КИБЕРНЕТИКА

№2 МАРТ–АПРЕЛЬ 1988 ВСЕСОЮЗНЫЙ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА «ИНСТИТУТ КИБЕРНЕТИКИ им. В. М. ГЛУШКОВА»

ОСНОВАН В ЯНВАРЕ 1965 ГОДА
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
КИЕВ НАУКОВА ДУМКА

УДК 519.1

Р. И. ТЫШКЕВИЧ, А. А. ЧЕРНЯК, Ж. А. ЧЕРНЯК

ГРАФЫ И СТЕПЕННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. II[1]

2. МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦИИ

Одним из перспективных методов изучения графических последовательностей представляется метод декомпозиции, разработанный Р. И. Тышкевич [12]. Теория декомпозиции оказалась удобной для изучения вынужденной P-графичности (см. разд. 9). Особенно эффективно она применяется при решении классификационных вопросов (разд. 5—8).

3. Расщепление последовательности

Фолдес и Хаммер [101] и независимо Р. И. Тышкевич и А. А. Черняк [16] ввели важный класс графов — расщепляемые. Граф G называется расщепляемым, если существует такое разбиение

$$VG = A \cup B, \quad A \cap B = \varnothing, \tag{1}$$

что A — клика, B — независимое множество, т. е. порожденные подграфы $G(A)$ и $G(B)$ являются полным и пустым соответственно. Разбиение (1) называется полярным, а его части A и B — верхней и нижней долями графа G соответственно. Полярное разбиение не определяется графом однозначно, и такой граф удобно рассматривать вместе с фиксированными верхней и нижней долями. Триада (G, A, B), где G, A и B такие, как выше, также называется расщепляемым графом. Одна из долей может быть пустой, $(K_n, A, \varnothing)$ и $(O_n, \varnothing, B)$ — полный и пустой расщепляемые графы; обозначим их $(K_n, A, \varnothing) = K_n$, $(O_n, \varnothing, B) = O_n$. Пусть

$$(G, A, B), \ (H, C, D) — \tag{2}$$

расщепляемые графы, $\varphi : VG \to VH$ — изоморфизм графов G и H. Если φ сохраняет доли, т. е. $\varphi(A) = C$ (и, следовательно, $\varphi(B) = D$), то он называется полярным изоморфизмом расщепляемых графов (2). Не всякий изоморфизм графов G и H является поляр-

[1] Первая часть с литературой опубликована в журнале «Кибернетика», 1987, № 6. Продолжение следует.

ным, однако если $G \cong H$ и $|A| = |C|$, то существует полярный изоморфизм расщепляемых графов (2) [12].

Класс расщепляемых графов интересен по следующим по крайней мере трем причинам.

1. Некоторые задачи, безнадежные в общей ситуации, поддаются решению в этом классе.

2. Некоторые сложные в общей ситуации проблемы остаются сложными и в классе расщепляемых графов, так что это достаточно содержательный класс. Например, проблема распознавания изоморфизма графов полиномиально эквивалентна проблеме распознавания полярного изоморфизма расщепляемых графов [8].

3. Введение расщепляемых графов позволило построить теорию декомпозиции [12].

Кроме того, отметим еще два факта.

Теорема 3.1 [43]. Почти все хордальные графы расщепляемы.

Утверждение 3.2 [121]. Все расщепляемые графы совершенны.

В [101, 102] приведены следующие характеризации расщепляемых графов.

Теорема 3.3. 1. Граф расщепляем, если и только если он не содержит $2K_2$, C_4 и C_5 в качестве порожденных подграфов.

2. Граф G расщепляем, если и только если и G, и дополнительный граф $\overline{G}$ являются хордальными.

В [12] и независимо в [121] доказано, что расщепляемость — это вынужденное свойство графической последовательности, т. е. все ее реализации одновременно либо расщепляемы, либо нет.

Теорема 3.4 [12]. Пусть d — графическая последовательность, G — ее расщепляемая реализация, (1) — полярное разбиение множества VG. Представим последовательность d в виде

$$d = (d_A; d_B), \tag{3}$$

где d_A и d_B — списки степеней вершин из A и из B соответственно. Тогда каждая реализация последовательности d является расщепляемым графом, для множества вершин которого существует полярное разбиение, соответствующее разбиению (3).

Таким образом, возникают понятия расщепляемой графической последовательности и ее полярного разбиения (3).

Критерий расщепляемости последовательности получили независимо Р. И. Тышкевич, О. И. Мельников и В. М. Котов [14] и Хаммер и Симеоне [121].

Теорема 3.5. 1. [14]. Правильная графическая последовательность

$$d = (d_1, \dots, d_n) \neq (0^n) \tag{4}$$

расщепляема, если и только если для какого-либо $k = \overline{1, n}$

$$\sum_{i=1}^{k} d_i = k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} d_i. \tag{5}$$

2. [121]. Правильная графическая последовательность d расщепляема, если и только если равенство (5) верно при $k = m(d)$ (см. разд. 2).

Тестирование расщепляемости на основе этого критерия требует $O(n)$ элементарных операций.

Определенный интерес представляет мера удаленности исследуемого графа от расщепляемого. В [121] введено число $\sigma(G)$ (расщепление графа G) — минимальное число ребер, устранение или добавление которых превращает граф G в расщепляемый. Это число также является инвариантом графической последовательности: оно равно полуразности правой и левой частей m-го НЭГ.

Утверждение 3.6 [121]. Для правильной графической последовательности d вида (4)

$$\sigma(d) = \frac{1}{2}\left(m(m-1) - \sum_{i=1}^{m} d_i + \sum_{i=m+1}^{n} d_i\right),$$

где $m = m(d)$.

4. Декомпозиция

Пусть $\mathcal{P}$ — множество расщепляемых графов, различаемых до полярного изоморфизма, $\mathcal{Y}$ — множество всех графов, различаемых до графового изоморфизма. Введем композицию $\circ : \mathcal{P} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ следующим образом: если $(G, A, B) \in \mathcal{P}$, $H \in \mathcal{Y}$ и $VG \cap VH = \varnothing$, то $(G, A, B) \circ H = G \cup H \cup K_{A,VH}$, где $\cup$ — знак объединения графов. Композиция введена в [16] и детально изучена в [12].

Если H расщепляем и $(H, C, D) \in \mathcal{P}$, то и

$$F = (G, A, B) \circ H \tag{6}$$

также оказывается расщепляемым с верхней долей $A \cup C$ и нижней $B \cup D$. В этой ситуации положим

$$(G, A, B) \circ (H, C, D) = ((G, A, B) \circ H,\ A \cup C,\ B \cup D).$$

Таким образом, композиция $\circ$ индуцирует на $\mathcal{P}$ бинарную алгебраическую операцию, для которой сохраняются те же название и обозначение.

Граф F называется разложимым, если его можно представить в виде композиции (6). В противном случае F неразложим. Как показано в [12], разложимость является вынужденным свойством графической последовательности. Верно утверждение 4.1.

Утверждение 4.1. Пусть d — графическая последовательность, (6) — ее разложимая реализация, $VF = A \cup B \cup C$ — соответствующее разбиение. Представим d в виде

$$d = (d_A, d_B; d_C), \tag{7}$$

где d_X — список степеней вершин из X. Тогда каждая реализация F' последовательности d является разложимым графом, соответствующим разложению (7), т. е. $F' = (G', A', B') \circ H'$, где $G' = F'(A' \cup B')$, $H' = F'(C')$, $C' = VF' \setminus (A' \cup B')$, d_A, d_B и d_C —

списки степеней вершин из A', B' и C' соответственно.

Теперь корректно следующее определение композиции последовательностей [12]. Пусть (d_A; d_B) — расщепляемая последовательность, (G, A, B) — ее реализация, c — произвольная графическая последовательность с реализацией H, f — степенная последовательность графа $(G, A, B)\circ H$, тогда положим $(d_A; d_B)\circ c = f$. Итак, возникают понятия разложимой и неразложимой графических последовательностей.

Теорема декомпозиции [12]. Всякий граф G однозначно представляется в виде

$$G = X_1 \circ \ldots \circ X_n \circ Y, \quad n \geqslant 0, \tag{8}$$

где $X_i = (G_i, A_i, B_i) \in \mathcal{P}$ и графы G_i и Y неразложимы. Аналогичное верно и для графических последовательностей.

Разложение (8) называется каноническим. Компоненты, входящие в каноническое разложение графической последовательности, называются ее неразложимыми компонентами. Взяв для каждой из них произвольную реализацию и соединив эти реализации в соответствующем порядке посредством операции $\circ$, получим произвольную реализацию исходной последовательности. Критерий разложимости графической последовательности получен в [14].

Теорема 4.2. Правильная графическая последовательность

$$d = (d_1, \ldots, d_n) \tag{9}$$

разложима, если и только если существуют натуральные k и l, удовлетворяющие условиям:

$$\sum_{i=1}^{k} d_i = k(n - l - 1) + \sum_{i=n-l+1}^{n} d_i, \quad 0 < k + l < n.$$

Для получения алгоритма, строящего каноническое разложение графической последовательности, удобно уточнить предыдущий критерий следующим образом.

