1\mu_n \\ \lambda_2\mu_1 & \lambda_2\mu_2 & \dots & \lambda_2\mu_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_n\mu_1 & \lambda_n\mu_2 & \dots & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix},
$$

то достаточно показать, что $\lambda_i\mu_j \in L$ при всех $i, j = 1, 2, \dots, n$. Взяв в (1) $h(t, \varphi) = h(l_i, l_j')$ $(i \neq j)$, получим $\lambda_i\mu_j \in L$ при всех $i, j = 1, 2, \dots, n$, $i \neq j$. Остается показать, что $\lambda_i\mu_i \in L$ при всех $i = 1, 2, \dots, n$. Положив в (1) $h(t, \varphi) = h(l_i + l_j, l_i - l_j)(i \neq j)$, находим, что $\lambda_i\mu_i - \lambda_j\mu_j \in L$. Следовательно, если $\lambda_i\mu_i \in L$ для некоторого i, то $\lambda_i\mu_i \in L$ при всех $i = 1, 2, \dots, n$. В частности, если $\lambda_i = 0$ или $\mu_i = 0$ для некоторого i, то $\lambda_i\mu_i \in L$ при всех $i = 1, 2, \dots, n$. Предположим, что все $\lambda_i\mu_i$ отличны от 0. Так как $n \geqslant 3$, то найдутся два различных натуральных числа u, v $(1 \leqslant u, v \leqslant n)$ отличных от 1. Тогда $\lambda_1\mu_1 \in L$ в силу равенства $\lambda_1\mu_1 = (\lambda_1\mu_u)(\lambda_v\mu_u)^{-1} \times (\lambda_v\mu_1)$. Предложение доказано.

Доказательство теоремы. Пусть $k_0 = Z \cap k$. Тогда $SL_n(k_0) \leqslant G \leqslant SL_n(K)$, и K имеет конечную размерность над k_0. Согласно предложению, $G = SL_n(L)$, где L — тело такое, что $k_0 \subseteq L \subseteq K$. Но $SL_n(k) \leqslant G$, откуда $k \subseteq L$. Теорема доказана.

Summary

Let K be an arbitrary skew field of characteristic $\neq 2$, and k be a skew field such that $k \subseteq K$, $n \geqslant 3$ be an integral number. In the paper the groups G such that $SL_n(k) \leqslant G \leqslant SL_n(K)$ are studied.

Литература

1. Башкиров Е. Л. О линейных группах, содержащих специальную унитарную группу ненулевого индекса. Минск, 1985. 36 с. Деп. в ВИНИТИ 07.08.85, № 5897-85.
2. Башкиров Е. Л. О подгруппах группы $SL_2(K)$ над бесконечным полем K. Минск, 1984. Деп. в ВИНИТИ 19.11.84, № 7369-84.
3. Башкиров Е. Л. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1991. № 1. С. 31—35.

Минский радиотехнический институт

Поступила в редакцию 16.12.91

УДК 517.95

Н. Т. СТЕЛЬМАШУК, В. А. ШИЛИНЕЦ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ F-МОНОГЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Предметом исследования является следующая система дифференциальных уравнений в частных производных:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = a_1 f + b_1 \varphi, \\
\frac{\partial f}{\partial y} = a_2 f,
\end{gathered} \tag{1}
$$

где a_1, a_2, b_1 — известные, аналитические от x, y в некоторой области D комплексные или действительные функции, при этом $a_2 = -b_1$. Система (1) является обобщением известной системы

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\
\frac{\partial f}{\partial y} = 0,
\end{gathered} \tag{2}
$$

которая является необходимым и достаточным условием моногенности непрерывной в области D дуальной функции

$$w = f(x, y) + \varepsilon\varphi(x, y), \ \varepsilon^2 = 0,$$

по дуальному переменному $P = x + \varepsilon y$ [1, 2].

Задача Коши. Найти в области D решение системы (1) при условиях

$$f(x, 0) = \psi(x), \ \varphi(x, 0) = \theta(x), \ (x, 0) \in D,$$

где $\psi(x)$, $\theta(x)$ — известные аналитические функции от x.

