КИБЕРНЕТИКА

№5 СЕНТЯБРЬ-ОКТЯБРЬ 1988

ВСЕСОЮЗНЫЙ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА
«ИНСТИТУТ КИБЕРНЕТИКИ им. В. М. ГЛУШКОВА»

ОСНОВАН В ЯНВАРЕ 1965 ГОДА
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД

КИЕВ НАУКОВА ДУМКА

УДК 519.1

Р. И. ТЫШКЕВИЧ, А. А. ЧЕРНЯК, Ж. А. ЧЕРНЯК

ГРАФЫ И СТЕПЕННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ: ОБЗОР. III [1]

4. ОБОБЩЕНИЯ ВЕРШИННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В данном разделе рассматриваются перспективные направлени которые появились в теории степенных последовательностей последние годы.

14. Графы реализаций

При изучении структурных свойств реализаций графических последовательностей и их генераций полезны понятия переключения и графа реализаций. Предположительно, впервые эти понятия встречаются в [169, 90], впоследствии они неоднократно переоткрывались и обобщались.

Пусть a, b, c, d — попарно различные вершины графа G, причем $ac, bd \in EG$, а $ad, bc \notin EG$. Переключением графа G называется преобразование, при котором удаляются ребра ac, bd и добавляются ad, bc.

Пусть $d = (d_1, \ldots, d_n)$ — графическая последовательность, $\Pi = (r_{ij})$ — вещественная симметрическая $n \times n$-матрица с нулевой диагональю. Помеченной реализацией пары (d, Π) называется граф G с множеством $VG = \{v_1, \ldots, v_n\}$ такой, что $\deg v_i = d_i$, $q(v_i, v_j) \leqslant r_{ij}$, $i, j = \overline{1, n}$. Если в $\Pi r_{ij} = r\ (i \neq j)$, то (непомеченная) реализация пары (d, Π) определяется как мультиграф, список степеней вершин которого совпадает с d, а кратности ребер не превышают r. Пара (d, Π), имеющая реализацию, называется графической. Графом помеченных реализаций $R_l(d, \Pi)$ (реализаций $R(d, \Pi)$) графической пары (d, Π) называется граф, вершины которого — помеченные реализации пары (d, Π), причем две вершины A и B смежны, если и только если существует переключение, переводящее A в B (в граф, изоморфный B). $R_l(d, \Pi, P)$ ($R(d, \Pi, P)$) — подграф графа $R_l(d, \Pi)$ ($R(d, \Pi)$), порожденный вершинами, обладающими свойством P. В этих определениях вместо d могут фигурировать графические последовательности других ви-

[1] I, II ч. опубликованы в журнале «Кибернетика» № 6, 1987 г., № 2, 1988 г.

дов, например, реберные или i-последовательности.

Классическим результатом является следующая теорема.

Теорема 14.1. Граф $R_l(d, r(J-I))$ связен.

Здесь $r(J-I)$ — матрица с нулевой диагональю, все недиагональные элементы которой равны r.

Имеется довольно много модифицированных формулировок и доказательств этой теоремы [38, 64, 89, 90—93, 104, 169, 182].

В связи с графами реализаций и теоремой 14.1 возникает сформулированная Колборном в [67] проблема определения свойств P, для которых граф $R(d, J-I, P)$ связен (такие свойства называются полными). Особенность этой проблемы, по-видимому, не столько в том, что до сих пор известно лишь несколько свойств, полнота которых устанавливается нетривиально, сколько в том, что для полного свойства P имеется разумно эффективный метод порождения всех графов со свойством P [79].

Полнота свойств, определяемых степенными последовательностями, следует из теоремы 14.1. К ним, например, относятся расщепляемость, разложимость, пороговость, бокспороговость (см. гл. 2). Полнота свойств «быть деревом», «быть уницикличеким графом» показана в [79, 180]. Эти факты прямо следуют из полноты свойства «быть связным графом», доказанной Тейлором [182]. Полноту свойств «быть 2-связным графом» и «быть 2-реберно связным графом» доказали независимо Тейлор [183] и А. А. Черняк [21]. Ж. А. Черняк доказала полноту свойства «иметь фиксированную последовательность степеней ребер» [27]. Как заметили независимо И. Э. Зверович [4] и, в другой форме, Мейчер [145], аналогичное утверждение для i-последовательностей является прямым следствием теоремы 14.1. Отметим, что во всех этих работах, по существу, доказаны более сильные утверждения, касающиеся связности графов помеченных реализаций, ибо верно следующее утверждение.

Утверждение 14.2. [182]. Связность графа $R_l(d, \Pi, P)$ влечет связность графа $R(d, \Pi, P)$. Обратное неверно.

Примеры неполных свойств имеются в [21, 79, 182], наименее тривиально среди них свойство «иметь фиксированную связность» [182].

Проблема 14.3. Являются ли полными свойства гамильтоновости и планарности?

Гипотеза 14.4. n-связность является полным свойством.

Биллингтон [50] изучал расстояния между вершинами в графе $R_l(d, r(J-I))$. Пусть G и H — две вершины этого графа. Определим число $|G-H| = \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} |q_G(v_i, v_j) - q_H(v_i, v_j)|$.

Теорема 14.5 [50]. Если расстояние в $R_l(d, r(J-I))$ между вершинами G и H равно m, то $\frac{1}{4}|G-H| \leqslant m \leqslant \frac{1}{2}|G-H| - 1$, причем указанные границы достижимы.