Лемма 4.3. Пусть (9) — графическая последовательность, $m(d)$ и $s(d) = (s_1, \ldots, s_n)$ — такие, как в разд. 2, $i(t) = \min\{i : d_i < t\}$, тогда последовательность d разложима, если и только если существует такое $t \leqslant m(d)$, что $\sum_{i=1}^{t} d_i = \sum_{i=1}^{t} s_i$. Если последнее равенство верно, то $d = (d_A; d_B)\circ d_c$, где $d_A = (d_1 - l + t + 1, \ldots, d_t - l + t + 1)$, $l = l(t)$, $d_B = (d_l, \ldots, d_n)$, $d_C = (d_{t+1} - t, \ldots, d_{l-1} - t)$ (при $l(t) = t + 1$, $d = (d_A; d_B)$).

Лемма 4.4. Для последовательности (9) вектор $s(d)$ строится посредством $O(n)$ элементарных операций.

Из двух предыдущих лемм вытекает следствие 4.5.

Следствие 4.5. Каноническое разложение последовательности (9) и проверка ее расщепляемости осуществляются посредством $O(n)$ элементарных операций.

Теорема декомпозиции позволяет сводить многие вопросы о графах и графических последовательностях к неразложимому случаю. Для этого нужно, чтобы рассматриваемые свойства графов были наследственны по отношению к композиции или подвергались легко обозримым изменениям.

Замечание. Развивая идеи из [12], Р. И. Тышкевич и А. А. Черняк [17] разработали общую теорию декомпозиции графов, которая уже не сохраняется для степенных последовательностей.

5. Униграфы

Если все реализации графической последовательности изоморфны, то она называется униграфической, а ее реализация — униграфом. Униграфы — исторически первый класс, получивший исчерпывающее описание на базе метода декомпозиции [16]. Хотя общая теория декомпозиции тогда еще не была осознана и появилась позднее [12], однако понятие композиции введено и использовано для описания униграфов в [16].

Проблема униграфичности имеет два аспекта. Первый — распознавание униграфичности — эффективно решили Клейтман и Ли [135], Ли [144] и Корин [138—139]. Позднее Дас [83] получил еще одну характеризацию униграфических последовательностей. Второй аспект — описание строения униграфов — начат Р. Джонсоном [128], доказавшим, в частности, следующие четыре утверждения.

Утверждение 5.1. r-регулярный граф порядка n является униграфом, если и только если $r \in \{0, 1, n - 2, n - 1\}$.

Утверждение 5.2. Дерево является униграфом, если и только если его диаметр не превышает трех.

Утверждение 5.3. Непустой несвязный граф является униграфом, если и только если он имеет вид $K_{1,n} \cup mK_2$ — объединение непересекающихся звезды $K_{1,n}$ и паросочетания mK_2.

Утверждение 5.4. Для любых натуральных чисел m и n при условии $m \leqslant \binom{n}{2}$ существует униграф порядка n с m ребрами.

Исчерпывающее описание и перечисление униграфов получены в [16]. Из этого описания прямо вытекают все результаты цитированных выше работ об униграфах, а также более поздней статьи Р. Джонсона [129].

Теорема 5.5 [16]. Граф G является униграфом, если и только если он имеет вид

$$G = X_1 \circ \ldots \circ X_n \circ Y, \tag{10}$$

где:

1) X_i — расщепляемый граф одного из следующих типов:

а) $X_i = K_1$;

списки степеней вершин из A', B' и C' соответственно.

Теперь корректно следующее определение композиции последовательностей [12]. Пусть $(d_A; d_B)$ — расщепляемая последовательность, (G, A, B) — ее реализация, c — произвольная графическая последовательность с реализацией H, f — степенная последовательность графа $(G, A, B) \circ H$, тогда положим $(d_A; d_B) \circ c = f$. Итак, возникают понятия разложимой и неразложимой графических последовательностей.

Теорема декомпозиции [12]. Всякий граф G однозначно представляется в виде

$$G = X_1 \circ \ldots \circ X_n \circ Y, \quad n \geqslant 0, \tag{8}$$

где $X_i = (G_i, A_i, B_i) \in \mathcal{P}$ и графы G_i и Y неразложимы. Аналогичное верно и для графических последовательностей.

Разложение (8) называется каноническим. Компоненты, входящие в каноническое разложение графической последовательности, называются ее неразложимыми компонентами. Взяв для каждой из них произвольную реализацию и соединив эти реализации в соответствующем порядке посредством операции $\circ$, получим произвольную реализацию исходной последовательности. Критерий разложимости графической последовательности получен в [14].

Теорема 4.2. Правильная графическая последовательность

$$d = (d_1, \ldots, d_n) \tag{9}$$

разложима, если и только если существуют натуральные k и l, удовлетворяющие условиям:

$$\sum_{i=1}^{k} d_i = k(n - l - 1) + \sum_{i=n-l+1}^{n} d_i, \quad 0 < k + l < n.$$

Для получения алгоритма, строящего каноническое разложение графической последовательности, удобно уточнить предыдущий критерий следующим образом.

Лемма 4.3. Пусть (9) — графическая последовательность, $m(d)$ и $s(d) = (s_1, \ldots, s_n)$ — такие, как в разд. 2, $i(t) = \min\{i : d_i < t\}$, тогда последовательность d разложима, если и только если существует такое $t \leqslant m(d)$, что $\sum_{i=1}^{t} d_i = \sum_{i=1}^{t} s_i$. Если последнее равенство верно, то $d = (d_A; d_B) \circ d_c$, где $d_A = (d_1 - l + t + 1, \ldots, d_t - l + t + 1)$, $l = l(t)$, $d_B = (d_l, \ldots, d_n)$, $d_C = (d_{t+1} - t, \ldots, d_{l-1} - t)$ (при $l(t) = t + 1$, $d = (d_A; d_B)$).

Лемма 4.4. Для последовательности (9) вектор $s(d)$ строится посредством $O(n)$ элементарных операций.

Из двух предыдущих лемм вытекает следствие 4.5.

Следствие 4.5. Каноническое разложение последовательности (9) и проверка ее расщепляемости осуществляются посредством $O(n)$ элементарных операций.

Теорема декомпозиции позволяет сводить многие вопросы о графах и графических последовательностях к неразложимому случаю. Для этого нужно, чтобы рассматриваемые свойства графов были наследственны по отношению к композиции или подвергались легко обозримым изменениям.

Замечание. Развивая идеи из [12], Р. И. Тышкевич и А. А. Черняк [17] разработали общую теорию декомпозиции графов, которая уже не сохраняется для степенных последовательностей.

5. Униграфы

Если все реализации графической последовательности изоморфны, то она называется униграфической, а ее реализация — униграфом. Униграфы — исторически первый класс, получивший исчерпывающее описание на базе метода декомпозиции [16]. Хотя общая теория декомпозиции тогда еще не была осознана и появилась позднее [12], однако понятие композиции введено и использовано для описания униграфов в [16].

Проблема униграфичности имеет два аспекта. Первый — распознавание униграфичности — эффективно решили Клейтман и Ли [135], Ли [144] и Корин [138—139]. Позднее Дас [83] получил еще одну характеризацию униграфических последовательностей. Второй аспект — описание строения униграфов — начат Р. Джонсоном [128], доказавшим, в частности, следующие четыре утверждения.

Утверждение 5.1. r-регулярный граф порядка n является униграфом, если и только если $r \in \{0, 1, n-2, n-1\}$.

Утверждение 5.2. Дерево является униграфом, если и только если его диаметр не превышает трех.

Утверждение 5.3. Непустой несвязный граф является униграфом, если и только если он имеет вид $K_{1,n} \cup mK_2$ — объединение непересекающихся звезды $K_{1,n}$ и паросочетания mK_2.

Утверждение 5.4. Для любых натуральных чисел m и n при условии $m \leqslant \binom{n}{2}$ существует униграф порядка n с m ребрами.

Исчерпывающее описание и перечисление униграфов получены в [16]. Из этого описания прямо вытекают все результаты цитированных выше работ об униграфах, а также более поздней статьи Р. Джонсона [129].

