НОЯБРЬ 1993 г., ТОМ 29, № 11

УДК 517.95

Н. Т. СТЕЛЬМАШУК, В. А. ШИЛИНЕЦ

МЕТОД ФОРМАЛЬНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Известен ряд работ [1—7], в которых для исследования уравнений и систем уравнений в частных производных применяются гиперкомплексные F-моногенные функции [8]. В настоящей работе с помощью F-моногенных гиперкомплексных функций для системы дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= af + b\varphi, \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -bf + a\varphi, \end{aligned} \tag{1}$$

где f, φ — искомые комплексные функции класса $C^1(D)$ (через $C^1(D)$ обозначаем класс комплексных функций от x, y, имеющих непрерывные частные производные первого порядка в некоторой односвязной области D плоскости x, y), a, b — комплексные постоянные, решается следующая задача Коши.

Найти в области D решение системы дифференциальных уравнений в частных производных (1) при условиях

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= \psi(x), \quad (x, 0) \in D, \\ \varphi(x, 0) &= \theta(x), \quad (x, 0) \in D, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\psi(x)$, $\theta(x)$ — известные аналитические от x в области $D_0 = \{x | (x, 0) \in D\}$ функции.

Перед исследованием поставленной выше задачи Коши заметим, что рассматриваемая система дифференциальных уравнений в частных производных (1) существенно отличается от изучаемой И. Н. Векуа в работе [9] системы.

В системе (1) искомые функции f и φ являются комплексными функциями от x, y, в то время как в [9] они предполагались действительными функциями действительных переменных x, y.

Перейдем к исследованию поставленной задачи Коши.

Легко показать, используя бикомплексные функции и формальные производные [10], что система дифференциальных уравнений в частных производных (1) эквивалентна следующему дифференциальному уравнению в формальных производных:

$$\frac{\partial w}{\partial Q} = Aw, \tag{3}$$

где $w = f + j\varphi$, $2A = a - jb$, $j^2 = i^2 = -1$, $j \neq i$, $Q = x - jy$, $\dfrac{\partial w}{\partial Q} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + j\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)$.

Как следует из работы [5], общее решение уравнения (3) имеет вид

$$w = \exp(AQ)\Phi[P], \tag{4}$$

где $P = x + jy$, $\Phi[P]$ — произвольная бикомплексная функция, моногенная по функции P в области D, $A = a/2 - jb/2 = \alpha + j\beta$, $\alpha = a/2$, $\beta = -b/2$.

Исследуем более подробно общее решение уравнения (3), задаваемое формулой (4).

Как известно [5], бикомплексная функция $\Phi[P]$, F-моногенная по $P = x + jy$ в области D, имеет вид

$$\Phi[P] = u[\bar{z}]e_1 + v[z]e_2, \tag{5}$$

где $u[\bar{z}]$, $v[z]$ — произвольные аналитические в области D функции от $\bar{z} = x - iy$, $z = x + iy$ соответственно, $e_1 = \dfrac{1}{2}(1 + ij)$, $e_2 = \dfrac{1}{2}(1 - ij)$, $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$, $e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1 = 0$.

Заметим, что

$$\exp(AQ)=\exp\{(\alpha+j\beta)(x-jy)\}=\exp\{\alpha x+\beta y+j(\beta x-\alpha y)\}=\exp(t+j\tau)=$$

$$=\exp\{(t-i\tau)e_1+(t+i\tau)e_2\}=\exp(\gamma e_1+\sigma e_2)=1+\frac{\gamma e_1+\sigma e_2}{1!}+\frac{(\gamma e_1+\sigma e_2)^2}{2!}+$$

$$+\frac{(\gamma e_1+\sigma e_2)^3}{3!}+\ldots=1+\left(\frac{\gamma e_1}{1!}+\frac{\gamma^2 e_1}{2!}+\ldots+\frac{\gamma^n e_1}{n!}+\ldots\right)+$$

$$+\left(\frac{\sigma e_2}{1!}+\frac{\sigma^2 e_2}{2!}+\ldots+\frac{\sigma^n e_2}{n!}+\ldots\right)=1+(\exp\gamma-1)e_1+(\exp\sigma-1)e_2,$$

$$t=\alpha x+\beta y,\ \tau=\beta x-\alpha y,\ \gamma=t-i\tau,\ \sigma=t+i\tau.$$