Матричные аналоги переключений и графов реализаций изучались в многочисленных работах о матрицах с предписанными векторами строчных и столбцовых сумм. В частности, имеются матричные обобщения теорем 14.1 и 14.5 [38, 64, 27]. Достаточно полный перечень статей на эти темы, а также проблематику можно найти в [37, 38, 64].

15. Гиперграфы

Гиперграф с q ребрами, имеющими предписанный набор мощностей $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q)$, называется ε-гиперграфом. Гиперграф без кратных ребер называется простым. Степень вершины v гиперграфа — число ребер, содержащих v.

Степенные последовательности гиперграфов пока еще интенсивно не изучаются. При этом первыми возникают вопросы реализуемости, единственности и связности реализаций.

Сразу отметим, что ε-гиперграфическую реализацию (с кратными ребрами) последовательности

$$d = (d_1, \ldots, d_p) \tag{1}$$

можно интерпретировать как графическую реализацию пары последовательностей $(\varepsilon; d)$, поэтому теоремы об ε-гиперграфических реализациях степенных последовательностей получаются простой переформулировкой соответствующих утверждений для пар последовательностей (см. разд. 13).

Биллингтон [48, 49] описал последовательности (1), имеющие единственную реализацию гиперграфом, у которого мощности ребер не превосходят фиксированного числа t. Критерии реализуемости последовательности простым ε-гиперграфом получены Девдни [86] и Бунасомбатом [62], однако вопрос о получении эффективного критерия реализуемости пока открыт. В [62] описаны последовательности, реализуемые связным простым ε-гиперграфом.

Теорема 15.1. [62]. Пусть $\varepsilon_i \geqslant 2$, $i = \overline{1, q}$, $d_j \geqslant 1$, $j = \overline{1, p}$. Последовательность (1) реализуется связным простым ε-гиперграфом, если и только если она реализуется простым ε-гиперграфом и

$$p + q - 1 \leqslant \sum_{i=1}^{q} \varepsilon_i.$$

Теорема 15.2. [62]. Пусть $\varepsilon_i \geqslant 2$, $i = \overline{1, q}$, $d_j \geqslant 1$, $j = \overline{1, p}$. Последовательность (1) реализуется простым ε-гипердеревом, если и только если

$$p + q - 1 = \sum_{i=1}^{q} \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{p} d_i.$$

Эти теоремы становятся очевидными, если простой ε-гиперграф интерпретировать как двудольный граф, в котором окружения вершин первой доли попарно различны. Так, теорема 15.2 очевидна ввиду наличия этого свойства в любой древесной реализации пары $(\varepsilon; d)$, а теорема 15.1 — ввиду того, что любое переключение, сокращающее

...зных компонент в реализации пары (ε; ...рушает этого свойства.

...тривиальной представляется следующая

...ема 15.3. Описать последовательности, ...е единственную реализацию простым ε-...афом.

...епенное множество графа

...ным множеством $S(G)$ графа G называется ...ество степеней его вершин. Основные иссле...ия по степенным множествам графов акку...руются в следующих классах задач.

...дача S1 Пусть S — конечное множество на...льных чисел, m — натуральное число, P — ...етико-графовое свойство. Является ли пара ...m) P-графической, т. е. существует ли граф G ...ядка m со степенным множеством S — реализа... пары (S, m), обладающий свойством P?

...В тех ситуациях, когда задача $S1$ плохо подда...ся решению даже в частных случаях, прибега... к более ослабленной ее версии — задаче $S2$.

Задача S2. Определить наименьший порядок ...$_p(S)$ графов со степенным множеством S, име...ющих свойство P.

Задача $S1$ созвучна задачам о потенциально P-графических последовательностях. Однако с задачами $S1$ и $S2$ связано значительно меньше завершенных исследований. Это объясняется как отсутствием пока еще достаточно эффективных подходов к их решению, так и относительной молодостью этого раздела теории (исключая клетки, см. ниже).

Рассмотрим, в основном, задачи, для которых либо уже даны исчерпывающие решения, либо число решенных случаев значительно превалирует над нерешенными исключениями.

Графические пары (свойство P не предписывается) описаны Шипкой [175]. Ранее Капур, Полимени и Уол [133] доказали реализуемость множества S $(k+1)$-вершинным графом, где k — максимальный в S элемент.

Теорема 16.1 [175]. Пара

$$(S; m) = (\{k_1, \ldots, k_n\}; m),\ 0 < k_1 < \ldots < k_n < m, \quad (2)$$

является графической, если и только если не выполняется ни одно из следующих условий:

1) $k_1 \cdot \ldots \cdot k_n \cdot m$ нечетно; 2) $k_1 = 1,\ n = 2,\ m = k_2 + 2,\ k_2 \neq 2$.

Униграфические пары (2), т. е. пары с единственной реализацией, описаны А. А. Черняком [20]. Р. И. Тышкевич [185] отметила, что множество S имеет единственную пороговую реализацию, причем число вершин в ней равно $k_n + 1$.

И. Э. Зверовичем было замечено, что реализуемость пары (2) деревом равносильна разрешимости в целых положительных числах уравнения

$$m - 2 = \sum_{i=2}^{n} (k_i - 1)\, x_i. \quad (3)$$

Хотя рас... нения является NP-пол... сведение задачи о существовании дере... знаванию разрешимости уравнения (3) позволяет получить алгоритм с временной сложностью $O(mn)$, устанавливающий реализуемость пары (2) деревом и строящий (при положительном ответе) такую реализацию. В связи с этим интересна следующая проблема.