Теорема 5.5 [16]. Граф G является униграфом, если и только если он имеет вид

$$G = X_1 \circ \ldots \circ X_n \circ Y, \tag{10}$$

где:

1) X_i — расщепляемый граф одного из следующих типов:

а) $X_i = K_1$;

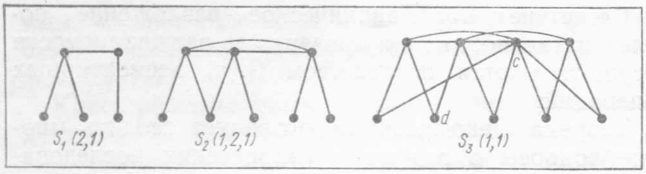

Рис. 2

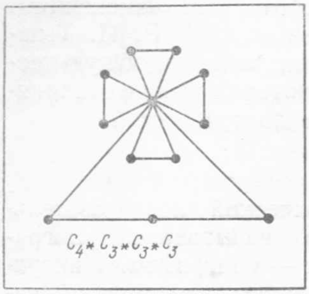

Рис. 3

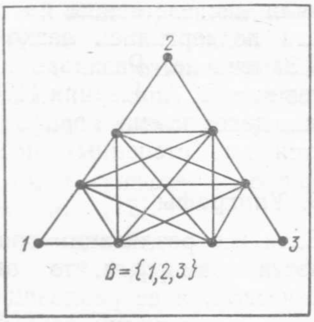

Рис. 4

б) $X_i = (G_i, A, B) = S_1(n_1, \dots, n_l) = K_{1,n_1} \cup \dots \cup K_{1,n_l} \cup K(A)$ — объединение попарно непересекающихся звезд K_{1,n_l} и полного графа $K(A)$ на множестве центральных вершин этих звезд; при этом $n_i \geqslant 1$, $l > 1$; при $n_i = 1$ только один конец ребра $K_{1,1}$ включается в A (рис. 2);

в) $X_i = S_2(n, l, m)$ — граф, получающийся из $S_1(\underbrace{n, \dots, n}_{l}, \underbrace{n+1, \dots, n+1}_{m})$ присоединением новой нижней вершины d, смежной с первыми l верхними вершинами; $n, m \geqslant 1$, $l > 1$ (рис. 2);

г) $X_i = S_3(n, m)$ — граф, получающийся из $S_2(n, 2, m)$ присоединением новой верхней вершины c, смежной с каждой, кроме d, вершиной (рис. 2);

д) $X_i = (G_i - K(A) + K(B), B, A)$, где (G_i, A, B) — граф, описанный в пп. а) — г), $G_i - K(A) + K(B)$ получается из G_i удалением всех ребер, соединяющих вершины из A, и присоединением всех ребер, соединяющих вершины из B;

е) $X_i = (\overline{G}_i, B, A)$, где (G_i, A, B) — один из описанных выше графов;

2) Y — либо один из описанных выше, либо один из следующих графов:

а) простой цикл C_5;

б) «ветряная мельница» $C_4 * \underbrace{C_3 * \dots * C_3}_{m}$ — простой цикл C_4 и $m \geqslant 1$ треугольников, «склеенные» в одной вершине (рис. 3);

в) $K_{1,n} \cup mK_2$, $n, m \geqslant 1$ (см. утверждение 5.3);

г) дополнительные графы к описанным в пп. б), в).

Представление (10) определено однозначно.

Следствие 5.6 [129]. Диаметр связного униграфа не превышает трех, радиус — двух.

Из теоремы 5.5 вытекает также, что гипотеза из обзора [129] не верна. Одним из многих контрпримеров является композиция $F = (G, A, B) \circ C_5$, где (G, A, B) — расщепляемый граф, изображенный на рис. 4.

Эта же теорема позволила перечислить униграфы в соответствии с числом вершин.

Теорема 5.7 [16]. Пусть $p(n)$ и $d(n)$ — количества разбиений и натуральных делителей числа n соответственно,

$$\alpha_n = \begin{cases} -8 \text{ для четного } n, \\ 1 \text{ для нечетного } n, \end{cases}$$

$$h_n = \begin{cases} n \text{ для четного } n, \\ n-3 \text{ для нечетного } n; \end{cases}$$

$$c_n = 4(p(n) - p(n-1) - d(n-1)) + n + \alpha_n,$$

$$c(x) = 2x + x^4 + \sum_{n=5}^{\infty} c_n x^n, \quad h(x) = 2x^4 + 3x^5 + \sum_{n=6}^{\infty} h_n x^n.$$

Тогда ряд $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n = \dfrac{c(x) - x + h(x)}{1 - c(x)}$ перечисляет униграфы в соответствии с числом вершин (u_n — число униграфов порядка n).

Каждый граф порядка n с $n \leqslant 4$ является униграфом, но $u_5 = 28$, а число всех графов порядка пяти равно 34. Неожиданно этот класс графов оказался обширным, из теоремы 5.7 вытекает следствие 5.8.

Следствие 5.8 [16]. $(2{,}3)^{n-2} \leqslant u_n \leqslant (2{,}6)^n$.

На основе теоремы 5.5 составлен каталог планарных униграфов [19]. Ранее несколько примеров планарных униграфов отметил Фаррел [100]. Ж. А. Черняк [24] с помощью теоремы 5.5 описала гамильтоновы униграфы.

Из теоремы 5.5 вытекает также, что свойство униграфичности графической последовательности длины n распознается за время $O(n)$.

6. Пороговые графы

Известен целый ряд свойств графов, которые распознаются по степенным последовательностям. Выше отмечались свойства расщепляемости и разложимости графа. Следующее хорошо распознаваемое свойство — пороговость. Пусть G — граф с множеством вершин $\{1, \dots, n\}$. Для каждого подмножества U в VG определим характеристический вектор

$$x_u = (x_1, \dots, x_n), \quad x_i \begin{cases} = 1, \text{ если } i \in U, \\ = 0, \text{ если } i \notin U. \end{cases}$$

Если существуют вещественные числа $a_1, \dots, a_n$, b такие, что для x_u $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \leqslant b$ тогда и только тогда, когда U — независимое множество вершин графа G, то граф G называется пороговым.

Пороговые графы независимо рассматривались разными авторами и изучены досконально [77, 78, 125, 110, 122, 119, 120, 153].

В [77, 78] доказана (в других терминах) следующая теорема.

Теорема 6.1. Граф G является пороговым тогда и только тогда, когда он представим в виде композиции $G = X_1 \circ \ldots \circ X_n$ $(n \geqslant 1)$, где $X_i = K_1$ или O_1.

Следствие 6.2 [77, 78]. Пороговый граф расщепляем.

Следствие 6.3 [77, 78]. Если G — пороговый граф, то дополнительный граф $\overline{G}$ также пороговый.

Учитывая теорему декомпозиции, непосредственно из теоремы 6.1 получаем следствие 6.4.

Следствие 6.4 [153]. Число попарно неизоморфных пороговых графов порядка n равно 2^{n-1}.

Следствие 6.5 [17]. Число c_m пороговых графов без изолированных вершин с m ребрами равно количеству разбиений на попарно различные части числа m, т. е. $\sum\limits_{m=1}^{\infty} c_m x^m = \prod\limits_{i=1}^{\infty} (1 + x^i) - 1$.

Следствие 6.6 [119]. Пороговый граф является униграфом.

С помощью предыдущего утверждения получены простые необходимые и достаточные условия гамильтоновости порогового графа [24].

Р. И. Тышкевич [185] заметила, что пороговые графы определяются не только своими степенными последовательностями, но даже множествами степеней своих вершин.

Утверждение 6.7. Если множества степеней вершин двух пороговых графов совпадают, то эти графы изоморфны с точностью до изолированных вершин.

Графическая последовательность называется пороговой, если она имеет пороговую реализацию.

Следствие 6.8 [119]. Правильная графическая последовательность d является пороговой, если и только если первые m (d) НЭГ суть равенства.

Из сопоставления этого результата с утверждением 2.8 следует, что классы пороговых графов и графов с максимальным ветвлением совпадают. Этот факт оставался незамеченным, что привело к переоткрытию ряда результатов о пороговых графах.

В [119] рассматривается решетка T_n пороговых последовательностей длины n. На множестве S_n всех правильных последовательностей длины n определим операции пересечения и объединения, положив для $d = (d_1, \ldots, d_n)$, $c = (c_1, \ldots, c_n)$, $(d \cap c)_i = \min(d_i, c_i)$, $(d \cup c)_i = \max(d_i, c_i)$. Теперь S_n является решеткой.

Теорема 6.9 [119]. Если $d, c \in T_n$, то и $d \cup c$, $d \cap c \in T_n$, т. е. T_n — подрешетка.

В [77, 78] приведена характеризация пороговых графов в терминах запрещенных порожденных подграфов.

Характеризация пороговых графов инспирировала почти одновременное введение новых классов графов — матроидальные [154] и матрогенные [103]. Пусть G — произвольный граф. Подмножество D ребер графа G назовем независимым, если порожденный им подграф $G(D)$ является пороговым. Тем самым на множестве EG ребер строится система S независимых подмножеств. Граф называется матроидальным, если эта система определяет на EG матроид, т. е. (EG, S) — матроид с системой независимых множеств S. В частности, пороговый граф является матроидальным.

Определение матрогенного графа аналогично приведенному, только в качестве D берется подмножество вершин, а не ребер, и строится матроид (VG, S) на множестве вершин VG. В [103] даны характеризации матроидальных и матрогенных графов в терминах запрещенных подграфов и частично описана их структура.

