УДК 519.1

Р. И. ТЫШКЕВИЧ, А. А. ЧЕРНЯК, Ж. А. ЧЕРНЯК

ГРАФЫ И СТЕПЕННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. I

Предлагается обзор последних работ, в которых рассматриваются связи между структурными свойствами графа и списками степеней его вершин и ребер. Интерес к этой проблематике обусловлен как ее тесной связью с другими разделами комбинаторного анализа (пороговая логика, целочисленные матрицы, теория перечисления), так и прикладным значением (коммуникационные сети, структурная надежность, стереохимия).

Термин «граф» означает, как правило, конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер. Число вершин называется его порядком, а список степеней вершин графа — степенной (вершинной) последовательностью.

Последовательность $d = (d_1, \ldots, d_n)$ целых чисел называется графической, если существует такой граф порядка n — реализация последовательности d, для которого d является степенной последовательностью. Последовательность d называется потенциально P-графической относительно фиксированного теоретико-графового свойства P, если имеет реализацию графом, обладающим свойством P, и вынужденно P-графической, если она графическая и все ее реализации имеют свойство P. Характеризация потенциально (вынужденно) P-графических последовательностей приводит к получению всех формулируемых в терминах степеней вершин условий, необходимых (достаточных) для того, чтобы граф обладал свойством P.

Основные вопросы теории степенных последовательностей заключаются в следующем. Каковы условия графичности, потенциальной графичности, вынужденной графичности? Как построить реализацию графической последовательности? Как построить реализацию с требуемым свойством? Как связаны различные реализации графической последовательности и каково их число? Каковы строение последовательностей, имеющих единственную реализацию, и структура их реализаций? Какие свойства графа определяются строением его степенной последовательности?

Аналогичные вопросы возникают и применительно к реберным степенным последовательностям — спискам степеней ребер графа. При этом степенью ребра называется неупорядоченная пара степеней его концов.

Первая работа на эту тему появилась еще в прошлом веке: в 1874 г. А. Кэли, занимаясь насыщенными углеводородами, пришел к задаче перечисления реализаций последовательности вида $(4^x, 1^{2x+2})$. Особенно интенсивно подобные вопросы изучались в последние два десятилетия, число публикаций по этому поводу исчисляется сотнями. Предыдущие обзоры по рассматриваемой проблематике опубликованы в Трудах Международных конференций 1976 и 1978 гг. [115, 164].

В данном обзоре обсуждаются в основном публикации, появившиеся после 1978 г., и лишь отдельные более ранние. К настоящему времени в рассматриваемой области сложились общие методы, достаточно результативные и перспективные. Одной из их особенностей является эффективность. Возникающие при этом алгоритмы имеют, как правило, линейную или квадратичную трудоемкость. Обзору этих методов и посвящена данная статья.

Обзор состоит из четырех разделов. В первых трех речь идет о вершинных степенных последовательностях; в конце третьего раздела рассматривается не список, а множество степеней вершин графа, т. е. не учитывается число вершин одинаковой степени. Четвертый раздел посвящен обобщениям, главными из которых являются реберные последовательности и i-последовательности. Реберная последовательность графа содержательнее вершинной и является ее первым естественным обобщением. Она тоньше влияет на строение графа и допускает более детальное изучение соотношений между параметрическими характеристиками графа и его структурными свойствами. При решении задач, связанных с реберными последовательностями, их большая по сравнению с вершинными информативность проявляет себя двояко: с одной стороны, требует новых методов исследования, а с другой,— позволяет использовать полученные результаты при изучении вершинных последовательностей. Еще более информативны i-последовательности. В статье приведены пять гипотез и восемь проблем.

Отметим, что работы об ориентированных или бесконечных графах не рассматривались.

1. ВЕРШИННЫЕ СТЕПЕННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ: УСЛОВИЯ ГРАФИЧНОСТИ И ПОСТРОЕНИЕ РЕАЛИЗАЦИЙ

1. Layoff-процедура Гавела — Хакими

Начнем с эффективного критерия графичности, принадлежащего Гавелу [124], Хакими [114], Клейтману и Вэнгу [136]. Используемые здесь форма и терминология заимствованы у Чангфейзена [75].

Последовательности, различающиеся лишь порядком членов, как правило, считаются равными. Последовательность

$$d = (d_1, \ldots, d_n) \tag{1}$$

натуральных чисел называется правильной, если $n-1 \geqslant d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots \geqslant d_n$, $n \geqslant 2$. Очевидно, имея в виду условия графичности, достаточно ограничиться лишь правильными последовательностями.

Иногда последовательность d записывается в виде $d = (c_1^{k_1}, c_2^{k_2}, \ldots, c_s^{k_s})$, где все c_i попарно различны, а показатель k_i указывает на кратность вхождения числа c_i в последовательность d. Так, $(3^2, 2^3, 1) = (3, 3, 2, 2, 2, 1)$.

Пусть (1) — правильная последовательность. Построим новую производную последовательность d^i следующим образом:

1) вычитаем 1 из каждого из d_i первых (не считая члена d_i) членов последовательности d;

2) член d_i заменяем нулем.

Например, $d = (3, 3, 2, 2, 2)$, $d^1 = (0, 2, 1, 1, 2)$, $d^2 = (2, 0, 1, 1, 2)$.

Критерий Гавела — Хакими. Правильная последовательность d является графической, если и только если для какого-либо (для любого) i производная последовательность d^i графическая.

Этот критерий, как и алгоритм, строящий одну из реализаций графической последовательности, основаны на лемме 1.1, доказанной для произвольного i Клейтманом и Вэнгом [136]. Ниже VG — множество вершин графа G, $N_G(v) = N(v)$ — окружение вершины v (множество вершин графа G, смежных с v), $\deg v = |N(v)|$ — степень вершины v.