Проблема 16.2. Существует ли алгоритм с временной сложностью $p(m, n)$, где $p(m, n)$ — полином от m и n, устанавливающий реализуемость пары (2) двудольным графом и строящий такую реализацию?

Частные решения задачи реализуемости пары (2) двудольным графом можно извлечь из [70]. Упоминается эта задача и в [132].

Задача реализуемости пары (2) k-связным (k-реберно-связным) графом решена в [20]. В частности, там конструктивно доказана теорема.

Теорема 16.3. Графическая пара (2) имеет k_1-связную реализацию, если и только если она отлична от пар

$$(\{1\}, m),\ m \neq 2;\ (\{3, k_2\}, k_2 + 2),\ k_2 \notin \{4, 6\}. \quad (4)$$

Если же графическая пара (2) совпадает с одной из пар (4), то она имеет $(k_1 - 1)$-связную реализацию.

Перейдем к обходам в реализациях пары (2). Из теорем 16.1, 16.3 немедленно следует, что пара (2) имеет реализацию с эйлеровым циклом (т. е. связную реализацию с четными степенями), есл... и только если все k_i четные. Однако нетривиальн... задача $S2$ для свойства «иметь открытую эйлер... ву цепь» (т. е. «быть связным графом с ровно двум... вершинами нечетной степени»). Решение этой з... дачи начато Лисняк, Полимени и Вандеръягт [142] и завершено Зверовичем [6].

В [142] рассмотрена также задача $S2$ для св... ства P «гамильтоновость»: в частности, исчерп... случаи «разреженных» множеств S с $k_i \geqslant k_{i-}$... $+ 2,\ i = \overline{2, n},\ k_1 \geqslant 4$. И. Э. Зверович [7] про... жил исследование соответствующих задач $S2$ и... значительно продвинувшись в их решении.

Теорема 16.4 [7] 1. Пара (2) имеет гамильт... реализацию, если и только если $m \geqslant \mu_p(S)$, ... $\geqslant 2$, $m \cdot k_1 \ldots \cdot k_n$ четно и (2) отлична от (\{... $2t + 2$), $t \geqslant 4$.

2. Если $k_1 \geqslant 3$ или $k_1 = 2$, n нечет... $\mu_p(S) = k_n + 1$.

А. А. Черняк рассмотрел случаи, не охва... теоремой 16.4 [117].

Теорема 16.5. (А. А. Черняк). Пусть ... Тогда $\mu_p(S) = k_n + 2$, если и только если ... один из следующих видов: $\{2, t\}$, $t \geqslant 4$; ... $t + 2\}$, $t \geqslant 7$; $\{2, 4, t, t+1\}$, $t \geqslant 8$; $\{2, \ldots$ ..., $t + j - 2\}$, $j \geqslant 3$, $t \geqslant 2j - 1$. В ... случаях $\mu_p(S) = k_n + 1$.

Тем самым исчерпаны все случаи S... свойства гамильтоновости.

Гоулд [111] доказал реализуемость множества $S \neq \{2\}$, все числа в котором больше единицы, негамильтоновым однородно вычерчиваемым графом, т. е. графом, в котором для каждой вершины v существует гамильтонова цепь с началом в v ($HTNH$-графом). Этот результат отвечает на вопрос Фрухта о существовании $HTNH$-графов с большими степенями вершин.

Проблема 16.6. Описать пары (2), реализуемые $HTNH$-графами.

Другие открытые проблемы о степенях $HTNH$-графов сформулированы Скупенем [176].

Небезынтересна задача $S2$ для свойства P «иметь r-фактор», где r — заданное число, $1 \leqslant r \leqslant k_1$. В [112] Гоулд и Лик высказали следующую гипотезу.

Гипотеза 16.7. Если $r \leqslant k_1 - 1$, то

$$\mu_p(S) = \begin{cases} k_n + 3, \text{ если } n = k_1 = 2,\ k_2 \text{ нечетно, } \\ \qquad\qquad k_2 \geqslant 5,\ r = 1; \\ k_n + 2, \text{ если } k_n \text{ четно, } r \text{ нечетно; } \\ k_n + 1 \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \tag{5}$$

И. Э. Зверович подтвердил это предположение для всех случаев, кроме следующих, остающихся пока открытыми ($t = [(n+1)/2]$):

$$rk_n \text{ нечетно, } \quad k_1 - r = 1, \quad k_1 < k_n - k_t + 1, \quad k_t \text{ четно.} \tag{6}$$

Кроме того, там же приведены примеры множеств S, удовлетворяющих условиям (6), для которых $\mu_p(S) = k_n + 3$, $k_1 > 2$. Таким образом, последняя строка в высказывании (5) еще нуждается в уточнении.

В ряде работ исследовались степенные множества так называемых Γ^{-1}-регулярных графов, введенных Плонкой [156]. Граф называется Γ^{-1}-регулярным степени m, если для каждой его вершины v $\sum_{v \in N(v)} \deg v = m + \deg v$.

Мейчер [146, 147] получила условия реализуемости множества S Γ^{-1}-регулярным графом степени m, однако эти условия носят, скорее, теоретический характер.