Теорема декомпозиции позволила получить исчерпывающее описание матрогенных и матроидальных графов [185].

Теорема 6.10. Граф G является матроидальным, если и только если он имеет вид

$$G = X_1 \circ \ldots \circ X_n \circ Y \quad (n \geqslant 0), \tag{11}$$

где:

1) X_i — один из следующих расщепляемых графов:

а) $X_i = K_1$ или O_1;

б) $X_i = (H, A, B)$, где $H = mK_2 \cup K(A)$, т. е. к паросочетанию mK_2 присоединяются все ребра полного графа $K(A)$ на множестве A, в которое включен только один конец каждого из ребер паросочетания mK_2, или $X_i = (\overline{H}, B, A)$;

2) Y либо такой, как в пп. а), б), либо mK_2.

Описанное разложение графа G определено однозначно.

Теорема 6.11 [185]. Граф G является матрогенным, если и только если он имеет вид (11), где X_i — такие, как в теореме 6.10, Y либо такой, как в теореме 6.10, либо $Y = C_5$. Описанное представление графа G определено однозначно.

Следствие 6.12 [185]. Всякий матрогенный граф является униграфом.

Часть результатов из [185] получили независимо и одновременно Марчиоро, Моргана, Петреши и Симеоне [149].

В [78] на множестве вершин графа G определен предпорядок $\leqslant$: для вершин x и y $x \leqslant y$ тогда и лишь тогда, когда $N(x) \subseteq N(y) \cup \{y\}$. В терминах этого предпорядка приведена еще одна характеризация пороговых графов.

Утверждение 6.13 [78]. Граф является пороговым тогда и только тогда, когда для любых его вершин x и y либо $x \leqslant y$, либо $y \leqslant x$.

Эта характеризация послужила отправным пунктом для следующего определения: граф называется бокс-пороговым, если для любых его вершин x и y либо $x \leqslant y$, либо $y \leqslant x$, либо $\deg x = \deg y$

[166]). В [155] частично описана структура бокс-пороговых графов и доказано, в частности, что бокспороговость — вынужденное свойство графической последовательности. Более детальное описание бокс-пороговых графов предложено в [186] на базе теории декомпозиции. Расщепляемый граф (G, A, B) с непустыми A и B назовем бирегулярным, если степени вершин из A все равны, степени вершин из B все равны и отличны от 0 и $|A|$. Такой граф всегда неразложим.

Теорема 6.14 [186]. Граф G является бокс-пороговым, если и только если он имеет вид (11), где X_i — либо бирегулярный, либо одновершинный расщепляемый граф, Y — либо одновершинный, либо бирегулярный, либо регулярный, отличный от полного и пустого. Представление (11) определено однозначно.

Получено также перечисление матроидальных, матрогенных [185] и бокс-пороговых [186] графов.

Из структурных теорем 6.1, 6.10, 6.11, 6.14 и следствия 4.5 вытекает следствие 6.15.

Следствие 6.15. Свойства пороговости, матроидальности, матрогенности или бокс-пороговости графической последовательности длины n распознаются посредством $O(n)$ элементарных операций.

3. УСЛОВИЯ P-ГРАФИЧНОСТИ

7. Некоторые условия потенциальной P-графичности: факторы

Одним из наиболее важных условий подобного рода является следующая широко известная теорема о k-факторе [136, 141].

Теорема 7.1. Если для натурального k обе последовательности

$$d = (d_1, \ldots, d_n) \text{ и } d - k = (d_1 - k, \ldots, d_n - k) \tag{12}$$

являются графическими, то существует реализация G последовательности d, содержащая реализацию H последовательности $d - k$ как подграф.

Следствие 7.2. Графическая последовательность d реализуема графом, имеющим k-фактор, тогда и только тогда, когда последовательность $d - k$ также является графической.

С 1976 г. известна следующая гипотеза.

Гипотеза 7.3 [63]. При четном n G и H в теореме 7.1 можно выбрать так, чтобы граф $G - H$ был реберно дизъюнктным объединением k 1-факторов.

Известно следующее утверждение: любая самодополнительная реализация последовательности d имеет k-фактор, если и только если $d - k$ графическая. При $k = 1$ это утверждение тривиально, при $k = 2$ — доказано С. Б. Рао [162]; там же оно выдвинуто в качестве гипотезы для $k \geqslant 3$, впоследствии опровергнутой Андо [36]. (Точнее, Андо опровергнул более сильную версию этой гипотезы, сформулированную Дасом и С. Б. Рао в [85]).

А. Р. Рао и С. Б. Рао нашли критерий реализуемости последовательности графом, имеющим связный k-фактор [161].

Теорема 7.4. Правильная графическая последовательность

$$d = (d_1, \ldots, d_n) \tag{13}$$

реализуема графом, имеющим связный k-фактор, тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) $d - k$ — графическая последовательность;

2) для всех $l < n/2$ $\sum_{i=1}^{l} d_i < l(n - l - 1) + \sum_{i=n-l+1}^{n} d_i$.

Условие 2) этой теоремы наглядно выражается в терминах композиции $\circ$ (оно означает, что последовательность d нельзя разложить в композицию вида

$$d = (d_A'; d_B') \circ c, \tag{14}$$

где $|A| = |B|$).

Следствие 7.5 [161]. Если обе последовательности (12) являются графическими, $0 < p < k$ и $p - n$ четно, то последовательность $d - p$ также графическая и имеет реализацию, содержащую p-фактор.

Теорема 7.6 [171]. Правильная графическая последовательность (13) имеет реализацию, содержащую гамильтонову цепь, соединяющую вершины степеней d_i и d_j, если и только если выполняются следующие условия:

1) если i и j — максимальные индексы, соответствующие предписанным степеням d_i и d_j, и $i < j$, то $(d_1 - 2, \ldots, d_{i-1} - 2, d_i - 1, d_{i+1} - 2, \ldots, d_{j-1} - 2, d_j - 1, d_{j+1} - 2, \ldots, d_n - 2)$ — графическая последовательность;

2) последовательность d нельзя разложить в композицию вида (14), где $|A| = k$, $|B| = k + 1$, $i > k$, $j \geqslant n - k$, либо $|A| = |B| = k$, $i > k$, $j \leqslant n - k$ или $i \leqslant k$, $j > k$, либо $|A| = k$, $|B| = k - 1$, $i, j \leqslant k$.

Следствие 7.7 [115]. Правильная графическая последовательность (13) имеет реализацию с гамильтоновой цепью, если и только если выполняются следующие условия:

1) $(d_1 - 2, \ldots, d_{n-2} - 2, d_{n-1} - 1, d_n - 1)$ — графическая последовательность;

2) последовательность d нельзя разложить в композицию (14), где $|B| = |A| + 1$.

Для неразложимой последовательности d условие 2) каждого из предыдущих утверждений выполняется автоматически.

В обзоре [115] предложена следующая гипотеза.

Гипотеза 7.8. Правильная графическая последовательность (13) с $n \geqslant 3$ имеет реализацию гамильтоново-связным графом, если и только если выполняются следующие условия:

1) d потенциально гамильтонова;

2) для всех $k < (p+1)/2$, $\sum_{i=1}^{k} d_i < k(n-k) + \sum_{i=n-k+2}^{n} d_i$;

3) $d_n \geqslant 3$.

Эту гипотезу опровергли Р. И. Тышкевич, О. И. Мельников, В. М. Котов [14]. Серию контрпримеров можно построить следующим образом. Пусть $d = (d_A;\ d_B)$ — расщепляемая последовательность, (G, A, B) — любая из ее реализаций, $|A| = |B|$. Граф G не является гамильтоново-связным: в нем нет гамильтоновой цепи с концами в доле A. Если теперь последовательность d удовлетворяет условиям гипотезы, то она является контрпримером. Условие 2) гарантируется, например, неразложимостью последовательности. Одним из контрпримеров служит последовательность $d = ((n+m-1)^m; n^m)$, $2 < n < m$, $m > 3$.

В заключение отметим, что Симион [174] привел критерий реализуемости последовательности деревом с 1-фактором. Этот же критерий получается непосредственно из теоремы 7.1 и условий реализуемости последовательности лесом.

8. Планарные последовательности

Систематическое изучение потенциально планарных последовательностей началось с появления в 1977 г. работы Шмейхеля и Хакими [172], хотя до этого уже имелось достаточно много важных результатов о степенных параметрах планарных графов.

Невозрастающая последовательность

$$d = (d_1, \ldots, d_n) \tag{15}$$

называется эйлеровой, если

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \leqslant 6(n-2). \tag{16}$$

Хорошо известно, что потенциально планарные последовательности все эйлеровы. В этом разделе всюду последовательность d предполагается графической и эйлеровой. Последовательность (15) называется максимальной (немаксимальной), если (16) — равенство (строгое неравенство).