Лемма 1.1. Пусть (1) — графическая последовательность, G — одна из ее реализаций, $v \in VG$, $\deg v = d_i$, $S(v)$ — подмножество в VG, составленное из d_i отличных от v вершин максимальных степеней. Тогда существует такая реализация последовательности (1) с тем же множеством вершин, в которой $N(v) = S(v)$.

Эта лемма подсказывает следующую layoff-процедуру. Пусть V — множество вершин будущего графа, каждому элементу v которого приписано неотрицательное целое число $L(v)$ — метка, причем $L(v) < |V|$. Далее, пусть $S(v)$ — подмножество в V, составленное из $L(v)$ отличных от v вершин с максимальными метками ($S(v)$ не определяется однозначно). Шаг layoff применительно к вершине v, называемой на этом шаге ведущей, означает следующее:

1) фиксировать $S_0(v)$ — одно из $S(v)$;

2) вершину v соединить ребром с каждой из вершин, входящих в $S_0(v)$;

3) изменить метки вершины v и каждой из вершин w, входящих в $S_0(v)$, положив $L(v) = 0$, $L(w) = L(w) - 1$.

Если при этом какая-либо из меток становится отрицательной, то шаг layoff проваливается.

Layoff-процедура распознавания графичности правильной последовательности (1) и построения ее реализации заключается в применении нескольких layoff-шагов. Пусть $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. Первоначально $L(i) = d_i$. В результате либо приходим к нулевой производной последовательности меток

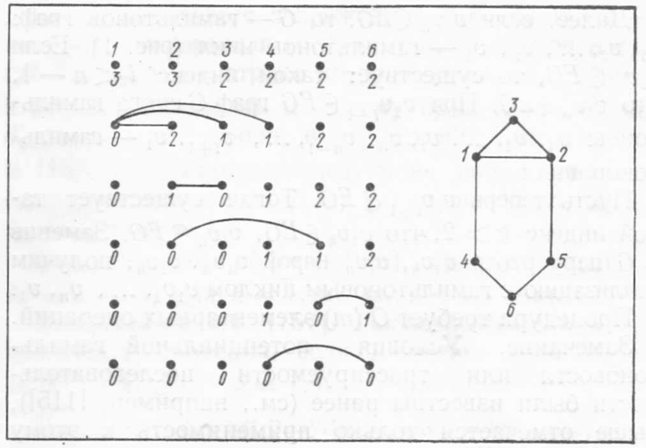

Рис. 1

и реализации последовательности d, либо очередной layoff-шаг проваливается — последовательность не является графической. Эта процедура требует $O(m)$ элементарных операций, где m — число ребер графа.

Чангфейзен [75] доказал, что с помощью layoff-процедуры можно построить гамильтонову реализацию графической последовательности и реализацию, имеющую гамильтонову цепь с началом в предписанной вершине, если такие реализации существуют.

Лемма 1.2. [75]. Если последовательность имеет реализацию с гамильтоновой цепью $(v, \ldots)$, то она реализуема и графом с гамильтоновой цепью вида $(v, w, \ldots)$, где w — элемент из $S(v)$ с минимальной меткой, причем в этой реализации $N(v) = S(v)$.

Согласно этой лемме на каждом layoff-шаге следует выбирать нужную вершину w, и тогда возможен один из трех вариантов:

1) пройдя все вершины, построим реализацию заданной последовательности, имеющую гамильтонову цепь с нужным началом;

2) не пройдя еще всех вершин, получим $L(w) = 0$ — требуемой реализации не существует;

3) процедура проваливается — последовательность не является графической.

Работа алгоритма показана на рис. 1, где строится реализация последовательности $(3^2, 2^4)$ графом, имеющим гамильтонову цепь с началом в вершине максимальной степени.

Лемма 1.3 [75]. Если правильная последовательность (1) имеет реализацию с гамильтоновой цепью с началом в вершине максимальной степени и $d_n > 1$, то она реализуема и гамильтоновым графом.

Итак, для построения гамильтоновой реализации последовательности (1) ($d_n > 1$) вначале построим ее реализацию G, имеющую гамильтонову цепь $v_1, v_2, \ldots, v_n$ с началом в вершине v_1 максимальной степени (если такой реализации не существует, то нет и гамильтоновой реализации).

(1) является графической, если и только если

$$\sum_{i=1}^{k} \max\{k-1,\ d_i\} \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} d_i,$$

$$k = m,\ n-1. \qquad (3)$$

Кожич [9] предложил алгоритм, проверяющий условия Эрдеша—Галлаи посредством $O(n)$ элементарных операций.

К критерию Эрдеша—Галлаи близок еще один критерий, идущий от Гейла и Райзера. В множество последовательностей натуральных чисел длины n внесем частичный порядок $\prec$, положив $c \prec d$ для $c = (c_1, \ldots, c_n)$, $d = (d_1, \ldots, d_n)$, если и только если выполняются условия

$$\sum_{i=1}^{k} c_{[i]} \leqslant \sum_{i=1}^{k} d_i,\ k = \overline{1,\ n-1},$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = \sum_{i=1}^{n} d_i.$$

Здесь $(c_{[1]}, \ldots, c_{[n]})$ — последовательность c, переупорядоченная по невозрастанию. Пусть теперь d — невозрастающая последовательность (1), $M = M(d)$ — квадратная $(0, 1)$-матрица порядка n с нулевой диагональю, в i-й строке которой ровно d_i единиц и все они «прижаты» к левому краю с учетом нуля на диагонали, $i = \overline{1, n}$. Далее, пусть s_i — число единиц в i-м столбце матрицы M, $s = s(d) = (s_1, \ldots, s_n)$. Например,

$$d = (4, 3^2, 1^4),\ M = \begin{vmatrix} 0&1&1&1&1&0&0 \\ 1&0&1&1&0&0&0 \\ 1&1&0&1&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0 \end{vmatrix},$$

$$S = (6, 2, 2, 3, 1, 0, 0).$$

Утверждение 2.5. Последовательность (1) является графической, если и только если $d \prec s(d)$, т. е.