Особняком в классе задач $S2$ стоит задача определения $\mu_\tau(S) = \mu_t(S)$ — наименьшего порядка графов с предписанными степенным множеством S и обхватом t (такие графы называются $(S; t)$-клетками). Во-первых, проблема вычисления $\mu_t(S)$ чрезвычайно трудна уже при $n = 1$, $k_1 \geqslant 3$, $t \geqslant 5$. Достаточно сказать, что почти ничего не известно о значениях $\mu_t(\{k_1\})$ при $t \geqslant 13$ или при $7 \leqslant t \leqslant 12$, $k_1 \geqslant 4$, $k_1 - 1 \neq p^r$ (p — простое). Во-вторых, имеющиеся здесь частные результаты очень важны теоретически, они обнаруживают интересные применения алгебры к теории графов, а теории графов — к проективной геометрии. В-третьих, к настоящему времени уже имеется обширная библиография о $(k_1; t)$-клетках: достаточно полную информацию о ней можно найти в обзоре Р. Уонга [189].

Значения $\mu_t(S)$ для $n > 1$ вычислялись в [189, 22]. Некоторые из них приведены в теоремах 16.7 и 16.8.

Теорема 16.8 [69 189, 22].

$$\mu_4(\{k_1, k_2\}) = k_1 + k_2 \ [69]; \ \mu_5(\{3, k_2\}) = 1 + 3k_2 \ [189]; \ \mu_6(\{3, k_2\}) = 2 + 4k_2 \ [22];$$

$$\mu_7(\{3, k_2\}) = 1 + 7k_2 \ [189]; \ \mu_8(\{3, 4\}) = 39 \ [22];$$

$$\mu_9(\{3, k_2\}) = 1 + 15k_2,\ k_2 \geqslant 6 \ [189].$$

Теорема 16.9 [22]. $\mu_5(\{3, 4, k_3, k_4\}) = 1 + 3k_4$, где $4 \leqslant k_3 \leqslant 3 + 2](k_4 - 5)/3[$; $\mu_6(\{3, 4, k_3\}) = 1 + 4k_3$, $\mu_7(\{3, 4, k_3\}) = 1 + 7k_3$.

17. Реберная последовательность графа

Последовательность

$$(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_m, \beta_m) \tag{7}$$

неупорядоченных пар положительных целых чисел называется реберной (степенной) последовательностью, если существует граф — реализация последовательности (7), список степеней ребер которого совпадает с (7). Эта последовательность называется r-графической, если она является списком степеней ребер некоторого r-графа.

Идею развития теории реберных последовательностей выдвинули Патринос и Хакими [152]; ими найдены условия реализуемости последовательности (7) графом и мультиграфом. Более общий результат — условия реализуемости (7) r-графом (условия мультиграфичности получаются при $r = \infty$) получила Ж. А. Черняк [25].

Представим последовательность (7) в форме

$$R = \{(d_i, d_j)^{k_{ij}}\}_{1 \leqslant i \leqslant j < n'} \tag{8}$$

где $\{d_1, \dots, d_n\}$ — множество различных чисел в последовательности $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_m, \beta_m$, $d_1 < \dots < d_n$, k_{ij} — число появлений неупорядоченной пары (d_i, d_j) в последовательности (7).

Теорема 17.1. [25]. Последовательность (8) является r-графической тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} k_{ij} + k_{ii}\Big)/d_i = l_i,$$

$$k_{ij} \leqslant rl_i l_j, \ k_{ij} \leqslant rl_i(l_i - 1)/2,$$

где $i = \overline{1, n}$, — натуральное число.

При этом полагаем правую часть последнего неравенства равной 0, если $r = \infty$, $l_i = 1$.

Из доказательства этой теоремы вытекает алгоритм построения реализации графической последовательности (8) с трудоемкостью $O(m)$ [25].

Имея дело с реберными реализациями, будем всегда полагать, что они не имеют изолированных вершин.

Последовательность (8) называется r-униграфической, если все ее реализации r-графами изоморфны; эти реализации называются r-униграфами. При $r = 1$ употребляются соответственно термины «униграфическая» и «реберный униграф». Характеризацию униграфических реберных последовательностей получили независимо и одновременно Дас [81] и Ж. А. Черняк, А. А. Черняк [23]. Позднее Ж. А. Черняк [28] охарактеризовала r-униграфические последовательности пар. Эта характеризация содержит список легко проверяемых условий, налагаемых на параметры последовательности (8). Хотя формулировка ее носит арифметический характер, но доказательство геометрическое, что позволило провести некоторое сравнение двух классов графов — униграфов (см. разд. 5) и реберных униграфов. В частности, замечено, что класс реберных униграфов значительно обширнее.

Следствие 17.2 [28]. Если g_n— число реберных униграфов порядка n, то $o(g_n) = (2k - 1)!$, $k = [n/4]$.

Напомним, что число униграфов порядка n не превышает $(2,6)^n$ [16].

Проблема 17.3. Найти верхнюю оценку для числа g_n.

Следствие 17.4 [28]. Если $n \equiv 0$ или $n \equiv 1 \pmod 4$ и s_n — число самодополнительных реберных униграфов порядка n, то $o(s_n) = k!$, $k = [(n-5)/8]$. Число же самодополнительных униграфов порядка n равно единице при $n \equiv o \pmod 4$ и двум при $n \equiv 1 \pmod 4$.

Следствие 17.5 [28]. Для любого натурального n существует дерево диаметра n, являющееся реберным униграфом.

Напомним, что диаметр любого связного униграфа не превышает 3 [129].