Обозначим $\Pi_{n,k}$ множество таких максимальных потенциально планарных последовательностей (15), для которых

$$d_{n-k+1} = d_n = 5,\ d_{n-k} > 5.$$

Полное описание потенциально планарных последовательностей едва ли достижимо в ближайшее время, поэтому работы ведутся в направлении описания k-последовательностей (15), т. е. последовательностей, для которых $d_1 - d_n = k$, и множеств $\Pi_{n,k}$ [98]. При этом получение соответствующих результатов даже для первых значений k требует глубокого рассмотрения структуры планарных графов.

Замечание. В аналогичном ключе исследовались вопросы реализуемости последовательности реберным графом [39, 40].

Хорошо известно, что 0-последовательность (15) потенциально планарна всегда, кроме случаев $d = (4^7)$ и $d = (5^{14})$.

Утверждение 8.1 [172]. 1-последовательность d потенциально планарна, если и только если

$$d \notin \{(5^{10}, 4), (5^{12}, 4), (6, 5^{12}), (6, 5^{14})\}.$$

Хакими и Шмейхель рассмотрели также 2-последовательности, оставив нерешенными следующие случаи: немаксимальные последовательности

$$(5^{13}, 3),\ (7, 5^{17}),\ (7^3, 5^{17}), \tag{17}$$

максимальные последовательности

$$(7^{h+1}, 6^{2-h}, 5^{13+h}),\ (7^{3+2h}, 6, 5^{15+2h}),\ (7^{5+2h}, 5^{17+2h}),\ h = 0, 1, 2. \tag{18}$$

Фанелли [97] сократил список (17) до одной последовательности, Рускитти [168] и Фанелли [96] соответственно исчерпали первые две группы последовательностей (18). Таким образом, на сегодняшний день разобраны все эйлеровы 2-последовательности, кроме $(7^3, 5^{17})$, $(7^j, 5^{j+12})$, $j = 5, 7, 9$.

В [172] дается серия необходимых условий потенциальной планарности, улучшающих условия, полученные ранее Боуеном и Хваталом. Одно из необходимых условий в терминах k-го момента последовательности получено в [184].

Утверждение 8.2. Если последовательность (15) потенциально планарна, то для любого $k \geqslant 2$ $\sum_{i=1}^{n} d_i^k \leqslant 2(n-1)^k + (n-4)\cdot 4^k + 2\cdot 3^k$.

Близкой по сложности к проблеме описания потенциально планарных последовательностей является следующая проблема.

Проблема 8.3. Охарактеризовать потенциально хордальные последовательности.

С вынужденной планарностью вопрос решен. Известна следующая теорема.

Теорема 8.4 [163, 164]. Невозрастающая графическая последовательность вида (15) является вынужденно планарной, если и только если при $n \leqslant 5$ $d \neq (4^5)$, а при $n \geqslant 6$ выполняется одно из следующих условий.

1. $d_5 \leqslant 3$, $d_6 < 3$;
2. $d_1 = n-2$, $d_2 = d_6 = 3$;
3. $d_2 = n-1$, $d_3 = d_6 = 3$;
4. $d_2 \geqslant 5$, $d_3 = d_6 = 3$, $d_1 + d_2 + n_1 = 2n-2$;
5. $d_2 \geqslant 5$, $d_3 = d_6 = 3$, $d_1 + d_2 + n_1 = 2n-3$;
6. $d_3 = 4$, $d_4 = d_6 = 3$, $d_1 + d_2 + n_1 = 2n-2$;
7. $d_3 = d_4 = 4$, $d_5 = d_6 = 3$, $d_1 + d_2 + n_1 = 2n-2$;

8. $d \in \{(4^6), (6^4, 3^4), (5^4, 3^2, 2), (6, 5^3, 3^3), (n-1, 5^3, 3^3, 1^{n-7})\}$, $n \geqslant 8$.
В пп. 4—7 n_1 — число членов последовательности d, равных единице.

Чоудам [73] привел полный каталог вынужденно внешне планарных графических последовательностей.

В [19] приведен полный каталог планарных униграфических последовательностей.

Графическая последовательность называется вынужденно PQ-графической, если она потенциально Q-графическая и каждая из ее реализаций со свойством Q имеет и свойство P. Достаточные условия вынужденной PQ-графичности, где Q — максимальная планарность, а P — k-связность, получили Хакими и Шмейхель [116], Фанелли [98, 99].

9. Вынужденно P-графические последовательности для наследственных свойств P

Выше отмечался ряд свойств графов, которые определяются степенной последовательностью — расщепляемость, расщепление $\sigma(G)$, разложимость, пороговость, бокспороговость, матроидальность, матрогенность. Степенные последовательности таких графов тривиально вынужденно P-графичны, если P означает соответствующее свойство — расщепляемость и т. д. Сложнее охарактеризовать вынужденно P-графические последовательности для таких свойств P, которые не определяются степенной последовательностью.

С. Б. Рао предложил общий подход к описанию вынужденно P-графических последовательностей для свойств P, наследственных при переходе к порожденному подграфу [165]. Пусть P — одно из таких свойств, $G(P)$ — множество графов, имеющих свойство P. Тогда существует множество $F_0(P)$ минимальных запрещенных подграфов таких, что $G \in G(P)$, если и только если G не имеет порожденных подграфов, входящих в $F_0(P)$. Пусть $A_0(P)$ — множество степенных последовательностей графов из $F_0(P)$.

Во множество D всех графических последовательностей внесем порядок $\ll$, положив $d_1 \ll d_2$ тогда и лишь тогда, когда какая-либо из реализаций последовательности d_2 имеет порожденный подграф, реализующий последовательность d_1. Обозначим $M(P)$ множество минимальных относительно порядка $\ll$ элементов в $A_0(P)$.

Теорема 9.1 [165]. Графическая последовательность d является вынужденно P-графической, если и только если $M(P)$ не содержит таких элементов c, что $c \ll d$.

Если множество минимальных последовательностей $M(P)$ известно, то условие теоремы 9.1 проверяется с помощью теоремы Фалкерсона, Хофмана и МакЭндрю [104]. Для этой проверки без дополнительных приемов требуется время $c\left(\binom{n}{r} n(n-r)^2 r^2 + n\right)$, где c — константа, r — максимум длин последовательностей в $M(P)$, n — длина тестируемой последовательности.

В [165] высказана следующая гипотеза.

Гипотеза 9.2. Множество $M(P)$ конечно для любого свойства P, сохраняющегося при переходе к порожденному подграфу.

Для ряда свойств P эта гипотеза доказана в [165]; в частности, она доказана для P, означающего «иметь хроматическое число, не превышающее фиксированное k».

Теоретико-графовое свойство P назовем наследственным, если оно удовлетворяет следующим двум условиям:

1) если $G \in G(P)$, то всякий порожденный подграф графа G также принадлежит $G(P)$;

2) если $F, G \in G(P)$ и (F, A, B) — расщепляемый граф, то и $(F, A, B) \circ G \in G(P)$.

Для изучения вынужденно P-графических последовательностей с наследственным P Р. И. Тышкевич, А. А. Черняк и Ж. А. Черняк [18, 72] разработали подход, основанный на соединении теории декомпозиции, метода Рао и layoff-процедуры. Обозначим L список следующих теоретикографовых свойств: P_1 — быть хордальным графом, P_2 — быть сильно хордальным графом, P_3 — быть интервальным графом, P_4 — быть транзитивно ориентируемым графом, P_5 — быть тривиально совершенным графом. Заметим, что этими свойствами определяются основные известные подклассы класса совершенных графов. В [18] приведена полная характеризация вынужденно P-графических последовательностей, где $P \in L$. Сложность тестирования равна $O(n)$ для свойств P_1 и P_5 и $O(kl^5)$ для свойств P_2 — P_4. Здесь n — длина тестируемой последовательности, k — число компонент в ее каноническом разложении, l — максимум длин этих компонент. Сформулируем некоторые типичные результаты из [18, 72].

Лемма 9.3. Для наследственного свойства P графическая последовательность является вынужденно P-графической, если и только если таковы все ее неразложимые компоненты.

Лемма 9.4. Каждое из входящих в список L свойств является наследственным.

Учитывая две предыдущие леммы, достаточно рассматривать только неразложимые последовательности.

Теорема 9.5. Пусть

$$d = (d_1, \ldots, d_n) — \tag{19}$$

невозрастающая неразложимая графическая последовательность, не являющаяся расщепляемой. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1) d вынужденно хордальна;

2) либо $d_4 = 1$, либо $d_4 > 1$ и при $k = \max\{i : d_i > 1\}$ $\sum_{i=1}^{k} d_i = k(k-1) + n - k - 2$;

3) d вынужденно сильно хордальна.

Любой расщепляемый граф является хордальным и потому всякая расщепляемая графическая последовательность вынужденно хордальна. Критерий расщепляемости известен (разд. 3), так что получена полная характеризация вынужденно хордальных последовательностей.