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} s_i, \qquad k = \overline{1, n-1}. \qquad (4)$$

Это утверждение не раз переоткрывалось, и в ряде работ можно найти различные его модификации. Затрудняясь выявить первую публикацию, укажем одну из последних работ — Ансти [38], из которой легко извлечь этот критерий в приведенном выше виде.

Нетрудно заметить, что k-е неравенство в (4) есть k-е НЭГ при $k \leqslant m$ и k-е неравенство в (3) при $k \geqslant m$.

С приведенными результатами перекликается интересная работа Руча и Гутмана [167], доказательства в которой предельно наглядны. Пусть (1) — правильная последовательность, $d_k^*(d) = d_k^* = \max\{i : d_i \geqslant k\}$, $d^* = (d_1^*, \ldots, d_n^*)$. Последовательность d^* называется сопряженной к d. Если $N = N(d)$ — квадратная $(0, 1)$-матрица размеров $n \times l$, где $l \geqslant d_1$, в i-й строке которой ровно d_i единиц и все они «прижаты» к левому краю $(i = \overline{1, n})$, то d_k^* равно числу единиц в k-м столбце матрицы N. В [167] используются следующие инварианты последовательности d: $f = f(d) = \max\{i : d_i \geqslant i\}$, $\Delta_k = d_k^* - d_k - 1$.

Очевидно, что $f \in \{m-1, m\}$, где $m = m(d)$, и $\Delta_k = s_k - d_k$ для $k = \overline{1, m}$, $(s_1, \ldots, s_n) = s(d)$.

Утверждение 2.6 [167]. Последовательность (1) является графической, если и только если $D_k = \sum_{i=1}^{k} \Delta_i \geqslant 0$, $k = \overline{1, f}$.

По существу, этот результат идентичен утверждению 2.3.

Лемма 2.7 [167]. Пусть d — последовательность (1), $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $p \prec d$. Тогда если d — графическая последовательность, то и p является графической.

Утверждение 2.6 [167]. Во множестве невозрастающих графических последовательностей длины n с фиксированной суммой членов последовательность (1) максимальна относительно порядка $\prec$, если и только если $D_k = 0$, $k = \overline{1, f}$.

Это утверждение позволяет перебросить мостик от так называемых «графов с максимальным ветвлением» [167] к пороговым графам.

Наглядные идеи из [167] независимо развивает Айгнер в [35], где отношение порядка $\prec$ используется для изучения в простейших случаях потенциально P-графических последовательностей.

Понятие сопряженной последовательности и отношение порядка $\prec$ позволили Гейлу [105] и Райзеру [169] получить эффективный критерий графичности пары последовательностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Асратян А. С., Хачатрян Н. К. Две теоремы о гамильтоновых графах // Мат. заметки.— 1984.— 35, № 1.— С. 55—61.
2. Буснюк Н. Н. Число 3-циклов в графах с заданными степенями вершин // Вест. Белгосун-та. Сер. 1.— 1984.— № 1.— С. 57—58.
3. Зверович И. Э. Доказательство теоремы Ф. Б. Рао о вынужденно планарных последовательностях / Редкол. журн. «Изв. АН БССР».— Минск, 1987.— 25 с. Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 2828—В87 Деп.
4. Зверович И. Э. Итерирование степенных последовательностей // Там же.— № 1.— С. 30—34.
5. Зверович И. Э. Итерирование степенных последовательностей / Редкол. журн. «Изв. АН БССР». — Минск, 1986.— 23 с. Рукопись деп. в ВИНИТИ, 1986, № 1227—В87 Деп.
6. Зверович И. Э. Степенное множество и проходимость графа // Редкол. журн. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук». — Минск, 1986.— 22 с. Рукопись деп. в ВИНИТИ, 1986, № 7560—В86 Деп.
7. Зверович И. Э. Реализуемость конечного множества натуральных чисел как множества степеней вершин гамильтонова графа // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук.— 1986.— № 4.— С. 32—37.
8. Земляченко В. Н., Корнеенко Н. М., Тышкевич Р. И. Проблема изоморфизма графов //

Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР.— 1982.— **118**.— С. 83—158.
9. Кожич П. П. Линейные алгоритмы распознавания полярности и графичности // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук.— 1986.— № 2.— С. 23—28.
10. Миронов А. А. О реализуемости множества целых неотрицательных чисел степенями вершин графа // Тр. МИИТ.— 1976.— **510**.— С. 29—33.
11. Миронов А. А. О реализуемости наборов чисел в граф и свойства графов с заданным набором степеней // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. — Горький : Горьк. Гос. ун-т, 1981. — С. 76—97.
12. Тышкевич Р. И. Каноническое разложение графа // Докл. АН БССР.— 1980.— **24**, № 8.— С. 677—679.
13. Тышкевич Р. И. Алгебраический подход к проблемам теории графов: Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук.— Киев, 1983.— 166 с.
14. Тышкевич Р. И., Мельников О. И., Котов В. М. О графах и степенных последовательностях: каноническое разложение // Кибернетика.— 1981.— № 6.— С. 5—8.
15. Тышкевич Р. И., Черняк А. А. Униграфы. I // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук.— 1978.— № 5.— С. 5—11.
16. Тышкевич Р. И., Черняк А. А. Каноническое разложение графа, определяемого степенями его вершин // Там же.— 1979.— № 5.— С. 14—26.
17. Тышкевич Р. И., Черняк А. А. Декомпозиция графов // Кибернетика.— 1985.— № 2.— С. 67—74.
18. Тышкевич Р. И., Черняк А. А., Черняк Ж. А. О вынужденно P-графических последовательностях // Докл. АН БССР.— 1985.— **29**, № 8.— С. 677—680.
19. Тышкевич Р. И., Черняк Ж. А. Каталог планарных униграфов // Там же.— 1979.— **23**, № 4.— С. 307—310.
20. Черняк А. А. Связность графов с предписанными степенным множеством и порядком. Униграфичность // Там же.— 1984.— **28**, № 5.— С. 400—403.
21. Черняк А. А. Переключательно полные свойства графов // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук.— 1985.— № 1.— С. 29—35.
22. Черняк А. А. Минимальные графы с заданными степенным множеством и обхватом // Там же.— 1987.— № 2.— С. 5—9.
23. Черняк А. А., Черняк Ж. А. Последовательности степеней ребер и их реализации / Докл. АН БССР.— 1981.— **25**, № 7.— С. 594—597.
24. Черняк Ж. А. Гамильтоновы униграфы // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук.— 1981.— № 1.— С. 23.
25. Черняк Ж. А. Связные реализации последовательностей степеней ребер // Там же.— 1982.— № 3.— С. 43—47.
26. Черняк Ж. А. Двудольные и 0-циклические реализации последовательностей целочисленных пар / Редкол. журн. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук».— Минск, 1982.— 19 с. Рукопись деп. в ВИНИТИ 1982, № 6551—82 Деп.
27. Черняк Ж. А. Об одном свойстве матриц смежностей реализаций последовательностей пар // Кибернетика.— 1983.— № 6.— С. 10—13.
28. Черняк Ж. А. Степенные последовательности графов: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Минск, 1984.— 159 с.
29. Черняк Ж. А. 2-реберно связные реализации графических последовательностей пар // Докл. АН БССР.— 1983.— **27**, № 3.— С. 204—207.
30. Черняк Ж. А. Характеризация потенциально самодополнительных и вынужденно самодополнительных степенных последовательностей // Там же.— № 6.— С. 497—500.
31. Черняк Ж. А. Самодополнительные реализации последовательностей степеней ребер // Мат. заметки.— 1983.— **34**, № 2.— С. 297—308.
32. Черняк Ж. А. Потенциально 2-связные последовательности целочисленных пар // Там же.— 1986.— 39, № 6.— С. 918—933.
33. Acharya B., Vartak M. On the construction of graphs with given constant valence—difference on each of their lines // Wiss. Z. Techn. Hochsch. Ilmenau.— 1977.— **23**, N 6.— P. 33—60.
34. Achuthan N. Characterization of potentially connected integer-pair sequences // Lect. Notes Math.— 1981.— **885**.— P. 153—164.
35. Aigner M. Uses of the diagram lattice // Mitt. Math. Sem. Giessen.— 1984.— **163**.— P. 61—77.
36. Ando K. Rao's conjecture on selfcomplementary graphs with k-factors // J. Graph Theory.— 1985.— **9**.— P. 119—121.
37. Anstee R. P. Properties of (0,1)-matrices with no triangles // J. Combinatorial Theory, A.— 1980.— **29**.— P. 186—198.
38. Anstee R. P. The network flows approach for matrices with given row and column sums // Discrete Math.— 1983.— **44**, N 2.— P. 125—138.
39. Bauer D. On regular line graphs // Ann. N. Y. Acad. Sci.— 1979.— **328**.— P. 30—31.
40. Bauer D. Line-graphical degree sequences // J. Graph Theory.— 1980.— **4**.— P. 212—232.
41. Bauer D., Bloom G., Boesch F. Edge-to-point degree lists and extremal triangle point degree regular graphs // Progress in graph theory.— New York: Acad. Press, 1984.— P. 93—104.
42. Beineke L. W., Schmeichel E. F. Degrees and cycles in graphs // Ann. N. Y. Acad. Sci.— 1979.— **3**.— P. 64—70.
43. Bender E. E., Richmond L. B., Wormald N. C. Almost all chordal graphs are split // J. Austral. Math. Soc.— 1985.— **38**, N 2.— P. 214—221.
44. Benzaken C., Hammer P. L. Linear separation of dominating sets in graphs // Ann. Discrete Math.— 1978.— **2**.— P. 1—10.
45. Berge C. Graphs and hypergraphs. Amsterdam: North-Holland Pullic, 1973.— 528 p.
46. Bhat Kabekode V. S., Rashidi P. The elementary tree modification operation and bicycle realizability of degree list // Stud. sci. math. Hung.— 1980.— **15**.— P. 1—9.
47. Bhat—Nayk V. M., Naik R. N., Kocay W. L. Forcibly 2-variegated degree sequences // Util. Math.—1980.— **18**.— P. 83—89.
48. Billington D. Degree sequences uniquely realizable by hypergraphs // Lect. Notes Math.—1980.— **829**.— P. 59—68.
49. Billington D. Degree sequences uniquely realizable within sets of hypergraphs // Ars Combinatoria.— 1980.— **10**.— P. 65—81.
50. Billington D. Connected subgraphs of the graph of multigraphic realizations of degree sequences // Lect. Notes Math.— 1981.— **884**.— P. 125—135.
51. Billington D. The graph of hypergraphic realizations of demerable multisets of degrees // Ibid.— 1982.— **952**.— P. 150—181.
52. Billington D. The connectedness of the graph of exact m-graphic realizations of degree multisets // Ars Combinatoria.— 1983.— **16**.— P. 183—221.
53. Bixby R. E., Wang D. L. An algorithm for finding hamiltonian circuits in certain graphs // Math. Program. Study.— 1978.— N 8.— P. 35—49.
54. Bloom G. S., Kennedy J. W., Quintas L. V. Distance degree regular graphs // The theory and applications of graphs: 4th Inf. Conf. (Michigan, 1980).— Michigan : West. Michig. Univ., 1981.— P. 95—108.
55. Bloom G. S., Kennedy J. W., Quintas L. V. Some problems concerning distance and path degree sequences // Lect. Notes Math.— 1983.— **1018**.— P. 179.
56. Boesch F. T., Chen S. A generalization of line connectivity and optimality invalnerable graphs // SIAM J. Appl. Math.— 1978.— **34**.— P. 657—665.