Р. И. Тышкевич и А. А. Черняк [17] показали, что реберными униграфами являются все доминантно-пороговые графы, введенные Бензакеном и Хаммером [44]. В отличие от пороговых, матрогенных и матроидальных графов доминантно-пороговые графы не всегда являются униграфами. В [17] на базе общей теоремы декомпозиции получены полная характеризация и перечисление доминантно-пороговых графов. А. А. Черняком было замечено, что $d_n \sim cr^n$, где d_n — число доминантно-пороговых графов порядка n, r — максимальный по модулю корень уравнения $x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$ ($r \approx 2,24$).

Ачусан [34] и независимо Ж. А. Черняк [25] нашли характеризацию потенциально связных реберных последовательностей, причем доказательства в [25] позволяют получить для тестирования потенциальной связности и построения связной реализации алгоритм с полиномиально ограниченной временной сложностью. Сформулируем основной результат из [25].

Если G — связный граф, D — конечное множество целых чисел, то $\Gamma(G, D)$ означает последовательность $S_1, \ldots, S_k$ множеств вершин графа G, которая строится следующим образом. К S_1 относим все вершины, степени которых принадлежат D. Если $S_1 = \varnothing$ или S_1 содержит хотя бы одну вершину, принадлежащую нетривиальному блоку графа G (так называемую вершину типа 2), то полагаем $k = 1$. Пусть уже построены $S_1, \ldots, S_{i-1}$. Тогда к S_i относим все вершины v, обладающие следующим свойством: в G существуют вершины a, $b \notin \bigcup_{j=1}^{i-1} S_j$, степени которых равны $\deg v$, и есть $(a, \ldots, b)$-цепь, содержащая вершину из S_{i-1}. Если $S_i = \varnothing$ или S_i содержит вершину типа 2, то полагаем $k = i$, иначе переходим к построению S_{i+1}.

Пусть H_i — i-я связная компонента графа G, D_i — множество степеней в G вершин из $VG \setminus VH_i$. Пару (H_i, D_i) назовем связкой графа G.

Теорема 17.6 [25]. Если для каждой связки (H_i, D_i) несвязной реализации G реберной последовательности R последний член последовательности $\Gamma(H_i, D_i)$ — пустое множество, то R не имеет связных реализаций. В противном случае существует реализация с меньшим, чем у G, числом связных компонент.

Результаты из [25] обобщаются в [32] на случай 2-связных реализаций: по аналогии с теоремой 17.6 в терминах $\Gamma(G, D)$ получены условия потенциальной двусвязности реберной последовательности и разработаны алгоритмы решения соответствующих задач с полиномиальной временной оценкой. Получена также следующая теорема существования.

Теорема 17.7 [32]. Последовательность (8) является потенциально 2-связной тогда и только тогда, когда:

1) $d_1 \geqslant 2$, $K(R)$ — связный граф без мостов;

2) для любого непустого $I_1 \subseteq I = \{1, \ldots, n\}$ выполняется неравенство $\operatorname{com}(H(I \setminus I_1)) \leqslant k(I_1) - l(I_1) + k(I_1, I \setminus I_1) + 2 - d_j$, где $H = K[R]$, $j = \max\{i : i \in I_1\}$.

Здесь $K(R)$ — мультиграф с множеством вершин $I = \{1, \ldots, n\}$, между вершинами i, j, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, которого существует k_{ij} ребер; $K[R]$ — граф, вершины i и j которого смежны тогда и только тогда, когда $k_{ij} \neq 0$; $\operatorname{com}(G)$ — число связных компонент графа G; $k(J, \varnothing) = 0$, $l(J) = \sum_{j \in J} l_j$, l_j такие, как в теореме 17.1, $k(J_1, J_2) = \sum_{(i,j) \in J_1 \times J_2} k_{ij}$,

$$k(J) = \sum_{\substack{(i,j) \in J \times J \\ i \leqslant j}} k_{ij}.$$

Там же устанавливается связь между природой результатов из [34] и смыслом последовательности $\Gamma(G, D)$. Показано, в частности, что главный результат [34] получается как прямое следствие теоремы 17.6.

Гипотеза 17.8 [32]. Последовательность (8) является потенциально s-связной ($s > 2$) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим условиям:

1) $d_1 \geqslant s$, $K(R)$ — s-реберно-связный граф;

2) для любого непустого подмножества $I_1 \subseteq I$ такого, что $l(I_1) \geqslant s - 1$, выполняется неравенство $\mathrm{com}(H(I \setminus I_1)) \leqslant k(I_1) - l(I_1) + k(I_1, I \setminus I_1) + s - A + (s-1)(s-2)/2$, где $H = K[R]$, $I_1 = \{j_1 < \ldots < j_k\}$, A — сумма первых $s-1$ членов последовательности $\underbrace{d_{j_k}, \ldots, d_{j_k}}_{l(j_k)}, \ldots, \underbrace{d_{j_1}, \ldots, d_{j_1}}_{l(j_1)}$.

Теорема 17.9 [29]. Последовательность (8) имеет 2-реберно-связную реализацию, если и только если $d_1 \geqslant 2$, а граф $K(R)$ — 2-реберно-связный.

Проблема 17.10. Охарактеризовать потенциально s-реберно-связные последовательности пар.

Перейдем к самодополнительным реализациям. Самодополнительность — единственное нетривиальное свойство P, для которого охарактеризованы потенциально P-графические и вынужденно P-графические, вершинные и реберные последовательности. Арифметическая характеризация потенциально и вынужденно самодополнительных реберных последовательностей получена независимо в [30, 31, 84]. Доказательства в [30, 31] приводят к эффективным алгоритмам построения самодополнительных реализаций. В качестве следствия в [30] и [84] получены альтернативные характеризации вынужденно самодополнительных вершинных степенных последовательностей.