Для свойства сильной хордальности остаются еще неразложимые расщепляемые последовательности. Их характеризация основана на модификации теоремы 9.1. Пусть $c = (c_1, \ldots, c_m)$ и $d = (d_1, \ldots, d_n)$ — последовательности натуральных чисел. Пара $(c; d)$ называется графической, если существует двудольный граф $G(A, B)$ с долями A и B такой, что $|A| = m$, $|B| = n$, $c_1, \ldots, c_m$ — степени вершин графа G, входящих в A, $d_1, \ldots, d_n$ — аналогично для B. $G(A, B)$ называется реализацией пары $(c; d)$. Множество графических пар последовательностей обозначим S. Определим на S частичный порядок $\ll$. Пусть $(c^i, d^i) \in S$, $i = 1, 2$. Если какая-либо из реализаций $G(A, B)$ пары $(c^2; d^2)$ имеет порожденный подграф $H(C, D)$, реализующий пару $(c^1; d^1)$, причем $C \subseteq A$, $D \subseteq B$, то положим

$$(c^1; d^1) \ll (c^2; d^2). \tag{20}$$

Как показано в [72], условие (20) проверяется эффективно, если последовательности c^i, d^i являются регулярными или почти регулярными (см. ниже теорему 9.6).

Пусть d — неразложимая расщепляемая графическая последовательность длины, большей единицы. Для таких последовательностей однозначно определено полярное разбиение $d = (d_A; d_B)$ [13]. Сопоставим d графическую пару $b(d)$ следующим образом. Пусть $|A| = p$, $d_A = (a_1, \ldots, a_p)$. Очевидно, $a_i \geqslant p - 1$. Положив $c_i = a_i - p + 1$, $c = (c_1, \ldots, c_p)$, $f = d_B$, получим графическую пару $(c; f) = b(d)$.

Теорема 9.6. Неразложимая расщепляемая последовательность является вынужденно сильно хордальной, если и только если ни одно из следующих условий не выполняется:

$$(2^3; 2^3) \ll b(d), \quad (2^4; 2^4) \ll b(d).$$

10. Вынужденная P-графичность: метод Бонди-Хватала-Жу-Тьяна

Обозначим L список следующих теоретико-графовых свойств: P_1 — содержать простой цикл C_s, P_2 — содержать простую цепь P_s, P_3 — содержать паросочетание sK_2, P_4— содержать s-фактор, P_5 — быть s-связным, P_6 — быть s-реберно-связным, P_7 — иметь число независимости не выше s, P_8 — быть гамильтоновым, P_9 — быть s-гамильтоновым, P_{10} — быть s-реберно-гамильтоновосвязным, P_{11} — быть s-реберно-гамильтоновым, P_{12} — иметь число μ не выше s, где $\mu = \mu(G)$ — минимальное число вершиннонепересекающихся цепей в графе G, покрывающих все его вершины.

Для целого ряда свойств P, полностью включающего список L, характеризация вынужденной P-графичности пока отсутствует, и ее получение представляется сложной задачей. Однако для этой серии свойств Бонди и Хватал [61] и Жу и Тьян [190] развили чрезвычайно плодотворный общий метод получения достаточных условий вынужденной P-графичности, которые не только усиливают большинство из известных теорем аналогичного содержания, но и являются принципиально новыми результатами.

Следуя [61], назовем свойство P k-устойчивым, если верно следующее утверждение: если $u, v \in VG$, $\deg u + \deg v \geqslant k$, $uv \notin EG$ и граф $G + uv$ имеет свойство P, то сам граф G также имеет свойство P.

Для любого графа G существует минимальный надграф H того же порядка такой, что для любых несмежных в H несовпадающих вершин x и y $\deg_H x + \deg_H y \leqslant k - 1$. Граф H называется k-замыканием $C_k(G)$ графа G. Очевидна лемма.

Лемма 10.1. Если P — k-устойчивое свойство и $C_k(G)$ имеет свойство P, то и G имеет свойство P.

При некотором $n \geqslant n(s)$ граф K_n имеет все свойства из списка L. Более того, если $C_k(G)$ имеет, например, t вершин степени $n - 1$, то он t-связен, содержит $t/2\,K_2$ и т. д. Отметим также, что в [61] разработана техника вычисления $k(n, s)$ и, в частности, найдены значения $k(n, s)$ для всех свойств из списка L. Учитывая лемму 1, желательно узнать, когда замыкание $C_k(G)$ имеет t вершин степени $n - 1$. Достаточное для этого условие формулируется в терминах степенной последовательности, которую удобно считать здесь неубывающей.

Теорема 10.2 [61]. Пусть

$$d = (d_1, \ldots, d_n) — \tag{21}$$

неубывающая графическая последовательность, $k \leqslant 2n - 4$, $t < n$ и не существует такого целого i, что

$$k - n < i < k/2,\ d_{n-k+i} \leqslant i,\ d_{n-i} \leqslant k - i - 1,$$
$$d_{n-t+1} \leqslant k - i - 1, \tag{22}$$

тогда для любой реализации G последовательности d замыкание $C_k(G)$ имеет не менее t вершин степени $n - 1$.

Прямое применение теоремы 10.2 к свойствам из списка L (с учетом найденных в [61] значений $k(n, s)$) приводит как к лучшим из известных достаточных условий, так и к новым. Некоторые из них упомянуты ниже.

Так как для графов порядка n свойство гамильтоновости n-устойчиво, то, полагая в предыдущей теореме $k = t = n$, получаем следствие 10.3.

Следствие 10.3 [76]. Если для последовательности (21) истинна импликация $(d_i \leqslant i < n/2) \Rightarrow (d_{n-i} \geqslant n - 1)$ и $n \geqslant 3$, то эта последовательность вынужденно гамильтонова.

Пусть $t(P, n)$ — минимальное число t такое, что любой граф порядка n, имеющий t вершин степени $n - 1$, обладает свойством P.

Для $P = P_5$ $t(P, n) = s$, $k(n, s) = n + s - 2$, поэтому, полагая в (22) $k = n + s - 2$, $t = s$, имеем следующее следствие.

Следствие 10.4 [60]. Если для последовательности (21) истинна импликация $(1 \leqslant i \leqslant [(n-s+1)/2],\ d_{n-s+1} \leqslant n-1-i) \Rightarrow (d_i \geqslant i+s-1)$ и $n > s$, то все ее реализации s-связны.

Для $P = P_{12}$ $t(P, n) = [(n-s+1)/2]$, $k(n, s) = n-s$, так что верно следствие 10.5.

Следствие 10.5 [61]. Если для последовательности (21) истинна импликация $(d_{i+s} \leqslant i < (n-s)/2) \Rightarrow (d_{n-i} \geqslant n-s-i)$, то для любой ее реализации G $\mu(G) \leqslant s$.

Граф G называется s-реберно гамильтоновым, если в нем любые s ребер, составляющие непересекающиеся цепи, принадлежат некоторому гамильтонову циклу. Полагая в (22) $k = n+s$, $t = n$, имеем следствие 10.6.

Следствие 10.6 [45]. Если для последовательности (21) истинна импликация $(s < i < (n+s)/2,\ d_{i-s} \leqslant i) \Rightarrow (d_{n-i} \geqslant n+s-i)$ и $n \geqslant s+3$, то эта последовательность вынужденно s-реберно гамильтонова.

На множестве целочисленных последовательностей длины n зададим порядок, положив для последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ $x \leqslant y$, если $x_i \leqslant y_i$, $i = \overline{1, n}$. Достаточное условие вынужденной P-графичности называется монотонным, если, выполняясь для последовательности d, оно выполняется также для любой большей последовательности. Как отмечено в [61], теорема 10.2 при $k \leqslant 2t-1$ или $k = n+t-2$ дает наислабейшие монотонные условия, гарантирующие наличие в $C_k(G)$ t вершин степени $n-1$. Более точно, если условия теоремы 10.2 не выполняются, то существует графическая последовательность не меньше (21) и такая, что для некоторой ее реализации G^* граф $C_k(G^*)$ имеет менее t вершин степени $n-1$. Другими словами, большинство достаточных условий, вытекающих из теоремы 10.2 (включая и следствия 10.3—10.6), являются наилучшими в указанном смысле.

Существенное развитие идей из [61] предпринято в [190]. Основной результат работы [190] — теорема 10.7.

Теорема 10.7. Пусть $k \leqslant 2n-4$ и для каждого i, удовлетворяющего неравенствам $k-n < i < k/2$, $d_{n-k+i} \leqslant i$, выполняется одно из следующих условий:

1) $d_{n-i} \geqslant k-i$;

2) $d_{n-i} = k-i-1$, $d_{n-i+1} \geqslant k-i$ и существует такое целое r, что $1 \leqslant r \leqslant n-k+i$, $d_{n-k+i+r} < k-i-r$,

$$\sum_{j=1}^{r} (r+1-j)(S(n-j) + S(k-i-j)) \geqslant \geqslant \sum_{j=1}^{r} d_{n-k+i+j} + 1;$$

3) $d_{n-i} = d_{n-i+1} = k-i-1$ и существует такое целое r, что $1 \leqslant r \leqslant n-k+i$, $d_{n-k+i+r} < k-i-r$, $d_{n-k+i+j} \geqslant i+j$, $j = \overline{1, r}$,

$$\sum_{j=1}^{r} (r+1-j)(S(n-j) + S(k-i-j)) \geqslant \geqslant \sum_{j=1}^{r} d_{n-k+i+j} + r(i - S^{+}(k-i)) + 1,$$

где $S(m)$ $(S^{+}(m))$ — число членов в последовательности (21) (больших или равных) m. Тогда для любой реализации G последовательности (21) $C_k(G) = K_n$.