57. B o e s c h F. T., H a r a r y F. Line removal algorithms for graphs and their degree lists // IEEE Trans. Circuits and Syst.— 1976.— 23, N 12.— P. 778—782.
58. B o e s c h F. T., H a r a r y F. Unicyclic realizability of a degree list // Networks.— 1978.— 8.— P. 93—96.
59. B o l l o b a s B. Extremal Graph Theory.— London, New York: Acad. Press, 1978.— 500 p.
60. B o n d y I. A. Properties of graphs with constraints on degrees // Stud. Sci. Math. Hung.— 1969.— 4.— P. 473—475.
61. B o n d y I. A., C h v a t a l V. A method in graph theory // Discrete Math.— 1976.— 15.— P. 111—135.
62. B o o n y a s o m b a t V. Degree sequences of connected hypergraphs and hypertrees // Lect. Notes Math.— 1984.— 1073.— P. 236—247.
63. B r u a l d i R. A. OL probleme // Colloq. CNRS Probl. Comb. et Graph Theory // Orsay.— 1976.— P. 437.
64. B r u a l d i R. A. Matrices of zeros and ones with fixed row and column sum vectors // Linear Algebra Appl.— 1980.— 30.— P. 159—231.
65. B r u a l d i R. A. A note on degree sequences of graphs // Can. Math. Bull.— 1980.— 23.— P. 21—27.
66. B u c k l e y F., S u p e r v i l l e L. Distance distributions and mean distance problems // Proc. 3d Caribbean Conf. on Combinatorics and Computing (Barbados, 1981).— Barbados: S. n., 1981.— OOP.
67. A c o l l e c t i o n of open problems / M. Capobianko, S. Mauer, D. McCarthy, J. Mollugo // Ann. N. Y. Acad. Sci.— 1979.— 319.— P. 577.
68. C h a r t r a n d G. A graph theoretic approach to a communication problem // SIAM J. Appl. Math.— 1966.— 14.— P. 778—781.
√69. C h a r t r a n d G., G o u l d R., K a p o o r S. Graphs with prescribed degree sets and girths // Period. Math. Hungar.— 1981.— 12.— P. 261—266.
√70. C h a r t r a n d G., G o u l d R., P o l i m e n i A., W a l l C. Biographical sets // Proc. 4th Conf. on Theory and Appl. Graphs (Michigan, 1980).— Michigan : Michigan univ, 1980.— P. 181—188.
71. C h a w a t h e P. D. 2-perfect graphic degree sequences // Lect. Notes Math.— 1981.— 885.— P. 195—202.
72. C h e r n y a k A. A., C h e r n y a k Z h. A., T y s h k e v i c h R. I. On forcibly hereditary P-graphical sequences // Discrete Math.— 1987.— 64.— P. 118.
73. C h o u d u m S. A. Characterization of forcibly outerplanar graphic sequences // Lect. Notes Math.— 1981.— 885.— P. 203—207.
74. C h u n g p h a i s a n V. Conditions for sequences to be r-graphic // Discrete Math.— 1974.— 7.— P. 31—41.
75. C h u n g p h a i s a n V. Construction of Hamiltonian graphs and digraphs with prescribed degrees // J. Combinatorial Theory, B.— 1978.— 24.— P. 154—163.
76. C h v a t a l V. On Hamilton's ideals // Ibid.— 1972.— 12.— P. 163—168.
77. C h v a t a l V., H a m m e r P. L. Set-packing problems and threshold graphs.— Waterloo, 1983.— 27 p.— (Prepr. / Univ. Waterloo; NCORR 73—21).
78. C h v a t a l V., H a m m e r P. L. Aggregation of inequalities in integer programming // Ann. Discrete Math.— 1977.— Vol. 1.— P. 145—162.
79. C o l b o u r n C. I. Graph generation // Univ. Waterloo Res. Rep.— CS—77—37.— 1977.— 73 p.
80. D a s P. Results on degree sequences and integer-pair sequences of graphs and diagraphs // Ph. D. Thesis.— Indian Statist. Inst. Calcutta.— 1981.— 94 p.
81. D a s P. Characterization of unigraphic and unidigraphic integer-pair sequences // Discrete Math.— 1981.— 37.— P. 51—66.
82. D a s P. Degree sequences of multipartite graphs and digraphs // Util. Math.— 1982.— 22.— P. 7—15.
83. D a s P. Unidigraphic and unigraphic degree sequences through uniquely realizable integer-pair sequences // Discrete Math.— 1983.— 45.— P. 45—59.