Для решения задачи Коши нам потребуется следующий дифференциальный оператор [1, 2]:

$$\frac{\partial w}{\partial Q} = \frac{\partial w}{\partial y} - \varepsilon \frac{\partial w}{\partial x}. \tag{3}$$

Как следует из работы [3], система (1) эквивалентна следующему уравнению:

$$\frac{\partial w}{\partial Q} = Aw, \tag{4}$$

где $w = f + \varepsilon\varphi$, $\varepsilon^2 = 0$, оператор $\frac{\partial w}{\partial Q}$ определен равенством (3), $A = -\frac{\partial \alpha}{\partial Q}$, $\alpha = \beta + \varepsilon\gamma$, где β и γ какое-нибудь частное решение системы

$$\frac{\partial \beta}{\partial y} = -b_1, \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} = a_1 + \frac{\partial \gamma}{\partial y}. \tag{5}$$

Как вытекает из работы [3], общее решение уравнения (4) имеет вид

$$w = e^{\tau}\Phi[P], \tag{6}$$

где $\Phi[P]$ — произвольная дуальная функция, F-моногенная по $P = x + \varepsilon y$, $\varepsilon^2 = 0$; $\tau = \tau_1 + \varepsilon\tau_2$ — какое-нибудь частное решение уравнения [2]

$$\frac{\partial \tau}{\partial Q} = A.$$

Исследуем более подробно общее решение (6) уравнения (4):

$$e^{\tau} = e^{\tau_1 + \varepsilon\tau_2} = e^{\tau_1} e^{\varepsilon\tau_2} = e^{\tau_1}(1 + \varepsilon\tau_2),$$

так как по определению $e^{\varepsilon\tau_2} = 1 + \frac{\varepsilon\tau_2}{1!} + \frac{\varepsilon^2\tau_2^2}{2!} + \ldots +$, а $\varepsilon^2 = 0$.

Если $P = x + \varepsilon y$, то, как известно [1, 2], функция $\Phi[P]$, F-моногенная по P, имеет вид:

$$\Phi[P] = h[x] + \varepsilon\{h'[x]\,y + H[x]\}, \tag{7}$$

где $h[x]$ и $H[x]$ — произвольные действительные или комплексные функции, аналитические от x. Подставляя в формулу (6) $w = f + \varepsilon\varphi$ и учитывая, что $\Phi[P]$ имеет вид (7), а $e^{\tau} = e^{\tau_1}(1 + \varepsilon\tau_2)$, получим

$$f + \varepsilon\varphi = (e^{\tau_1} + \varepsilon e^{\tau_1}\tau_2)\{h[x] + \varepsilon[h'[x]\,y + H[x]\}.$$

Отсюда

$$f = e^{\tau_1}h[x], \quad \varphi = e^{\tau_1}\{h'[x]\,y + H[x]\} + e^{\tau_1}\tau_2 h[x], \tag{8}$$

где $h[x]$, $H[x]$ — произвольные действительные или комплексные фу[нк]ции, аналитические от x.

Из условий задачи Коши, полагая в равенствах (8) $y=0$, получим

$$\psi(x) = e^{\tau_1(x,0)} h[x],$$

$$\theta(x) = e^{\tau_1(x,0)} \{H[x] + \tau_2(x, 0) h[x]\}.$$

Из (9) имеем

$$h[x] = \psi(x) e^{-\tau_1(x,0)},$$

$$H[x] = \theta(x) e^{-\tau_1(x,0)} - \tau_2(x, 0) - \psi(x) e^{-\tau_1(x,0)}. \quad (1[0])$$

Подставляя в (8) значения h и H из (10), получим решение поста[в]ленной задачи.

Summary

Using the class of F — monogenic dual functions solution of Cauchy problem f[o]r one system of differential equations have been obtained.

Литература

1. Бляшке В. Дифференциальная геометрия. М.; Л., 1935.
2. Стельмашук Н. Т. // Analele Stiintifice ale Univers. «al. i. Cuza» din Ja[si]. 1962. Т. 8, N 2. P. 331—342.
3. Стельмашук Н. Т. // Изв. вузов. Математика. 1964. № 3(40). С. 136—14[…]

Минский государственный педагогический институт им. А. М. Горького

Поступила в редакци[ю] 30.01.92

УДК 519.6:517.983.54

В. Ф. САВЧУК

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Значительное число прикладных линейных некорректных задач может быть приведено к уравнениям I рода. Особое место среди методов решения таких уравнений занимают итеративные методы, один из которых изучается в данной работе.

В действительном гильбертовом пространстве H решается уравнение I рода

$$Ax = y, \quad (1)$$

где A — положительный ограниченный самосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением. Используется итеративный метод

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_{n+1}(Ax_n - y), \; x_0 = 0, \quad (2)$$

$$\alpha_{2n+1} = \alpha, \; n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\alpha_{2n+2} = \beta, \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

Предполагая существование единственного точного решения x уравнения (1) при точной правой части y, ищем его приближение $x_{n,\delta}$ при приближенной правой части y_δ, $\|y-y_\delta\| \leqslant \delta$. В этом случае метод примет вид

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - \alpha_{n+1}(Ax_{n,\delta} - y_\delta), \; x_{0,\delta} = 0. \quad (3)$$