Кроме того, что эта теорема усиливает теорему 10.2 при $t = n$, ее применение к свойствам из списка L дает серию немонотонных достаточных условий (о проблеме получения таких условий для вынужденно гамильтоновых последовательностей писал Боллобаш [59]). Так, в [190] приведена последовательность $d = (2, 3, 4^2, 5, 10^6, 11^4)$, удовлетворяющая условиям теоремы 10.7 при $k = n$ ($i = 4,5$; при $i = 4$ выполняется условие 2) с $r = 1$, при $i = 5$ — условие 1)). Таким образом, согласно этой теореме последовательность d вынужденно гамильтонова, однако последовательность $c = (4^4, 10^7, 14^4)$ больше чем d и имеет единственную реализацию $G = K_4 \circ O_4 \circ K_7$. Граф G не является гамильтоновым, следовательно, c не удовлетворяет условиям теоремы 10.7. Аналогично последовательность $f = (2^4, 3, 5^4, 9)$ удовлетворяет условиям теоремы 10.7 при $k = n-2$, потому $\mu(G) \leqslant 2$ для любой ее реализации G, однако большая последовательность $(2^4, 5^4, 9^2)$ имеет единственную реализацию $H = K_2 \circ O_4 \circ K_4$, причем $\mu(H) = 3$. Итак, имеем немонотонные условия, усиливающие следствие 10.5.

В [61] показано, как посредством $O(n^4)$ элементарных операций построить замыкание $C_k(G)$ и посредством $O(n^3)$ операций гамильтонов цикл графа $C_k(G)$ преобразовать в гамильтонов цикл исходного графа G.

Биксби и Вэнг [53] дали алгоритм с временной сложностью $O(n^3)$, строящий гамильтонов цикл в реализациях графических последовательностей, удовлетворяющих условию Хватала (см. следствие 10.3).

Замечание. Работа [61] инспирировала получение нескольких достаточных условий гамильтоновости (не формулируемых в терминах степенной последовательности), которые усиливают следующее утверждение из [61]: если замыкание $C_n(G)$ — полный граф, то G — гамильтонов [1].

11. Другие достаточные условия

Примем, что граф G имеет свойство $P_{r,m}$, если каждая его цепь длины r принадлежит некоторому циклу длины не менее m. Обозначим Q_r свойство графа быть $(r+2)$-связным. Основной результат работы [113] в слегка измененной формулировке выглядит следующим образом.

Теорема 11.1. Пусть

$$d = (d_1, \ldots, d_n) — \qquad (23)$$

неубывающая графическая последовательность. Если $n \geqslant 3$, $m \leqslant n$, $0 \leqslant r \leqslant m-3$ и истинна импликация $(d_i \leqslant i + r,\ 1 \leqslant i < (m-r)/2) \Rightarrow (d_{n-i-r} \geqslant n-i)$, то последовательность d вынужденно $P_{r,m}Q_r$-графическая.

Как прямые следствия этой теоремы можно получить, например, следствие 10.3, ослабленный вариант следствия 10.6 и следствие 11.2.

Следствие 11.2 [157]. Если $4 \leqslant 2q \leqslant n$ и $d_i > i$ $(i = \overline{1,\ q-1})$, то последовательность (23) вынужденно $P_{0,2q}$-графическая.

Подмножество Y ребер графа G называется i-разрезом, если граф $G - Y$ имеет более i компонент. Буш и Чен [56] ввели параметр $\lambda_i(G)$ — минимум мощностей i-разрезов графа G, обобщающий понятие реберной связности.

Обозначим λ_i минимальное среди чисел $\lambda_i(G)$ для всех реализаций G последовательности (23)

Теорема 11.3 [56]. 1. Если $d_1 \geqslant [n/(i+1)]$, то $\lambda_i \geqslant d_1$.

2. Если же $d_{i+1} \geqslant \left[\dfrac{in}{i+1}\right]$, то $\lambda_i \geqslant \sum\limits_{j=1}^{i} d_i - \dfrac{i(i-1)}{2}$.

Следствие 11.4 [68]. Если $d_1 \geqslant [n/2]$, то $\lambda_1 = d_1$.

Следствие 11.5 [56]. Если $d_2 \geqslant [n/2]$, то $\lambda_1 = d_1$.

В некоторых случаях теорема 11.3 дает точную границу, которая может быть достигнута. Например, для последовательности $d = (2,4^5)$, $d_3 \geqslant [2\,n/3]$, откуда $\lambda_2 \geqslant 5$. Но для графа G, изображенного на рис. 5, $\lambda_2(G) = 5$.

Достаточные условия максимальной реберной связности исследовали Голдмит и Уайт [109]. Приведенная ниже их теорема является усилением следствия 11.4 при четном n.

Теорема 11.6. Если существует такая перестановка $(k_1, \ldots, k_n)$ элементов $1, \ldots, n$, что $d_{k_{2i-1}} + d_{k_{2i}} \geqslant n$ $(i = \overline{1, [n/2]})$, то $\lambda_1 = d_1$.

Естественным обобщением условия следствия 11.4 могли бы быть следующие условия: для некоторой перестановки $(k_1, \ldots, k_n)$ $d_{k_{2i-1}} + d_{k_{2i}} \geqslant 2\,[n/2]$, $i = \overline{1, [n/2]}$, $d_{k_n} \geqslant [n/2]$ при нечетном n, однако, как показано в [109], эти условия не являются достаточными для вынужденной P-графичности, где P означает свойство «быть максимально реберно-связным».

Граф называется локально реберно s-связным, если для каждого его ребра xy подграф, порожденный вершинами, смежными с x или y и отличными от них, s-реберно связен [140]. Типичным результатом в [140] является следующая теорема.

Теорема 11.7. Если $d_i + d_j > \dfrac{2}{3}(2n+s) - 1$, $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$, $s \leqslant n-3$, то последовательность

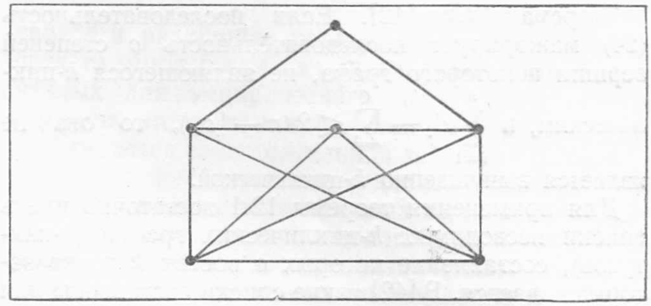

Рис. 5

(23) является вынужденно локально реберно s-связной.

В работах [47, 127] описаны вынужденно k-разделимые последовательности. Граф G называется k-разделимым, если существует разбиение множества VG на k равномощных частей такое, что каждая вершина v графа G смежна ровно с одной вершиной из любой, не содержащей v, части.

Теорема 11.8 [47, 127]. Множество вынужденно k-разделимых графических последовательностей исчерпывается следующим списком:

1. $k = 2: d = (2^4)$, (1^{2n}), $(n^n, 1^n)$;
2. $k \geqslant 2: ((k-1)^k)$ и (2^6), $(3, 7^6)$ для $k = 3$.

12. Циклы и последовательности: методы Бейнеке—Шмейхеля и А. Рао

Введем несколько определений. Граф G называется k-циклическим, если он имеет ровно k циклов. Если к тому же никакие два цикла в G не имеют общих ребер, то G называется k-кактусом (или просто кактусом, если число циклов безразлично). G называется несводимым, если он не имеет висячих вершин и каждая вершина степени 2 принадлежит треугольнику.

Бейнеке и Шмейхель [42] предложили метод описания потенциально и вынужденно k-циклических последовательностей, использующий следующее отношение мажорирования $\leqslant$. Пусть $c = (c_1, \ldots, c_m)$, $d = (d_1, \ldots, d_n)$, $m \leqslant n$. Скажем, что последовательность c мажорируется последовательностью d $(c \leqslant d)$, если и только если для $i = \overline{1,\ m}$ $c_i \leqslant d_i$. Длиной $|c|$ последовательности c назовем число ее ненулевых членов. Идея метода сконцентрирована в следующих двух положениях.