84. D a s P. Integer-pair sequences with self-complementary realizations // Ibid.— 1983.— 45.— P. 189—198.
85. D a s P., R a o S. Alternating eulerian trails with prescribed degrees in two edge-edored graph // Ibid.— 1983.— 43.— P. 9—20.
86. D e w d n e y A. K. Degree sequences in complexes and hypergraphs // Proc. Amer. Math. Soc.— 1975.— 53.— P. 535—540.
87. D u k e R., W i n k l e r P. Degree set of k-trees: small k // Isr. J. Wath.— 1981.— 40, N 3—4.— P. 296—306.
88. D u k e R., W i n k l e r P. Realizability of almost all degree sets by k-trees // Congr. Number.— 1982.— 35.— P. 261—273.
89. E g g l e t o n R. B. Graphic sequences and graphic polynomials: a report // Infinite and finite sets.— 1975.— 1.— P. 385—392.
90. E g g l e t o n R. B., H o l t o n D. A. Path realizations of multigraphs.—Melboarn, 1978.— 52 p. (Res. Rep./ Univ. Melboarn; N 33).
91. E g g l e t o n R. B., H o l t o n D. A. Graphic sequences // Lect. Notes Math.— 1979.— 748.— P. 1—10.
92. E g g l e t o n R. B., H o l t o n D. A. The graph of type (0, ∞, ∞) realizations of a graphic sequence // Ibid.— 1979.— 748.— P. 40—54.
93. E g g l e t o n R. B., H o l t o n D. A. Simple and multigraphic realizations of degree sequences // Ibid.— 1981.— 884.— P. 155—172.
94. E r d ö s P., G a l l a i T. Graphs with prescribed degrees of vertices // Mat. Lapok.— 1960.—11.—P. 264—274.
95. E x o o G, H a r a r y F. The forcibly tree and forcibly unicyclic degree sequences // Elem. Math.— 1982.— 37, N 2.— P. 41—46.
96. F a n e l l i S. On a conjecture of a class of maximal planar graphs // J. Graph Theory.— 1980.— 4.— P. 371—375.
97. F a n e l l i S. An unresolved conjecture on nonmaximal planar graphical sequences // Discrete Math.—1981.—36.— P. 109—112.
98. F a n e l l i S. On the existence and connectivity of a class of maximal planar graphs // Calcolo.— 1982.—19.— P. 157—167.
99. F a n e l l i S. On the connectivity of maximal planar graphs with minimum degree 5 // Combinatorics'81, Math. Stud.— 1983.— 78.— P. 343—353.
100. F a r r e l E. J. On graphical partitions and planarity // Discrete Math.— 1977.— 18, N 2.— P. 149—153.
101. F o l d e s S., H a m m e r P. L. Split graph.— Waterloo, 1976.— 11 p.— (Prepr./ Univ. Waterloo; CORR 76—3).
102. F o l d e s S., H a m m e r P. L. Split graph // Proc. 8th s.-e. Conf. Combinatorics «Graph Theory and Comput» (Boca Raton, 1977).— Boca Raton: Florid. Atlant. Univ., 1977.— P. 311—315.
103. F o l d e s S., H a m m e r P. L. On a class of matroid producing graphs // Coll. Math. Soc. J. Bolyai.— 1978.— 18.— P. 331—352.
104. F u l k e r s o n D. R., H o f f m a n A. J., M c A n d r e w M. H. Some properties of graphs with multiple edges // Can. J. Math.— 1965.— 17, N 1.— P. 225—235.
105. G a l e D. A theorem on flows in networks // Pacific J. Math.— 1957.— 7.— P. 1073—1082.
106. G a n g o p a d h y a y T. Characterization of forcibly bipartite selfcomplementary bipartitioned sequences // Lect. Notes Math.— 1981.— 885.— P. 237—260.
107. G a n g o p a d h y a y T. Characterization of potentially bipartite self-complementary bipartitioned sequences // Discrete Math.— 1982.— 38.— P. 173—184.
108. G o l d m a n A. J., B y r d R. H. Minimum-loop realization of degree sequences // J. Res. Nat. Bur. Stand.— 1982.— 87.— P. 75—78.
109. G o l d m i t h D. L., W h i t e A. T. On graphs with equal edge-connectivity and minimum degree // Discrete Math.— 1978.— 23.— P. 31—36.
110. G o l u m b i c M. C. Threshold graphs and synchronizing processes // Combinatorics'76.— 1978.— 1.— P. 419—428.