Следствие 17.11 [30]. Вынужденно самодополнительная реберная последовательность (8), как и вынужденно самодополнительная вершинная последовательность $(d_1^{l_1}, d_2^{l_2}, \ldots, d_n^{l_n})$, $d_1 < \ldots < d_n$, имеют ровно $2^{-[n/2]} \times \prod_{i=1}^{[n/2]} l_i$ неизоморфных реализаций.

Ж. А. Черняк [26] получила также описание вынужденно 0-циклических и вынужденно двудольных реберных последовательностей. С этой целью разработан подход, суть которого состоит в следующем. Вводятся вспомогательные (параметрические) графы $K_u[R]$ и $K_{up}[R]$. $K_u[R]$ совпадает с $K[R]$ (или $K[R] \setminus \{1\}$), если $d_1 > 1$ ($d_1 = 1$). $K_{up}[R]$ строится по следующему правилу: если $d_i = 2$, $l_i = k_{ii} + 1$, $2 \leqslant l_i \leqslant 3$, и в графе $K_u[R]$ вершина i смежна ровно с двумя вершинами i_1, i_2 ($i_1 \neq i_2$), то $K_{up}[R]$ получается из $K_u[R]$ удалением вершины i и добавлением цепи длины k_{11}, концевые вершины которой смежны с i_1 и i_2 соответственно; в остальных случаях $K_{up}[R]$ совпадает с $K_u[R]$. Затем устанавливается связь между циклической структурой параметрических графов и исследуемыми свойствами реализаций последовательности (8). Окончательные теоремы содержат условия двух типов: часть из них связывает параметры последовательности (8), тогда как остальные определяют циклическую структуру параметрических графов.

Теорема 17.12 [26]. Графическая последовательность (8) вынужденно 0-циклическая, если и только если она удовлетворяет следующим условиям (i, j, $r \neq 1$ при $d_1 = 1$):

1) если $k_{ii} \neq 0$, то $k_{ir} \leqslant 1$ для $r \neq i$;
2) если $l_i \geqslant 2$, $k_{ir} \geqslant 2$, $r \neq i$, то $k_{ij} \leqslant 1$ для $j \neq r, i$;
3) $k_{ii} \leqslant 2$ для всех i;
4) если $l_i \geqslant 2$, $l_j \geqslant 2$, $i \neq j$, то $k_{ij} \leqslant 3$;
5) граф $K_u[R]$ не имеет циклов.

Теорема 17.13 [26]. Графическая последовательность (8) является вынужденно двудольной, если и только если она удовлетворяет следующим условиям (i, j, $r \neq 1$, если $d_1 = 1$):

1) если $k_{ii} \neq 0$ и высказывание $(d_i > 2) \vee (((k_{ii} \neq 2) \vee (l_i \neq 3)) \wedge ((k_{ii} \neq 4) \vee (l_i \neq 4)))$ истинно, то $k_{ii} \leqslant 2$, $k_{ir} \leqslant 1$ для $r \neq i$;

2) граф $K_{up}[R]$ двудольный и истинно высказывание (j принадлежит некоторому циклу в $K_u[R]$, $k_{jj} \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} d_j = 2, \ 2 \leqslant l_j \leqslant 3, \\ l_j = k_{jj} + 1 \end{pmatrix}$.

Как следствие теоремы 17.12 в [26] приведен алгоритм с полиномиальной временной оценкой. проверяющий, является ли последовательность (8) потенциально k-циклической, $k \in \{0,1\}$, и при положительном ответе строящий k-циклическую реализацию. Там же выведена формула для подсчета числа реализаций вынужденно древесной реберной последовательности, в связи с которой напомним следующее утверждение.

Утверждение 17.14 [129]. Любая вынужденно древесная вершинная степенная последовательность является униграфической и имеет вид $(n_1, n_2, 1^{n_1+n_2})$.

18. i-последовательности

Пусть $c_i = (d_{i1}, \ldots, d_{in_i})$ — последовательность целых положительных чисел. Тогда последовательность D_1 вида

$$D_1 = (c_1, \ldots, c_n) \tag{9}$$

называется 1-последовательностью. Последовательность (9) называется графической, если существует n-вершинный граф — реализация (9) — с вершинами $v_1, \ldots, v_n$ такой, что для каждого i список степеней вершин из $N(v_i)$ совпадает с c_i. Очевидно, 1-последовательность графа определяет его реберную и вершинную последовательности и потому информативнее последних.

Как составная часть теории степенных последовательностей графические 1-последовательности стали изучаться с 1983 г., хотя имеются более ранние упоминания о них (например, в [137]). Уже получено несколько важных отправных результатов об 1-последовательностях, о чем и пойдет речь ниже.

Пусть $\{d_1, \ldots, d_k\}$ — степенное множество графа G, $VG = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $W_j = \{v_i : \deg v_i = d_j\}$, $t^j(v) = |W_j \cap N(v)|$, $j = \overline{1, k}$, $t_G(v) = (t^1(v), \ldots, t^k(v))$. Следуя Мейчер [145, 148], матрицу размеров $k \times n$, i-й столбец которой совпадает с $t_G(v_i)$, назовем распределительной матрицей графа G. Матрицу M назовем графической, если существует граф с распределительной матрицей M.