Тогда в силу (5) общее решение (4) дифференциального уравнения в формальных производных (3) запишется в виде

$$w=\exp(AQ)\Phi[P]=[1+e_1(\exp\gamma-1)+e_2(\exp\sigma-1)]\,[u[\bar z]e_1+v[z]e_2]=$$

$$=u[\bar z]e_1+u[\bar z](\exp\gamma-1)e_1+v[z]e_2+v[z](\exp\sigma-1)e_2=$$

$$=u[\bar z]\frac{1+ij}{2}+u[\bar z](\exp\gamma-1)\frac{1+ij}{2}+v[z]\frac{1+ij}{2}+v[z](\exp\sigma-1)\frac{1-ij}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}u[\bar z]+\frac{1}{2}u[\bar z](\exp\gamma-1)+\frac{v[z]}{2}+\frac{v[z]}{2}(\exp\sigma-1)+$$

$$+j\left\{\frac{i}{2}u[\bar z]+\frac{i}{2}u[\bar z](\exp\gamma-1)-\frac{v[z]}{2}i-\frac{v[z]}{2}(\exp\sigma-1)i\right\}.$$

Но $w=f+j\varphi$, следовательно, общее решение системы дифференциальных уравнений в частных производных (1) имеет вид

$$f=\frac{u[\bar z]\exp\gamma+v[z]\exp\sigma}{2}, \tag{6}$$

$$\varphi=i\,\frac{u[\bar z]\exp\gamma-v[z]\exp\sigma}{2}. \tag{7}$$

Поскольку

$$\gamma=t-i\tau=(\alpha-i\beta)x+(\beta+i\alpha)y=\bar a_1x+b_1y,$$

$$\sigma=t+i\tau=(\alpha+i\beta)x+(\beta-i\alpha)y=a_1x+\bar b_1y$$

$$(a_1=\alpha-i\beta,\ \bar a_1=\alpha-i\beta,\ b_1=\beta+i\alpha,\ \bar b_1=\beta-i\alpha),$$

то из (6) и (7) следует

$$f=\frac{u[\bar z]\exp(\bar a_1x+b_1y)+v[z]\exp(a_1x+\bar b_1y)}{2}, \tag{8}$$

$$\varphi=i\,\frac{u[\bar z]\exp(\bar a_1x+b_1y)-v[z]\exp(a_1x+\bar b_1y)}{2}, \tag{9}$$

где $u[\bar z]$, $v[z]$ — произвольные аналитические в области D функции от $\bar z=x-iy$, $z=x+iy$ соответственно.

Пусть $y=0$. Тогда из (8) и (9), согласно условиям (2), получим

$$\psi(x)=\frac{u[x]\exp(\bar a_1x)+v[x]\exp(a_1x)}{2},$$

$$\theta(x)=i\,\frac{u[x]\exp(\bar a_1x)-v[x]\exp(a_1x)}{2}.$$

Отсюда

$$u[x]=(\psi(x)-i\theta(x))\exp(-\bar a_1x), \tag{10}$$

$$v[x]=(\psi(x)+i\theta(x))\exp(-a_1x). \tag{11}$$

Заметим, что в правых частях равенств (10), (11) имеем аналитические от x в области $D_0=\{x|(x,0)\in D\}$ функции.

Найдя тейлоровские коэффициенты правых частей последних равенств, мы тем самым найдем и тейлоровские коэффициенты левых частей равенств (10) и (11).

Литература

1. Стельмашук Н. Т. // Anal. stiint. Univ. Iasi. 1962. Т. 8, f. 2. P. 331—342.
2. Стельмашук Н. Т. // Сиб. мат. журн. 1964. Т. 5, № 1. С. 166—173.

2000.

3. Стельмашук Н. Т. // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1967. Т. 7, № 2. С. 431—436.
4. Шилинец А. А. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1986. № 1. С. 118.
5. Стельмашук Н. Т. // Изв. вузов. Математика. 1964. № 3. С. 136—142.
6. Стельмашук Н. Т., Шилинец В. А. // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 2. С. 288—294.
7. Стельмашук Н. Т., Шилинец В. А. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1991. № 2. С. 115.
8. Федоров В. С. // Изв. вузов. Математика. 1958. № 6. С. 257—265.
9. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М., 1959.
10. Гусев В. А. // Bul. stiint. si tehnic al inst. Politehnic Timisoara. 1962. T. 7, f. 2. P. 223—238.

Минский государственный педагогический институт им. А. М. Горького

Поступила в редакцию 30 января 1992 г.