111. Gould R. Degree sets for homogeneously traceble nonhamiltonian graphs // Colloq. Math.— 1981.— **XLV**.— P. 155—158.
112. Gould R., Lick D. Degree sets and graph factorizations // Ibid.— 1984.— **XLVIII**, N 2.— P. 269—277.
113. Grötschel M. Graphs with cycles containing given paths // Ann. Discrete Math.— 1977.— **I**.— P. 233—245.
114. Hakimi S. L. On realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a linear graph // I— J. SIAM.— 1962.— **10**.— P. 496—502; 2 — J. SIAM.— 1963.— **II**.— P. 135—147.
115. Hakimi S. L., Schmeichel E. F. Graphs and their degree sequences: a survey // Lect. Notes Math.— 1978.— **642**.— P. 225—235.
116. Hakimi S. L., Schmeichel E. F. On the connectivity of maximal planar graphs // J. Graph. Theory.— 1978.— **2**.— P. 307—314.
117. Черняк А. А. Степенные множества графов и гамильтоновость // Докл. АН БССР.—1987.—**31**, № 12.— С. 920—923.
118. Halberstam F. Y., Zak J. A note on planarity and distance degree sequences // Lect. Notes Math.— 1983.— **1018**.— P. 286—289.
119. Hammer P. L., Ibaraki T., Simeone B. Degree sequences of threshold graphs // Proc. 9th s. e. Conf. on Combinatorics «Graph Theory and Comput» (Boca Raton, 1978).— Boca Raton: Florid. Atlant. Univ., 1978.— P. 329—355.
120. Hammer P. L., Ibaraki T., Simeone B. Threshold sequences // SIAM J. on Algebraic and Discrete Methods.— 1981.— **2**.— P. 39—49.
121. Hammer P. L., Simeone B. The splittance of a graph // Combinatorica.— 1981.— **1**, N 3.— P. 275—284.
122. Harary F. The structure of threshold graphs // Riv. Mat. Sci. Econ. Soc.— 1979.— **2**.— P. 169—172.
123. Harary F., Vince A. Graphical completions of sequence // SIAM J. Appl. Math.— 1980.— **38**.— P. 402.
124. Havel W. A remark on the existence of finite graphs // Časop. pest. mat.— 1955.— **80**.— P. 477—480.
125. Henderson P. B., Zalstein Y. A graph—theoretic caracterization of the PV chunk-class of the synchronizing primitives // SIAM J. Comput.— 1977.— **6**.— P. 88—108.
126. Hilano T., Nomurak K. Distance degree regular graphs // J. Combinat. Theory, B.— 1984.— **37**.— P. 96—100.
127. Javdekar M. Characterization of forcibly *k*-variegated degree sequences, $k \geqslant 3$ // Discrete Math.— 1980.— **29**.— P. 33—38.
128. Johnson R. H. Simple separable graphs // Pacif. J. Math.— 1975.— **56**.— P. 143—158.
129. Johnson R. H. Properties of unique realizations — a survey // Discrete Math.— 1980.— **31**.— P. 185—187.
130. Johnson R. H. Describing simple blocus // Proc. 13th s.—e. Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Comput (Boca Raton, 1982).— Congr. Numer.— 1982.— **36**.— P. 295—301.
131. Joshi N. A. 4-perfect degree sequences // J. Combinatorics, Inf. and Syst. Sci.— 1984.— **9**.— P. 87—96.
132. Kapoor Z., Lesnjak—Foster L. Dergee sets for triangle-free graphs // Ann. N. Y. Acad. Sci.— 1979.— **319**.— P. 320—330.
133. Kapoor S. F., Polimeni A., Wall C. Degree sets for graphs // Fund. Math.— 1977.— **95**.— P. 189—194.
134. Kennedy J. W., Quintas L. V. Extremal trees and embedding spaces for molecular graphs // Discrete Appl. Math.— 1983.— **5**.— P.
135. Kleitman D. J., Li S.—Y. A note on unigraphic sequences // Stud. Appl. Math. 1975.— **54**, N 4.— P. 283—287.
136. Kleitman D. J., Wang D. L. Algorithms for constructing graphs and digraphs with given valences and factors // Discrete Math.— 1973.— **6**. —P. 79—88.
137. Kocay W. On reconstructing degree sequences // Uti Math.— 1980.— **17**.— P. 151—162.
138. Koren M. Pairs of sequences with a unique realiz tion by bipartite graphs // J. Combinat. Theory, B.- 1976.— **21**, N 3.— P. 224—234.
139. Koren M. Sequences with a unique realization by simpl graphs // Ibid.— 1976.— **21**, N 3.— P. 235—244.
140. Kulkarni K. H. Sufficient conditions for edge-locally—n—connected graphs // Cas. pěstov. Mat.- 1981.— **106**.— P. 112—116.
141. Kundu S. The *k*-factor conjecture is true // Discret Math.— 1973.— **6**.— P. 367—376.
142. Lesniak L., Polimeni A., Vanderjayt D. Degree set and traversability // Rend. Math.- 1977 (1978).— **10**, N 2—3.— P. 193—204.
143. Lesniak—Foster L. Some recent results in hamiltonian graphs // J. Graph Theory.— 1977.— N 1.- P. 27—36.
144. Li S.—Y. Graphic sequences with unique realization // J. Combinat. Theory, B.— 1975.— **19**, N 1.— P. 42—68.
145. Majcher Z. Graphic matrices.— Bratislava, 1986.— 18 p.— (Prepr. / Bratisl. univ; N 1886).
146. Majcher Z. On some regularities of graphs II // Čas. pest. mat.— 1984.— **109**.— P. 380—388.
147. Majcher Z. On sequence representable by *r*-regular graphs // Lect. Notes Math.— 1983.— **1018**.— P. 131—138.
148. Majcher Z. Matrices representable by graphs // Proc. 3d Czechoslovak Symp. on Graph Theory (Praque, 1982).— Praque: Teubner-Texte zur Mathematic, 1983.— P. 178—182.
149. Marchioro P., Morgana A., Petreschi R., Simeone B. Degree sequences of matrogenic graphs // Discrete Math.— 1984.— **51**.—P. 46—61.
150. McCarthy P. J. Pseudographs with degrees in prescribed intervals // Bull. Malaysian Math. Soc.— 1983.— **6**.—P. 23—29.
151. Mitchem J., Schmeichel E. Pancyclic and bipancyclic graphs — a survey // Graphs and applications // Proc. 1th Colorado's Symp. in Graph Theory (Colorado, 1958).— Colorado: S. n., 1958.— P. 271—285.
152. Patrinos A. N., Hakimi S. L. Relations between graphs and integer-pair sequences // Discrete Math.— 1976.— 15.— P. 347—358.
153. Peled U. N. Threshold graph enumeration and series—product identities // Proc. 11th S.—e. Conf. on Combinatorics. Graph Theory and Computing (Boca Raton, 1980).— Boca Raton: Florid. Atlant univ., 1980.— P. 735—738.
154. Peled U. N. Matroidal graphs // Discrete Math.— 1977.— **20**.— P. 263—286.
155. Peled U. N., Simeone B. Box-threshold graphs// J. of Graph Theory.— 1984.— **8**, N 2.— P. 331—345.
156. Plonka J. On some regularities of graphs. I.// Čas. pest. mat.— 1982.— **107**.— P. 231—240.
157. Posa L. On the circuits of finite graphs // Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.— 1963.— **8**.— P. 355—361.
158. Quintas L. V., Slater P. J. Pairs of non-isomorphic graphs having the same path degree sequence // MATCH.— 1981.— N 12.— P. 75—86.
159. Randic M. Characterizations of atoms, molecules and classes of molecules based on paths enumerations // Ibid.— 1979.— N 7.— P. 5—64.
160. Rao A. R. Degree sequences of cocti // Lect. Notes Math.— 1981.— **885**.— P. 410—416.
161. Rao A. R., Rao S. B. On factorable degree sequences // J. Combinat. Theory, B.— 1972.— **13**.— P. 185—191.
162. Rao S. B. Characterization of self-complementary graphs with 2-factors // Discrete Math.— 1977.— **17**.— P. 225—233.
163. Rao S. B. Characterization of forcibly planar degree sequences.— S. l., 78.— 52 p. (Rep./ Ind. Statist. Inst. Techn.; N 36/78).