Вернемся теперь к последовательности (9), которую будем называть правильной, если $\{d_{11}, \ldots, d_{1n_1}, \ldots, d_{n1}, \ldots, d_{nn_n}\} \subseteq \{|c_1|, \ldots, |c_n|\}$. Перепишем (9) в виде $D_1 = (c_{11}, \ldots, c_{1l_1}, \ldots, c_{h_1}, \ldots, c_{kl_k})$, где $l_1 + \ldots + l_k = n$, $|c_{ij}| = d_i$, $j = \overline{1, l_i}$, $0 < d_1 < \ldots < d_k$. Пусть t_{ij}^s — кратность вхождения d_s в последовательность c_{ij}. Определим $k \times n$-матрицу

$$M_1 = \begin{bmatrix} \ldots t_{i1}^1 \ldots t_{il_i}^1 \ldots \\ \vdots \qquad \vdots \\ \ldots t_{i1}^k \ldots t_{il_i}^k \ldots \end{bmatrix}, \qquad (10)$$

где $\sum_{s=1}^{k} t_{ij}^s = d_i$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, l_i}$.

Теперь очевидна теорема.

Теорема 18.1 [145, 148]. Следующие утверждения эквивалентны:

1) правильная последовательность (9) графическая;

2) матрица (10) графическая;

3) последовательности $(t_{i1}^i, \ldots, t_{il_i}^i)$ $i = \overline{1, k}$, и пары последовательностей $((t_{q1}^j, \ldots, t_{ql_q}^j); (t_{j1}^q, \ldots, t_{jl_j}^q))$ графические.

Ж. А. Черняк перенесла свой метод исследования потенциально связных реберных последовательностей (см. разд. 17) на 1-последовательности. При этом получены условия потенциальной связности графических 1-последовательностей и алгоритмы решения соответствующих задач с полиномиальной временной оценкой.

Проблема 18.2. Описать 1-униграфы — графы, однозначно определяемые своими 1-последовательностями.

И. Э. Зверович [4, 5] ввел понятие графической i-последовательности, обобщающее 1-последовательности. i-последовательность графа — это список i-степеней его вершин. Под i-степенью вершины v $(i \geqslant 1)$ подразумевается список $(i-1)$-степеней вершин из $N(v)$, под 0-степенью — $\deg v$. Задание i-последовательностей непосредственно по определению неприемлемо ввиду экспоненциального роста их длин. Однако они могут быть заданы в эквивалентной форме по аналогии с 1-последовательностями распределительными i-матрицами M_i, которые индуктивно строятся следующим образом. Пусть уже построена распределительная $(i-1)$-матрица

$$M_{i-1} = \begin{bmatrix} \ldots t_{j1}^1 \ldots t_{jl_j}^1 \ldots \\ \vdots \qquad \vdots \\ \ldots t_{i1}^l \ldots t_{jl_j}^l \ldots \end{bmatrix}$$

графа G, причем столбцы в каждой субматрице

$$M_{i-1}^j = \begin{bmatrix} t_{j1}^1 \ldots t_{jl_j}^1 \\ \vdots \qquad \vdots \\ t_{j1}^l \ldots t_{jl_j}^l \end{bmatrix} \qquad (j = \overline{1, l})$$

расположены в порядке лексикографического неубывания (нумерация вершин графа G соответствует нумерации столбцов в M_{i-1}). Пусть также $VG = \{v_1, \ldots, v_n\} = \bigcup_{q=1}^{r} W_q$ — разбиение на классы эквивалентности относительно отношения $\sim$: $v_t \sim v_s$, если и только если s- и t-й столбцы матрицы M_{i-1} совпадают и принадлежат некоторой субматрице M_{i-1}^j. Считаем, что W_q занумерованы в порядке возрастания номеров принадлежащих им вершин. Положим

$$r_q = |W_q|, \quad q = \overline{1, r}, \quad t^j(v_s) = |W_j \cap N(v_s)|,$$

$$j = \overline{1, r}, \; t_G(v_s) = (t^1(v_s), \ldots, t^r(v_s)).$$

Тогда

$$M_i = [t_G(v_1)^T, \ldots, t_G(v_n)^T] = \begin{bmatrix} \ldots \bar{t}_{j1}^1 \ldots \bar{t}_{jr_j}^1 \ldots \\ \vdots \qquad \vdots \\ \ldots \bar{t}_{j1}^r \ldots \bar{t}_{jr_j}^r \ldots \end{bmatrix}$$

(без ограничения общности считаем, что в каждой субматрице

$$M_i^j = \begin{bmatrix} \bar{t}_{j1}^1 \ldots \bar{t}_{jr_j}^1 \\ \vdots \qquad \vdots \\ \bar{t}_{j1}^r \ldots \bar{t}_{jr_j}^r \end{bmatrix}$$

столбцы уже расположены в порядке лексикографического неубывания).

Очевидно, что, начиная с некоторого s, $M_s = M_{s+1} = \ldots$. Положим $M_\infty = M_s$. В [5] описаны графы, однозначно определяемые своими матрицами M_∞.

Замечание. Процедура построения i-матриц идентична известной процедуре «наивной классификации вершин», используемой в задачах распознавания изоморфизма графов [8].

Метагипотеза 18.3. Решение некоторого классического теоретикографового вопроса для 1-последовательностей автоматически влечет (в аналогичных формулировках и теми же средствами) решение этого же вопроса для i-последовательностей.