Теорема 12.1 [42]. Графическая последовательность

$$d = (d_1, \ldots, d_n) \tag{24}$$

длины n является потенциально k-циклической (k-кактусоидной), если и только если для какой-либо мажорируемой ею последовательности c степеней вершин несводимого k-циклического графа (k-кактуса) $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i - \sum\limits_{c} = 2(n - |c|)$. Здесь $\sum\limits_{c}$ — сумма членов последовательности c.

Теорема 12.2 [42]. Если последовательность (24) мажорирует последовательность c степеней вершин некоторого графа, не являющегося k-циклическим, и $\sum_{i=1}^{n} d_i - \sum_{c} \leqslant 2(n - |c|)$, то она не является вынужденно k-циклической.

Для применения теоремы 12.1 достаточно иметь списки несводимых k-циклических графов (k-кактусов), составление которых с ростом k резко затормаживается. В [42] такие списки составлены для $k = \overline{1,4}$. В качестве типичного примера применения этой теоремы приведем следствие 12.3.

Следствие 12.3 [42]. Невозрастающая графическая последовательность d является потенциально 3-циклической, если и только если выполняется одно из следующих двух условий:

1) $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n + 2$ и $(3^2, 2^2) \leqslant d$;

2) $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n + 4$ и d мажорирует каждую из последовательностей: $(6, 2^6)$, $(5, 3, 2^6)$, $(4^2, 2^5)$, $(4, 3^2, 2^5)$, $(3^4, 2^5)$.

С помощью теоремы 12.2 в [42] описаны вынужденно k-циклические последовательности для $k = 1, 2, 3, 4$, а также вынужденно k-кактусоидные последовательности для произвольного фиксированного k.

Характеризация вынужденно кактусоидных последовательностей (k не фиксируется) получена А. Р. Рао [160] с помощью других соображений. Там же описаны потенциально кактусоидные последовательности. Как справедливо отмечено в [160], с тем же успехом можно описать потенциально и вынужденно P-графические последовательности для других свойств P, задаваемых ограничениями на вид блоков в реализациях (например, все блоки являются циклами длины k, или все блоки — клики).

Кроме того, отметим, что частичные результаты о k-циклических последовательностях ($k = 0, 1$) получили Буш и Харари [58], Бхат Кабекаде и Рашиди [46], а также Экзу и Харари [95].

13. О двудольных реализациях

Влияние степенной последовательности на хроматическое число графа улавливается с большим трудом, поэтому результатов в этой области мало. Характеризация потенциально k-хроматических последовательностей (т. е. имеющих реализацию с хроматическим числом, не превосходящим k), представляется пока мало вероятной. Интересна следующая проблема.

Проблема 13.1. Существует ли для распознавания потенциальной двудольности графической последовательности алгоритм с полиномиально ограниченной временной сложностью?

Такой алгоритм существует для класса последовательностей с «большим» максимальным числом (разность между длиной последовательности и ее максимальным членом ограничена константой) [13].

Что касается характеризации вынужденно k-хроматических последовательностей при фиксированном k, то можно надеяться получить ее методом Рао, о котором написано выше, поскольку в этой ситуации множество минимальных последовательностей $M(P)$ конечно (см. разд. 9).

Проблема неизмеримо упрощается, если перейти к парам последовательностей. Эффективные критерии графичности пары известны давно и в разных формах. Исторически первым среди них является, по-видимому, следующий критерий Гейла и Райзера, использующий понятие сопряженной последовательности и отношение порядка $\prec$ (см. разд. 2).

Теорема 13.2 [105, 169]. Пара последовательностей

$$c = (c_1, \ldots, c_k), \quad d = (d_1, \ldots, d_l) \tag{25}$$

натуральных чисел является графической, если и только если выполняются следующие условия: $d_i \leqslant k$, $j = \overline{1, l}$; $c \prec d^*$.

Установить графичность пары последовательностей и построить соответствующую двудольную реализацию можно также посредством layoff-процедуры (см. разд. 1). Теми же средствами можно построить и гамильтонову реализацию пары последовательностей, если такая реализация существует [75].

Из критерия расщепляемости 3.5 вытекает следующий критерий графичности пары последовательностей.

Следствие 13.3 [14]. Пара (25) последовательностей целых положительных чисел является графической, если и только если выполняются следующие условия: 1) $d_j \leqslant k$, $j = \overline{1, l}$; 2) $\sum_{i=1}^{k} c_i = \sum_{j=1}^{l} d_j$; 3) последовательность $(c_1 + k - 1, \ldots, c_k + k - 1, d_1, \ldots, d_l)$ графическая.

Дас [82] нашел условия реализуемости n последовательностей натуральных чисел n-дольным графом.

Гангопэдхай [106, 107] получил характеризацию как потенциально, так и вынужденно самодополнительных графических пар последовательностей.

Достаточные условия вынужденной гамильтоновости пары последовательностей даны Хваталом [76]. Шмейхель и Митчем [173] доказали, что при тех же условиях пара последовательностей вынужденно четно панциклическая. (Граф порядка p называется четно панциклическим, если он двудольный и имеет цикл длины $2t$ для каждого $t = \overline{2, p/2}$.)

Окончание см. на с. 4

становится активным, арбитр считывает из него токен и помещает в выходной канал, размещая их в соответствии со значением приоритета. Токены, полученные в результате работы арбитра и связанного с ним функционатора, направляются к следующему элементу потоковой схемы (в соответствии с описанием своего маршрута) с помощью селектора, определяющего, по какому из его выходов должен двигаться входной токен.

На рис. 1 приведена АС-схема одной из подсистем системы автоматизации физико-технического эксперимента. Не раскрывая ее физической сущности, отметим лишь, что генераторы G_1—G_6 ассоциируются с набором независимых источников информации, с различным темпом поставляющих данные, которые затем проходят обработку в функционаторах F_1—F_7 и заканчивают движение в терминаторе.

Заключение. Разработка данной схемы вычислений преследовала несколько взаимосвязанных целей. Во-первых, было создано средство описания распределенных вычислений в системах автоматизации эксперимента, в определенном смысле инвариантное к возможным реализациям. Этот аспект и доминирует в статье. В дальнейшем будет предпринята попытка формализации интуитивно введенных конструктивов АС-схем в целях решения задач оценки корректности конкретной схемы и проведения функционально-эквивалентных преобразований. Во-вторых, при реализации АС-схем на различных комплексах технических средств требуют разрешения задачи оценки эффективности различных реализаций схемы. Создание средств имитационного моделирования, предназначенных для эмпирического исследования характеристик отображения АС-схем на ресурсные графы, является самостоятельной задачей. И, наконец, в-третьих, предложенная в данной работе концептуальная модель параллельных вычислений послужила основой проекта гибкого программно-аппаратного комплекса, предназначенного для построения распределенных систем сбора и обработки данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгоритмы, математическое обеспечение и архитектура многопроцессорных вычислительных систем / Под ред. А. П. Ершова.— М. : Наука, 1982.— 336 с.
2. Параллельная обработка информации / Под ред. А. Н. Свенсона.— Киев : Наук. думка, 1985.— Т. 1.— 280 с.
3. Gurd J., Watson I., Kirham C. The Manchesten data flow project // Distributed Computing System Programme.— London : S. l. 1984.— P. 270—284.
4. Dennis J. B. Data flow supercomputer // Computer.— 1980.— 13, N 11.— P. 48—56.
5. Прангишвили Л. В., Стецюра Г. Г. Современное состояние проблемы создания ЭВМ с нетрадиционной структурой управляемых потоком данных // Измерение, контроль, автоматизация.— 1981.— № 1.— С. 36—48.
6. Dennis J. B., Fossen J. B., Hinderman J. P. Data flow shemas // Lect. Notes Comput. Sci.— 1972.— 5.— P. 187—216.
7. Шоу А. Логическое проектирование операционных систем.— М. : Мир, 1981.— 360 с.

Поступила 30.05.86

Окончание. Начало см. на с. 12.

Теорема 13.4 [173]. Пусть (25) — графическая пара неубывающих последовательностей, причем $k = l > 3$. Если истинна импликация

$$(c_n \leqslant n < k) \Rightarrow (d_{n-k} \geqslant k - n + 1),$$

то пара (25) вынужденно четно панциклическая.

Отметим родственный результат Шмейхеля и Хакими [170], первоначально известный как гипотеза Хватала.

Теорема 13.5. Если для графической последовательности d выполняются условия следствия 10.3, то каждая ее реализация либо панциклическая, либо четно панциклическая.

Теоремы 13.4, 13.5 интересны также и в связи с известной метагипотезой Бонди: почти каждое условие, гарантирующее гамильтоновость графа, влечет и его панцикличность или четную панцикличность (быть может, с простыми исключениями). Помимо теорем 13.4 и 13.5, имеются и другие аргументы в пользу утверждения Бонди (см. обзоры [143, 151]). В то же время Бонди построил непанциклические графы с полным n-замыканием (см. разд. 10), а Малкевич [143] — 4-связные планарные непанциклические графы.

Поступила 17.11.86