164. R a o S. B. A survey of the theory of potentially P-graphic and forcibly P-graphic degree sequences // Lect. Notes Math.— 1981.— **885**.— P. 417—440.
165. R a o S. B. Towards a theory of forcibly hereditary P-graphic sequences // Ibid.— 1981.— **885**.— P. 441—458.
166. R a w l i n s o n K. T., E n t r i g e r R. C. Class of graphs with restricted neighbourhoods // J. Graph Theory.— 1979.— **3**.— P. 257—262.
167. R u c h E., G u t m a n I. The branching extent of graphs // J. Combinatorics, Inform. and Syst. Sci.— 1979.— **4**, N 4.— P. 285—295.
168. R u s c i t t i A. Sulla struttura delle classi $F_{n,k}$ digrafi planari massimali // Rend. Math.— 1978.— **11**.— P. 243—269.
169. R y s e r H. J. Combinatorial properties of matrices of zeros and ones // Can. J. Math.— 1957.— **9**.— P. 371—377.
170. S c h m e i c h e l E. F., H a k i m i S. L. Pancyclic graphs and a conjecture of Bondy and Chvatal // J. Combinat. Theory, B.— 1974.— **17**.— P. 22—34.
171. S c h m e i c h e l E. F., H a k i m i S. L. On the existence of a traceable graph with prescribed vertex degrees // Ars Combinatoria.— 1977.— **4**.— P. 69—80.
172. S c h m e i c h e l E. F., H a k i m i S. L. On planar graphical degree sequences // SIAM J. Appl. Math.— 1977.— **32**.— P. 598—609.
173. S c h m e i c h e l E. F., M i t c h e m J. Bipartite graphs with cycles of all even lengths // J. Graph Theory.— 1982.— **6**.— P. 429—439.
174. S i m i o n R. Trees with 1-factors: degree distribution // Congr. Numerant.— 1984.— **45**.— P. 147—159 (Combinatorics, graph theory and computing: Proc. 15th Southest Conf.)
175. S i p k a T. The orders of graphs with prescribed degree sets // J. Graph Theory.— 1980.— **4**.— P. 301—307.
176. S k u p i e n Z. Homogeneously traceble and hamiltonian connected graphs // Demonstr. Math.— 1984.— **XVII**, N 4.— P. 1051—1067.
177. S l a t e r P. J. Extended degree sequences of graphs // Proc. 12th s. e. Conf. Combinatorics «Graph Theory and Comput» (Boca Raton, 1981).— Boca Raton: Florid. Atlant. univ., 1981.— P. 2—5.
178. S l a t e r P. J. Counterexamples to Randic's conjecture on distance degree sequences for trees // J. Graph Theory.— 1982.— P. 89—92.
179. S o k a r o v s k y R. Existance and realization of graphs with prescribed degrees and properties // Univ. Skople.— 1975.
180. S y s l o M. On tree and unicyclic realizations of degree sequences // Demonst. Math.— 1982.— **15**, N 4.— P. 1071—1076.
181. T a y l o r D. E., L e v i n g s t o n R. Distance-regular graphs // Lect. Notes Math.— 1978.— **686**.— P. 313—323.
182. T a y l o r R. Constrained switchings in graphs // Ibid.— 1981.— **884**.— P. 314—336.
183. T a y l o r R. Switchings constrained to 2-connectivity in simple graphs // SIAM J. Alg. Discrete Math.— 1982.— P. 121—141.
184. T r u s z c z y n s k i M. Note on vertex degrees of planar graphs // J. Graph Theory.— 1984.— **8**.— P. 171—176.
185. T y s h k e v i c h R. I. Once more on matrogenic graphs // Discrete Math.— 1984.— **51**.— P. 91—100.
186. T y s h k e v i c h R. I., C h e r n y a k A. A. Box-threshold graphs: the structure and the enumeration // 30 IWK Ilmenau.— 1985.— F.— P. 119—121.
187. W a n g D. L., K l e i t m a n D. J. A note on n-edge connectivity // SIAM J. Appl. Math.— 1974.— **26**.— P. 313—314.
188. W o l f D. Making connections: graphical construction // Math. Mag.— 1981.— **54**.— P. 250—255.
189. W o n g P. K. Cages- a survey // J. Graph Theory.— 1982.— **6**.— P. 1—22.
190. Z h u Y., T i a n F. A generalization of the Bondy—Chvatal theorem on the k-clousure // J. Combin. Theory, B.— 1983.— **35**.— P. 247—255.

Поступила 17.11.86