19. Дополнительные вопросы

Менее традиционными по сравнению с вершинными и реберными последовательностями являются дистанционные и маршрутные степенные последовательности графа G (сокращенно $DDS(G)$ и $PDS(G)$), а также связанная с ними проблематика [54, 55, 66, 117, 118, 126, 134, 158, 159, 177, 178, 181]. Развитие этих исследований стимулировано их прикладным значением в химии.

Дистанционной и маршрутной степенями вершины v_i в G называются соответственно наборы $(d_{i0}, d_{i1}, \ldots, d_{ij}, \ldots)$, $(p_{i0}, p_{i1}, \ldots, p_{ij}, \ldots)$, где d_{ij} — число вершин в G, удаленных от v_i на расстояние j, p_{ij} — число простых цепей длины j с начальной

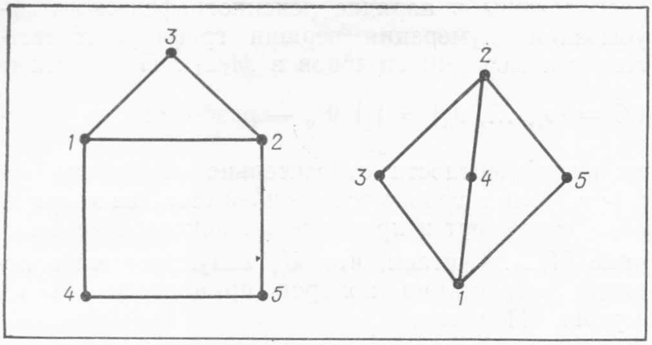

Рис. 6

вершиной v_i, $DDS\,(G)$ и $PDS\,(G)$ — списки лексикографически упорядоченных дистанционных и маршрутных степеней вершин графа G соответственно. Отметим, что $DDS\,(G)$ не определяет реберную последовательность графа G. Например, графы, изображенные на рис. 6, имеют совпадающие дистанционные степенные последовательности, хотя их реберные последовательности различны.

Достижения и проблематика по этим вопросам наиболее полно отражены в обзорах [55, 177].

Бауэр, Блюм и Буш [41] ввели понятие реберно-вершинной степенной последовательности как списка реберно-вершинных степеней $\deg e_i$ его ребер e_i, где $\deg e_i = |\,N\,(v_s) \cup N\,(v_j)\,|$, $e_i = v_s v_j$. Ими же рассмотрены реализации этих последовательностей с некоторыми предписанными свойствами.

Граф, у которого для каждого ребра $e = vw\,|\deg v - \deg w\,| = \mu$, называется μ-дифферентным графом (μ-графом). Ачарья и Вартак [33] изучали μ-графы и степени их вершин в связи с вопросом X. Закса о существовании связных μ-графов. Очевидно, если последовательность

$$d_1^{l_1}, \ldots, d_n^{l_n}, \qquad 0 < d_1 < \ldots < d_n, \tag{11}$$

является вершинной степенной последовательностью некоторого μ-графа, то его реберная последовательность

$$R = (d_1, d_2)^{k_{12}}, \ldots, (d_{n-1}, d_n)^{k_{n-1,n}} \tag{12}$$

удовлетворяет условиям

$$k_{12} = l_1 d_1 \leqslant l_1 l_2,\ k_{n-1,n} = l_n d_n \leqslant l_{n-1} l_n,$$

$$k_{i-1,i} \leqslant l_{i-1} l_i,\ k_{i,i+1} + k_{i-1,i} = l_i d_i, \qquad i = \overline{2, n-1};$$

$$d_i = d_1 + \mu\,(i-1), \qquad i = \overline{1, n}. \tag{13}$$

Верно и обратное: если последовательность пар целых чисел R удовлетворяет условиям (12) и (13), то любая ее реализация является μ-графом с вершинной последовательностью (11) (см. разд. 17), поэтому вопрос о реализуемости последовательности (11) μ-графом со свойством P сводится к задаче о реализуемости последовательности (12) с условиями (13) обыкновенным графом со свойством P. Нужные теоремы для μ-графов получаются проецированием соответствующих теорем о потенциально P-графических реберных последовательностях. Часто это влечет упрощение формулировки результата; примером может служить следующая теорема.

Теорема 19.1 (Ж. А. Черняк). Пусть $n \geqslant 2$. Последовательность (11) реализуема 2-связным μ-графом, если и только если

$$d_1 \geqslant 2,\ k_{i,i+1} \geqslant 2,\ i = \overline{1, n-1};$$

$$l_j \geqslant 2,\ j = \overline{2, n-1},$$

и выполняются условия (13).

Поступила 17.11.86

Программные средства, имеющиеся в Фонде алгоритмов и программ АН УССР

(252207 Киев, просп. Академика Глушкова, 20. Тел. 266-35-69)

УДК 519

Бабко Л. Д., Цымбал В. М.

Методический материал по документированию программ.— СКТБ ПО ИК АН УССР, Киев, 1988.— 77 с.— **Инв. № АПО206—И.**

Методический материал предназначен для упрощения процесса документирования программных средств. Материал представляет собой изложение четырехуровневой модели документирования программ, являющейся совершенствованием модельного метода документирования Д. Уолш. Список литературы состоит из 14 источников.

Документ состоит из введения, пяти разделов, шести приложений и списка литературы по документированию программ. В первом разделе даны общие сведения о документировании программ, Во втором изложены требования к содержанию программных документов. Третий раздел посвящен рекомендациям по объединению программных документов. В четвертом разделе описаны требования к оформлению программных документов, в пятом приведен перечень типичных ошибок документирования программ.